EL NIÑO NO PUEDE IMITAR LO QUE NO ESTÁ PRESENTE EN EL INTERIOR DE SU NIVEL EVOLUTIVO

“ Una total comprensión del concepto de la zona de desarrollo próximo debe desembocar en una nueva evaluación del papel de la imitación en el aprendizaje. Un principio inamovible de la psicología clásica es que únicamente la actividad independiente de los niños, no su actividad imitativa, indica su nivel de desarrollo mental. Este punto de vista se expresa de modo manifiesto en todos los sistemas de tests actuales. Al evaluar el desarrollo mental, sólo se toma en consideración aquellas soluciones que el niño alcanza sin la ayuda de nadie, sin demostraciones ni pistas. Tanto la imitación como el aprendizaje se consideran como procesos puramente mecánicos. No obstante, los psicólogos más recientes han demostrado que una persona puede imitar solamente aquello que está presente en el interior de su nivel evolutivo. Así, por ejemplo, si un niño tiene dificultades con un problema de aritmética y el profesor lo resuelve en la pizarra, el pequeño podrá captar la solución rápidamente. Pero si el profesor resolviera un problema de matemática avanzada, el niño nunca podría comprenderlo por mucho que tratara de imitarlo”

***Vygotski**.*

Lo central aquí es que el niño solo puede imitar lo que está presente en el interior de su nivel evolutivo. Una de las cosas fundamentales que deben estar presente en dicho interior evolutivo es el lenguaje. En la actividad práctica matemática se trabaja no solo con el pensamiento concreto sino también con el pensamiento abstracto. Siendo que el pensamiento se concreta en el lenguaje, se entiende pues la necesidad de que el lenguaje, como herramienta para manejar los objetos matemáticos, esté presente en el interior del pequeño a fín de que éste pueda imitar al profesor en la actividad práctica que se realiza en la zona de desarrollo próximo. Por esta razón, iniciamos el capítulo mostrando cómo el lenguaje lógico-matemático es clave para el desarrollo de pensamiento abstracto matemático. Pero este lenguaje es una construcción humana, no es natural. Por lo tanto hay que internalizarlo en los pequeños a fin de que ellos lo puedan utilizar como un lenguaje que funciona de manera natural. Por eso el siguiente punto se refiere a la importancia de la internalización del lenguaje. Sobre este punto profundizaremos un poquito para mostrar cómo la adquisición de los rudimentos del lenguaje lógico-matemático, por parte del niño, le da organización a su pensamiento y le proporciona la base para la construcción de las funciones psicológicas superiores que él necesita para lograr la solución del problema de manera inmediata. En todo esto hay una exhibición de desarrollo por parte del pequeño. Pero este desarrollo es un producto directo de aprendizaje. Así que en el siguiente punto mostraremos que el aprendizaje es un requisito previo para el desarrollo. Algunos detalles de estas líneas gruesas son los siguientes puntos: El lenguaje guía y organiza el pensamiento; El lenguaje lógico-matemático internalizado, factor clave en la organización del pensamiento del pequeño; Las funciones mentales de pensamiento lógico-matemático internalizadas deben ser activadas en el interior evolutivo del pequeño a fin de que éste pueda resolver de modo independiente los problemas; La internalización y la activación de las leyes de pensamiento lógico, junto con el dominio del lenguaje, son los procesos responsables que determinan el discurso matemático fluido y espontáneo en los pequeños; ¿Qué gana el niño al resolver un problema imitando la solución del profesor? La respuesta es que se le podrá enseñar a resolver de modo independiente problemas que excedan su capacidad; La organización de la tarea cumple las funciones de un andamio en la zona de desarrollo próximo para el traslado del pensamiento concreto al pensamiento abstracto; Los ZDPs como incrementos de inteligencia en un campo específico de conocimiento que se logran con la ayuda de otro a través de la imitación que nos dan una idea práctica para entender el concepto de zona de desarrollo próximo; El verdadero desarrollo intelectual en matemáticas empieza a darse cuando 'aparece' el lenguaje lógico-matemático en la actividad práctica del niño que él realiza en la zona de desarrollo próximo.

El desarrollo de pensamiento abstracto matemático tiene sus orígenes en los rudimentos del lenguaje lógico-matemàtico. Este lenguaje, como en el caso del lenguaje natural, se aprende con la ayuda de otro a través de la imitaciòn

Iniciamos esta sección mostrando mediante una serie de ejercicios resueltos por el pequeño la importancia pràctica que tiene el dominio de ciertos rudimentos del lenguaje lógico – matemático para el desarrollo intelectual en matemáticas. Veamos que con tan sòlo unos pocos rudimentos de este lenguaje y mediante el método de la zona de desarrollo próximo, el niño puede desarrollar pensamiento abstracto matemático.

Ejercicios sobre lenguaje lógico – matemático.

Escribe la traducción al lenguaje común de cada una de las siguientes expresiones matemáticas:

a) $8 \in N \wedge 8 < 24$
b) $5 < x < 10$
c) $\neg(\exists\, x \in N)(3 < x < 4)$
d) $(\forall x)(x>0)$

Solución

a) $8 \in N \wedge 8 < 24 \leftrightarrow$ 8 *es un número natural menor que 24*
b) $5 < x < 10 \leftrightarrow$ *x es un número mayor que 5 y menor que 10*
ò x es un número entre 5 y 10
c) $\neg(\exists x \in N)(3 < x < 4) \leftrightarrow$ *No existen números naturales entre 3 y 4*
d) $(\forall x)(x > 0) \leftrightarrow$ *todos los números son mayores que cero (o positivos).*

Traduzca al lenguaje corriente las siguientes frases matemáticas y viceversa:

a) $f \in N \wedge f \leq 11$
b) $x \in N \wedge 4 < x < 8$

Solución

$f \in N \wedge f \leq 11 \leftrightarrow$ *f es un número natural menor o igual que 11*
f es un número natural menor o igual que 11 $\leftrightarrow f \in N \wedge f \leq 11$

$x \in N \wedge 4 < x < 8 \leftrightarrow$ *x es un número natural entre 4 y 8*
x es un número natural entre 4 y 8 $\leftrightarrow x \in N \wedge 4 < x < 8$

Expresa cómo se lee cada uno de los siguientes conjuntos:

$J = \{f \,/\, f \in N;\ f < 9\}$

$K = \{x \,/\, x \in N;\ x \leq 2\}$

Solución

$J = \{f \,/\, f \in N;\ f < 9\} \leftrightarrow$ *J es el conjunto de los números naturales menores que 9.*
$f \in J \leftrightarrow$ *f es un número natural menor que 9*

$K = \{x \,/\, x \in N;\ x \leq 2\}\ K \leftrightarrow$ *es el conjunto de los números naturales menores o iguales a 2.*
$x \in K \leftrightarrow$ *x es un número natural menor que 2*

La importancia de la internalización del lenguaje.

El pequeño resolvió estos ejercicios muy rápido y de una manera muy espontánea. Al niño no se le puede enseñar a travès de la imitación el lenguaje matemático si primero no ha internalizado y activado en el interior de su nivel evolutivo los rudimentos de dicho lenguaje.

Escribe a) cómo se lee cada uno de los siguientes conjuntos y b) la relación que existe entre cada par de ellos ($\subset$, $\not\subset$, o $=$)

- $R = \{x \,/\, x \in N \wedge x < 21\}$
- $S = \{x \,/\, x \in N\ 15 < x < 19\}$
- $T = \{x \,/\, x \in N \wedge 10 < x < 17\}$
- $P = \{x \,/\, x \in N \wedge x < 21\}$
- $Q = \{x \,/\, x \text{ es par} \wedge 0 < x < 18\}$

Solución a):
R es el conjunto de los números naturales menores que 21.
S es el conjunto de los números naturales entre 15 y 19
T es el conjunto de los números naturales entre 10 y 17.
P es el conjunto de los naturales menores que 21.
Q es el conjunto de los pares positivos menores que 18

Solución b):

Solución inmediata

$S \subset R$, $T \subset R$, $S \not\subset T$, $P = R$, $Q \subset R$

Veamos cómo se llevaron a cabo los procesos de pensamiento matemático en el interior evolutivo del niño, al realizar esta tarea:

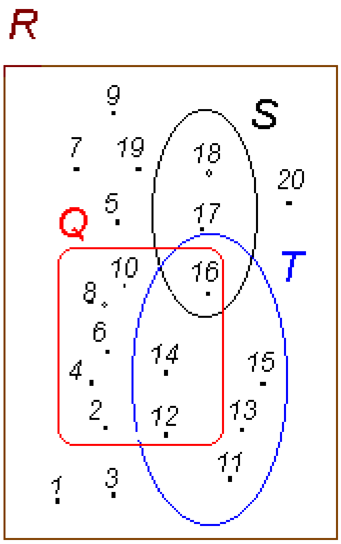
Una vez leídos los conjuntos, el niño escribió esta solución de manera inmediata, sin recurrir a la concreción. Es decir, el pequeño no tuvo necesidad de definir los conjuntos por extensión, ni representarlos por medio de diagramas de Venn para visualizar las relaciones entre los conjuntos y así poder resolver el ejercicio.

¿ Pero, qué vio el niño en su interior que lo llevò a resolver el ejercicio de manera instantánea ? Primero, los conjuntos definidos por extensión , o sea:

$R = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$
$S = \{16,17,18\}$

T = {11,12,13,14,15,16}
Q = {2,4,6,8,10,12,14,16}
P = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20}

Segundo, el niño pudo establecer la relación entre cada par de conjuntos como si estuviera viendo un diagrama como el de la figura 1, que una persona normal necesitarías para visualizar dichas relaciones y confirmar la veracidad de sus afirmaciones.



Todo esto el niño lo hizo en fracción de segundos. Normalmente, para resolver este tipo de ejercicios se acude a la representación gráfica. Del dibujo se ve que todas estas relaciones son muy evidentes; sin embargo, el niño no necesitó acudir a estos diagramas para establecer de manera inmediata dichas relaciones. Le bastó leerlos. No obstante, si el niño no hubiera internalizado las relaciones entre conjuntos a través de diagramas, tampoco hubiera podido resolver estos problemas. Un niño ha internalizado las operaciones entre conjuntos cuando él, de modo independiente, puede manejarlos por medio de diagramas de Venn y por medio del uso de la notación conjuntista, y cuando puede pensar y describir sus relaciones mediante el pensamiento abstracto; o sea, cuando puede describir los conjuntos mediante el lenguaje lógico-matemático. El dominio de ciertos rudimentos de este lenguaje es lo que le permite al niño razonar en abstracto y resolver el problema de manera inmediata.

El aprendizaje es un requisito previo para el desarrollo.

De este taller, se ve que el aprendizaje es siempre un requisito previo para el desarrollo y que el lenguaje desempeña un papel importante en el curso del desarrollo o maduración de aquellas funciones (rudimentos del lenguaje lógico-matemático) internalizadas y activadas a lo largo del aprendizaje. También se verifica con toda claridad que, en la relación entre aprendizaje y desarrollo, la concreción es necesaria como trampolín para desarrollar pensamiento abstracto, como medio, pero no como fin en si misma. Sin embargo, es un hecho universal que la enseñanza de la matemática en los niños siempre termina en la concreción.

La adquisición de los rudimentos del lenguaje lógico-matemático por parte del niño le da organización a su pensamiento y le proporciona la base para la construcción de funciones psicológicas superiores.

Veamos un ejercicio resuelto de modo independiente por el pequeño Santiago que nos muestra el papel crucial que desempeña el lenguaje lógico-matemático en la organización de su pensamiento.

En un examen Rosa obtuvo menos puntos que María, Laura menos que Adelmira, Noemí igual que Sara, Rosa más que Carmelina, Laura igual que María y Noemí más que Adelmira. ¿Quién obtuvo más puntos de todos y quien menos?

Solución independiente por parte del pequeño:

Rosa < María, Laura < Adelmira, Noemí = Sara,
Rosa > Carmelina, Laura = María, Noemí > Adelmira

Carmelina < Rosa < María = Laura < Adelmira < Noemí = Sara.

Respuesta: Más puntos Sara y Noemí; menos puntos Carmelina.

Análisis psicológico de la tarea:

La única ayuda que tuvo el pequeño fue conocer de antemano la respuesta.

El lenguaje **guía** *y organiza el pensamiento*.

En esta solución vemos cómo el lenguaje guía, organiza el pensamiento. Con los pocos rudimentos adquiridos del lenguaje lógico-matemático, el pequeño organiza su tarea de modo que pueda resolver el problema de manera directa. Obsérvese que bastan las expresiones:

$a = b$,
$a < b$ *que significa* a menor que b,
$a > b$ *que significa* a mayor que b,

del lenguaje matemático, para la solución del problema.

El lenguaje lo hace todo; le permite al niño construir las funciones psicológicas superiores [la creación y uso de estímulos artificiales que se convierten en las causas inmediatas de la conducta] para la solución del problema.

En este caso, la forma como el pequeño elabora las funciones psicológicas superiores para la realización de la tarea es muy sencillo; primero, traduce literalmente el enunciado del problema al lenguaje matemático utilizando las expresiones $a = b$, $a < b$ o $a > b$, para significar que a obtuvo igual puntos que b, a obtuvo menos puntos que b o a obtuvo más puntos que b respectivamente; traducción que el niño hace en las dos primeras líneas. Luego, mediante una observación simple, aplicando adecuadamente la ley transitiva para la igualdad y la desigualdad, obtiene la tercera línea; de donde, de manera inmediata, da respuesta a la pregunta del problema. Obsérvese que en la tercera línea el pequeño crea unos estímulos artificiales (estructuras lógicas) que al usarlos se convierten en las causas inmediatas (razonamientos directos o elementales) de la conducta (conclusión o respuesta a la pregunta del problema). Aquí hay un ejemplo claro de construcción de funciones psicológicas superiores por parte del pequeño.

El lenguaje lógico-matemático internalizado, factor clave en la organización del pensamiento del pequeño.

Esta solución independiente por parte del pequeño nos hace ver, de manera práctica, lo potente del lenguaje internalizado; en este caso, la importancia de la internalización de los rudimentos del lenguaje lógico-matemático en la organización del pensamiento del pequeño. En esta actividad práctica del niño, podemos apreciar cómo se construyen, se internalizan, se activan y operan las funciones psicológicas superiores en el interior evolutivo del niño, y además, cómo estas ocasionan el desarrollo de procesos superiores de pensamiento en matemáticas. Este ejemplo ilustra una ley evolutiva general para las funciones mentales superiores, que puede ser aplicada en su totalidad a los procesos de aprendizaje en los niños. Se confirma que lo que crea la zona de desarrollo próximo es un rasgo esencial de aprendizaje en el que el aprendizaje despierta una serie de procesos evolutivos internos, entre ellos el de la simbolización, capaces de operar sólo cuando el niño está en interacción con las personas de su entorno y en cooperación con algún semejante. Una vez se han internalizado estos procesos, se convierten en parte de los logros evolutivos independientes del niño.

Funciones mentales de pensamiento lógico-matemático internalizadas y activadas en el interior evolutivo del pequeño, que le permitieron resolver de modo independiente el anterior problema:

LEYES DE LA IGUALDAD

Las leyes o caracteres de la igualdad son tres:

1) **Carácter idéntico.** Todo número es igual a si mismo.

$$a = a$$

2) **Carácter recíproco.** Si un número es igual a otro, éste es igual al primero.

Así, si: $a = b$, $b = a$

3) **Carácter transitivo.** Si un número es igual a otro y éste es igual a un tercero, el primero es igual al tercero.

Así, si: $a = b$ y $b = c$, $a = c$

CARÁCTER TRANSITIVO DE LAS RELACIONES DE MAYOR Y MENOR

1) Si un número es mayor que otro y éste es mayor que un tercero, el primero es mayor que el tercero.
   Así, si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

2) Si un número es menor que otro y éste es menor que un tercero, el primero es menor que el tercero.

Así, si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

• *¿Cómo fueron internalizadas y activadas estas funciones elementales de pensamiento matemàtico?*

Mediante la experiencia social o socialización, y luego resolviendo de modo independiente problemas tales como:

- A es mayor que B, D es mayor que F y B es igual a D. ¿ Quién es mayor, A o F ?

Solución : $A > B$, $D > F$, $B = D$

$A > B = D > F$ *Respuesta A*

- Carlos le dice a un amigo, yo soy mayor que tú, tú eres mayor que Enrique. Pedro y Juan son gemelos, Sofía es más joven que Juan y Pedro es más joven que Enrique. ¿Cuál es el mayor? (hacer otro mas numérico)

Solución:

Carlos > tú, tú > Enrique, Pedro = Juan, Sofía < Juan y Pedro < Enrique.

Carlos > tú > Enrique > Pedro = Juan > Sofía.
Respuesta: Carlos

La internalización y la activación de las leyes de pensamiento lógico, junto con el dominio del lenguaje, son los procesos responsables del discurso matemático fluido y espontáneo en los pequeños.

Estos, y muchos otros problemas de este tipo, el niño los pudo resolver de modo independiente. Cuando el niño ha internalizado estas funciones psicológicas y las ha activado en su interior evolutivo, espontáneamente utiliza los símbolos matemáticos < o > para traducir el enunciado del problema al lenguaje matemático, organizar la tarea y finalmente mediante el pensamiento lógico realizarla de manera inmediata. Es importante tener dominio no solo de los rudimentos de la lógica sino también dominio de lenguaje, tal como manejo de sinónimos. Por ejemplo, las expresiones *Pedro < Enrique* y *Enrique > Pedro* son sinónimas. Sin el conocimiento de estas expresiones equivalentes el niño no hubiera podido resolver este problema. No hay desarrollo de los procesos elementales si no hay dominio de lenguaje. El lenguaje es la base para la construcción de las funciones psicológicas superiores.

Este ejemplo nos permite tener una mejor comprensión de lo que es el *nivel evolutivo real del pequeño, o sea*, de lo que es el nivel de desarrollo de sus funciones mentales, establecido como resultado de ciertos ciclos evolutivos llevados a cabo. Recordemos que el nivel de desarrollo real del niño define funciones que ya han madurado, es decir, los productos finales del desarrollo. Por ejemplo, si un niño es capaz de realizar esto o aquello de modo independiente, significa que las funciones para tales cosas han madurado en él.

¿Qué gana el niño al resolver un problema imitando la solución del profesor? La respuesta es que se le podrá enseñar a resolver de modo independiente problemas que excedan su capacidad.

Con este ejemplo, veremos cómo, mediante el método de la zona de desarrollo próximo, los niños acceden a la vida intelectual de los adultos; en este caso, al pensamiento abstracto matemático.

Consideremos el siguiente ejercicio realizado por el niño de modo independiente:

c] $\boldsymbol{a} + x + 19 = 80$

Hallar el valor de m cuando: $(\boldsymbol{a} + 5) + (x - 4) + m = 80$

Solución independiente

a = 30	*30*	*31*
x = 31 +	*+5*	*- 4*
19	—	—
—	*35*	*27*
80		

$$\begin{array}{r} 35 \\ +\ 27 \\ \hline 62 \end{array}$$

para saber cuál es m observo cuánto falta de 62 a 80

$$m = 18$$

Para resolver este problema, el niño no tuvo necesidad de la ayuda del profesor. Aquí tenemos una muestra de desarrollo de inteligencia práctica o pensamiento concreto en matemáticas, por parte del pequeño.

Uno podría preguntarse: ¿si el pequeño resolvió el problema de modo independiente y rápido, por qué enseñarle otra forma de resolverlo, que es más difícil, cómo él mismo lo manifestó, siendo que podía resolver cualquier problema de este tipo y en forma rápida? ¿Por qué complicarle la vida a los niños?. Es importante hacer énfasis en el hecho de que para resolver el problema el niño no tuvo necesidad de la ayuda del profesor. Pero ¿qué gana el niño al resolver el problema imitando la solución del profesor? La respuesta es que se le podrá enseñar a resolver de modo independiente problemas que excedan su capacidad. En esta solución hay desarrollo de procesos elementales, dominio de las operaciones elementales de la matemática, requisito para el desarrollo de procesos superiores que logrará solamente con la ayuda del profesor.

Veamos, ahora, qué puede ganar el niño al resolver este problema imitando la solución del profesor: El niño aprende a utilizar los métodos mediatos.

- *Solución con la ayuda del profesor a través de la imitación:*

$$a + x + 19 = 80 \qquad [1]$$

Eliminando paréntesis, obtenemos : $a + 5 + x - 4 + m = 80$

Por la ley conmutativa tenemos : $a + x + 5 - 4 + m = 80$

es decir que $a + x + 1 + m = 80 \qquad [2]$

Comparando [2] con [1] y aplicando la ley transitiva para la igualdad, obtenemos:

$$a + x + 1 + m = a + x + 19$$

Restando de esta ecuación la igualdad $a + x = a + x$,

O sea :

$$\begin{array}{rl} & 1 + m + a + x = a + x + 19 \\ -(& \qquad a + x = a + x \qquad) \\ \hline & 1 + m + 0 + 0 = 0 + 0 + 19 \end{array}$$

obtenemos $1 + m + 0 + 0 = 0 + 0 + 19$

Es decir $1 + m = 19$

De donde $m = 19 - 1$

O sea $m = 18$

Respuesta : $m = 18$

En este caso se le ha enseñado a resolver problemas mediante métodos mediatos, utilizando el pensamiento formal (así sea a un nivel muy elemental), a través de lo cual el niño ha podido desarrollar pensamiento abstracto matemático. Matemáticamente este pensamiento es aun técnico, pero para el nivel del niño es abstracto.

La zona de desarrollo próximo como método para el traslado del pensamiento concreto al pensamiento abstracto.

En la solución independiente del niño, podemos ver desarrollo de pensamiento concreto matemático, y en esta solución podemos ver desarrollo de pensamiento formal matemático, el cual, auque muy elemental, es un pensamiento para el niño eminentemente abstracto. Este es un ejemplo de cómo, mediante el método de la zona de desarrollo próximo, los niños acceden a la vida intelectual de los adultos; en este caso, al pensamiento abstracto matemático.

Sin la ayuda del profesor, el niño no hubiera podido aprender a resolver de esta manera y de modo independiente este tipo de problemas y, de consiguiente, tampoco hubiera podido iniciarse en el desarrollo de procesos de pensamiento abstracto matemático. Aquí hay una ganancia de pensamiento a*bstracto matem*ático por parte de*l niño.*

¿Qué es un ZDP?

Este aumento de inteligencia o incremento de conocimiento que se logra de un día para otro o de una semana para otra, por medio de este método, podría denominarse un ZDP. Recordemos que la zona de desarrollo próximo no es otra cosa que la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinada por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz. Esta distancia entre dos conocimientos, o incremento de conocimiento que se logra con la ayuda de otro a través de la imitación, es un ZDP.

Los niños no pueden elaborar por sí solos formas de pensamiento abstracto; así que se hace necesario ayudarles* a *desarrollar en su interior aquello de lo que carecen intrínsecamente en su desarrollo.

Un sistema de enseñanza basado únicamente en lo concreto —eliminando de la enseñanza cualquier cosa relacionada con el pensamiento abstracto— no sólo no ayuda a los niños a vencer sus limitaciones naturales, a trascender el pensamiento concreto, su espacio evidente e inmediato, sino que además refuerza dichas limitaciones al acostumbrar a los niños a utilizar exclusivamente el pensamiento concreto, suprimiendo así los rudimentos de pensamiento abstracto que poseen los niños. Precisamente por el hecho de que los niños no pueden elaborar por sí solos formas de pensamiento abstracto matemático, los profesores deben esforzarse en ayudarles en este sentido y en desarrollar en su interior aquello de lo que carecen intrínsecamente en su desarrollo.

La zona de desarrollo próximo, determinada por los problemas que los niños no pueden resolver por sí solos, sino únicamente con la ayuda de alguien define aquellas funciones que todavía no han madurado, pero que se hallan en proceso de maduración, funciones que en un mañana próximo alcanzarán su madurez y que ahora se encuentran en estado embrionario. Utilizando este método podemos tomar en consideración no sólo los ciclos y procesos de maduración que ya se han completado, sino también aquellos que se hallan en estado de formación, que están comenzando a madurar y a desarrollarse. La internalización de las funciones elementales, tales como las leyes de la igualdad, nos da una idea de las funciones en estado embrionario; los razonamientos implicados en las soluciones independientes de los niños, nos dan una idea de las funciones en proceso de maduración y que en un mañana próximo alcanzarán su madurez. En la solución de estos problemas vemos un ejercitar en los procesos de abstracción. En este ejercitar, a parte de la instalación, la activación y desarrollo de las funciones psicológicas elementales, se da también la construcción, internalizaciòn y desarrollo de las funciones psicológicas superiores, las que finalmente ocasionan el desarrollo del pensamiento abstracto buscado en los pequeños.

Así pues, la zona de desarrollo próximo nos permite trazar el futuro inmediato del niño, así como su estado evolutivo dinámico, señalando no sólo lo que ya ha sido completado evolutivamente, sino también aquello que está en curso de maduración.

Un niño puede imitar solamente aquello que está presente en el interior de su nivel evolutivo.

Experiencia 1

Consideremos el siguiente problema:

c] $\boldsymbol{a} + x + 19 = 80$

Hallar el valor de m cuando:

$(\boldsymbol{a} + 4) + (x - 6) + m = 80$

Solución independiente:

***a* = 30**
***x* = 31 +**
19

80

30
+4

34

31
- 6

25

34
+25

59

para saber cuál es m observo cuánto falta de 59 a 80
m = 21

A pesar de realizarlo de modo independiente, el niño no pudo resolver de forma completa este problema imitando la solución del profesor, debido a que la operación de resta cuando el substraendo es mayor que el minuendo no estaba presente en el nivel de su interior evolutivo.

Imitando la solución del profesor:

$a + x + 19 = 80$ [1]

Hallar el valor de m cuando:

$(a + 4) + (x - 6) + m = 80$

SOLUCIÓN

Eliminando paréntesis tenemos

$a + 4 + x - 6 + m = 80$

Por la ley conmutativa tenemos

$a + x + 4 - 6 + m = 80$

Hasta aquí llegó el trabajo del niño. Èl no pudo efectuar la resta indicada $4 - 6$ debido a que para este caso, cuando el substraendo es mayor que el minuendo, la operación de la resta no estaba presente en su interior evolutivo. Entonces, fue necesario, primero, que el niño asimilara esta operación y, luego, la internalizara para poder seguir adelante con la solución del problema. Después de asimilar la resta, para este caso, el niño pudo continuar con la solución del problema y, también, resolver, de esta manera, todos los problemas que se le propusieron posteriormente. Así pues, fue necesario completar los ciclos evolutivos de aprendizaje en el niño para que pudiera resolver este tipo de problemas imitando la solución del profesor.

En términos generales, una persona puede imitar solamente aquello que está presente en el nivel de su interior evolutivo ... ‘ Si un niño tiene dificultades con un problema de aritmética y el profesor lo resuelve en la pizarra, el pequeño podrá captar la solución rápidamente. Pero si el profesor resolviera un problema de matemática avanzada, el niño nunca podría comprenderlo por mucho que tratara de imitarlo’ ...

Esto también puede ocurrir aún a un nivel elemental, como lo acabamos de ver. Se presenta este problema cuando no están completados los ciclos evolutivos de aprendizaje a ese nivel elemental. Observemos que, en este caso, no estamos ante un problema de matemática avanzada, es todavía un problema elemental; sin embargo aun a este nivel no se han completado los ciclos evolutivos de aprendizaje alrededor de esta operación elemental de la Aritmética.

Aquí hay una muestra de desarrollo intelectual matemático. Al principio, el niño solo tenía habilidades matemáticas a nivel de inteligencia pràctica, pero ahora èl ha ganado también en inteligencia abstracta. También vemos el papel crucial que el aprendizaje puede desempeñar en el curso del desarrollo o maduración de aquellas funciones activadas a lo largo del aprendizaje.

Experiencia 2.

Sacar factor común en $ab - ac + a - am$

Pensando en aplicar la acción inversa de la ley distributiva, la pequeña escribió:

$$. \; a\mathrm{x}b - a\mathrm{x}c + a - a\mathrm{x}m$$

Sin embargo, así quedó estancado el proceso debido a que el tercer sumando era un objeto raro para la niña. La niña no pudo factorizar esta expresión; no se le ocurrió la identidad $a = a\mathrm{x}1$. Ella no se acordaba de esta identidad; sin embargo, al recordársela, tampoco pudo continuar con el ejercicio. *Las razones*: Por un lado, la identidad no estaba internalizada en el interior de la pequeña; y por otro, necesitaba que la identidad fuese activada, y obviamente no lo estaba. Después de trabajar estos dos asuntos con la niña, se le sugirió que volviera a escribir la expresión pero reemplazando el sumando a por el producto $ax1$. Así que ella pudo continuar con mucha facilidad de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} ab - ac + a - am &= ab - ac + ax1 - am, \\ &= a\,(b - c + 1 - m) \end{aligned}$$

Cuando nosotros estudiamos esta identidad [la ley modulativa para la multiplicación], nunca pensamos que ella podría tener un día alguna utilidad práctica. De esta experiencia aprendemos que no es suficiente con que los niños asimilen las nociones de lo que se está enseñando, sino que también es necesario que las internalicen, y aun las activen, para que se produzca un cambio en las operaciones intelectuales internas y puedan tener un aprendizaje sólido.

El verdadero desarrollo intelectual en matemáticas empieza a darse cuando 'aparece' el lenguaje lógico-matemático en la actividad práctica del niño.

El dominio inicial, por ejemplo, de las cuatro operaciones básicas de aritmética junto con ciertos rudimentos del lenguaje lógico – matemático, proporciona la base para el subsiguiente desarrollo de una serie de procesos internos sumamente complejos en el pensamiento del niño, que terminan finalmente no solamente en desarrollo de pensamiento práctico, sino también en desarrollo de pensamiento abstracto en matemáticas. Cuando se trabajan los problemas mediante el lenguaje y no sólo mediante las operaciones, ocurre el verdadero desarrollo intelectual. En los ejercicios iniciales de este capítulo, hemos podido ver cómo, con la aparición del lenguaje [lógica simbólica y teoría de conjuntos], la actividad práctica de los niños en el estudio de la matemática toma una directriz totalmente diferente que encausa todo el proceso de aprendizaje al desarrollo de pensamiento abstracto matemático, o sea, al desarrollo intelectual superior en matemáticas.

Comienzos de desarrollo de rudimentos de pensamiento abstracto matemático en niños de 4º grado de primaria.

Los problemas que siguen a continuación fueron expuestos por la niña Daniela en sus 9 años, cuando cursaba el 4º grado de primaria. En estos problemas tendremos la oportunidad de ver cómo puede ser el desarrollo de pensamiento abstracto matemático mediante el lenguaje formal.

PROBLEMA 1 Si se suma el minuendo con el substraendo y la diferencia, se obtiene ...

I. ORGANIZO MI TAREA

1. *Definición de resta:* $a - b = d$

   a es el minuendo.
   b es el substraendo.

d es la diferencia.

2. *Consecuencias:*

$$(1)\ b + d = a$$

En palabras, la diferencia sumada con el substraendo tiene que dar el minuendo.

3. *Traduzco las frases:*

- *se suma el minuendo con el substraendo y la diferencia:*

$$a + (b + d)$$

- *Si se suma el minuendo con el substraendo y la diferencia, se obtiene ... :*

$$a + (b + d) = ...$$

II. SOLUCIÓN

Por (1), $a + (b + d) = a + a$.
Luego, $a + (b + d) = 2a$. Respuesta: 2a

PROBLEMA 2. Si del minuendo se resta la diferencia y de esta resta se quita el substraendo, se obtiene ...

I. ORGANIZO MI TAREA

1. *Definición de resta: $a – b = d$*

a es el minuendo.
b es el substraendo.
d es la diferencia.

2. *Consecuencias:*

$$(1)\quad b + d = a$$
$$(2)\quad a – d = b$$

3. *Traduzco las frases:*
- *Del minuendo se resta la diferencia:*

$a - d$

- *De esta resta se quita el substraendo:*
  $(a - d) - b$
- *Si del minuendo se resta la diferencia y de esta resta se quita el substraendo, se obtiene ... :* $(a - d) - b = ...$

II. SOLUCIÓN

Por (2), $(a - d) - b = b - b = 0.$ *R: 0*

PROBLEMA 3

Restando del minuendo la suma del substraendo y la diferencia, se obtiene ...

I. *ORGANIZO MI TAREA*

1. *Definición de resta:* $a - b = d$

   a es el minuendo.
   b es el substraendo.
   d es la diferencia.

2. *Consecuencias:* (1) $b + d = a$

3. *Traduzco las frases:*

   - *La suma del substraendo y la diferencia*

     $b + d.$

   - *Restando del minuendo la suma del substraendo y la diferencia se obtiene ...*

     $a - (b + d) = ...$

II. SOLUCIÓN

Por (1), $a - (b + d) = a - a = 0$

R.0

PROBLEMA 4

Si el minuendo es 227 y el resto es 117 ¿ Cuál es el substraendo?

I. ORGANIZO MI TAREA

1. *Definición de resta:* $a - b = d$

   a es el minuendo.
   b es el substraendo.
   d es la diferencia.

2. *Consecuencias:*

   (1) $b + d = a$
   (2) $a - d = b$

3. *Traduzco las frases:*

   - *El minuendo es 227:* $a = 227$ (3)
   - *El resto es 117:* $d = 117$ (4)
   - *¿Cuál es el substraendo?:* $b = ?$

II. SOLUCIÓN

Reemplazando (3) *y* (4) *en* (2), *tenemos:*

$227 - 117 = b$

Esto es $110 = b$ *R. El substraendo es 110.*

P BLEMA 5

Tenía $ 23 000. Me compré un traje y me quedaron $ 2000. ¿ Cuánto me costó el traje?

I. ORGANIZO MI TAREA

1. *Definición de resta:* $a - b = d$

   a es el minuendo.
   b es el substraendo.
   d es la diferencia.

2. *Consecuencias:*
   (1) b + d = a
   (2) a – d = b
3. *Aplicación*
   a = lo que tengo
   b = lo que gasto (compro)
   d = lo que sobra o queda
4. *Traduzco las frases:*

- *Tenía $ 23000 : a = 23000* (3)
- *Compré un traje: b*
- *y me quedaron $2000 : d = 2000* (4)
- *¿Cuánto me costó el traje?: b = ?*

II . SOLUCIÓN

Reemplazando (3) *y* (4) *en* (2), *tenemos:*
23000 – 2000 = b
Esto es, 21000 = b
R. El traje me costó $21000

PROBLEMA 6
Después de gastar $ 2128 me quedaron $ 920. ¿ Cuánto tenía al principio?

I. *ORGANIZO MI TAREA*

1. *Definición de resta: a – b = d*
   a es el minuendo.
   b es el substraendo.
   d es la diferencia.
2. *Consecuencias:*
   (1) b + d = a
   (2) a – d = b
3. *Aplicación*
   a = lo que tengo o tenía
   b = lo que gasto
   d = lo que sobra o me queda
4. *Traduzco las frases:*
   - *Después de gastar $ 2128 : b = 2128* (3)
   - *Me quedaron $ 920 : d = 920* (4)
   - *¿Cuánto tenía al principio?: a = ?*

II. SOLUCIÓN

Reemplazando (3) y (4) en (1), tenemos:

2128 + 920 = a
Esto es 3048 = a

Los comienzos del desarrollo de pensamiento formal matemático en los pequeños.

El pensamiento que se exhibe en los tres primeros problemas es absolutamente abstracto; todos los objetos matemáticos son abstractos, no hay ninguno que sea concreto. La definición de resta, por ejemplo, la cual, a su vez, contiene las definiciones del minuendo, el substraendo y la diferencia son muestra de ello. Esto es manejo de lenguaje formal en matemáticas en su forma más elemental. Por otro lado, el manejo de consecuencias en esta actividad práctica es un índice, además, de desarrollo de pensamiento teórico a nivel abstracto en matemáticas. Esta combinación de lenguaje formal y pensamiento teórico que ocurre en el interior del niño nos revela cómo pueden ser en la práctica los comienzos del desarrollo de pensamiento formal matemático en los pequeños. Pero no todo termina con el logro del pensamiento abstracto. En los problemas restantes se ve la aplicación. En matemáticas, si no hay dominio del pensamiento abstracto, su aplicación no es realizable.

La organización de la tarea, un andamio en la zona de desarrollo próximo.

La actividad práctica desarrollada en estos problemas nos puede dar una idea de la función de los andamios en la zona de desarrollo próximo. Los edificios se construyen fácilmente con andamios. Toda edificación depende de andamios. Siempre que se tengan andamios adecuados y buenas bases se puede subir tan alto en la construcción como uno quiera. Gracias a la organización de la tarea se ha podido edificar todo un pensamiento matemático en los pequeños. Que la organización de la tarea cumpla la función de un andamio en la zona de desarrollo próximo se debe fundamentalmente a cuatro cosas : 1) que la organización de la tarea es la ayuda que ofrece el profesor al pequeño en la solución del problema. 2) que esta ayuda consiste en lenguaje. 3) que sin la organización de la tarea le es imposible al pequeño resolver el problema. 4) que la organización de la tarea hace que el niño pueda resolver el problema con mucha facilidad, mediante pasos elementales.

La organización de la tarea, un campo temporal de acción.

Veamos que la organización de la tarea es un campo temporal de acción. Cuando el pequeño ha internalizado todo lo relativo a la definición de resta y sus consecuencias, y ha tenido práctica en la aplicación de estas nociones, ya no necesitará más la organización de la tarea para llevar a cabo la solución del problema. Hará las traducciones mentalmente y sólo escribirá las correspondientes ecuaciones, de tal manera que lo que sigue será un trabajo puramente matemático. Por ejemplo, el problema 4 lo podría resolver así:

De la definición de resta: $a - b = d$, se obtiene que $a - d = b$.
Por lo tanto, según los datos del problema, $227 - 117 = b$.
Esto es $110 = b$. *R.. El substraendo es 110.*

La solución del problema 6 sin la ayuda de la organización de la tarea podría ser:

De la definición de resta $a - b = d$, se obtienen las igualdades:

$$(1) \quad b + d = a$$
$$(2) \quad a - d = b$$

De acuerdo con los datos del problema, $b = 2128$ y $d = 920$.
Reemplazando estos valores en **(1)**, *tenemos:*

$$2128 + 920 = a$$

Esto es $3048 = a$. R. $ 3048

Estos ejemplos nos permiten ver de la organización de la tarea varias cosas, a saber: (1), que ésta es una ayuda temporal o campo temporal de acción; inicialmente se tiene una acción unilateral muy útil en un proceso de transición [el paso del pensamiento concreto al pensamiento abstracto]. (2), que en esta etapa transicional, todas las ideas y conceptos, todas las estructuras mentales, dejan de organizarse de acuerdo con tipos familiares para constituirse en conceptos abstractos.(3), que aunque esta metáfora, la del andamio, sugiere una acción unilateral [el profesor ayuda al estudiante] y no la acción recíproca característica de la zona de construcción, por su naturaleza de lógica y lenguaje, la organización de la tarea, como andamio, es útil en la zona de construcción para provocar los cambios cognitivos en los estudiantes mediante un proceso interactivo de construcción. (4), que la organización de la tarea, que puede usarse como una herramienta conceptual importante para analizar los mecanismos más profundos de la cognición en matemáticas, se identifica plenamente con la idea del 'andamio' que indica la acción del profesor de ofrecer un apoyo temporal, el cual se puede retirar si ya no se necesita en la zona de desarrollo próximo (ZDP) según VYGOTSKI.

Conclusiones

Es imposible desarrollar pensamiento abstracto matemático sin tener dominio de los rudimentos del lenguaje lógico-matemàtico.

Es importante saber que el lenguaje en cualquiera de sus formas es un asunto que debe internalizarse.

Ignorar que la matemática es un lenguaje que se puede aprender con la ayuda de otro a través de la imitación ha causado que esta materia se haya convertido en inaccesible no solamente para los niños, sino también para los estudiantes de matemáticas en general.

El aprendizaje es un requisito previo para el desarrollo. Si no hay aprendizaje no hay desarrollo.

En la escuela no se desarrolla pensamiento abstracto matemático en los niños debido a que se trabaja la concreción como un fin en si misma y se ignora que la meta de ésta es ser un medio o trampolín para la adquisición del pensamiento abstracto.

Es crucial que el niño adquiera los rudimentos del lenguaje lógico-matemático, porque éste le da organización a su pensamiento y le proporciona la base para la construcción de las funciones psicológicas superiores responsables de las operaciones ágiles, claras, lógicas y precisas que el pequeño puede llevar a cabo en su actividad práctica matemática.

No es suficiente con la internalización de las funciones mentales superiores de pensamiento lógico-matemático en el interior de los niños; también es necesario que, una vez instaladas, estas sean activadas, porque esto es lo que causa el discurso matemático fluido y espontáneo en la actividad práctica que se realiza en la zona de desarrollo próximo.

El proceso imitativo en la zona de desarrollo próximo es muy importante en la enseñanza de la matemática con los pequeños, porque es de la única manera que se le podrá enseñar a los niños a resolver de modo independiente problemas que exceden su capacidad.

Las fallas de la enseñanza de la matemática en el país pueden estar en los siguientes dos hechos: Primero, está el hecho de que nuestro sistema de enseñanza de la matemática está basado únicamente en lo concreto que elimina de la enseñanza cualquier cosa relacionada con el pensamiento abstracto. Segundo, está el hecho de que sin *ZDP's* es imposible desarrollar, en el interior de los pequeños, aquello de lo que carecen intrínsecamente en su desarrollo.

Síntesis

El lenguaje lógico-matemático es esencial para el aprendizaje de las matemáticas y constituye una herramienta muy potente para el desarrollo de los procesos intelectuales superiores en este campo. Con tan solo el dominio de unos pocos rudimentos de este lenguaje y mediante el proceso imitativo en la zona de desarrollo próximo los niños pueden desarrollar pensamiento abstracto matemático. El pequeño no puede aprender el lenguaje lógico matemático a través de la imitación si primero no ha internalizado y activado en el interior de su nivel evolutivo los rudimentos de dicho lenguaje. El dominio de los rudimentos de lenguaje lógico-matemático es lo que le permite al niño razonar en abstracto y resolver problemas de manera inmediata. La adquisición de este lenguaje por parte del niño le da organización a su pensamiento y le proporciona la base para la construcción de funciones psicológicas superiores. Esto quiere decir que el lenguaje lógico matemático desempeña un papel crucial en el aprendizaje de la matemática en los niños, lo que confirma la tesis planteada a lo largo de todo este libro de que el aprendizaje es un requisito previo para el desarrollo. Son las funciones mentales de pensamiento lógico-matemático internalizadas y activadas en el interior del niño lo que capacita a los pequeños para resolver de modo independiente los problemas.

¿Qué gana el niño al resolver un problema imitando la solución del profesor? La respuesta es que se le podrá enseñar a resolver de modo independiente problemas que excedan su capacidad. La zona de desarrollo próximo [ayuda del profesor + imitación por parte del alumno] se constituye en un andamio para el traslado del pensamiento concreto al pensamiento abstracto. Mediante este método los niños acceden a la vida intelectual de los adultos; en nuestro caso, al pensamiento abstracto matemático. La concreción es necesaria e inevitable, pero únicamente como trampolín para desarrollar el pensamiento abstracto, como medio, no como fin en sí misma.

Un ZDP es un aumento de inteligencia en un campo específico de conocimiento que se logra de un momento a otro, de un día para otro, o de una semana para otra, ... etc, con la ayuda de otra persona a través de la imitación. Los niños no pueden elaborar por sí solos formas de pensamiento abstracto; así que se requiere de ZDP's para ayudarles a desarrollar en su interior aquello de lo que carecen intrínsecamente en su desarrollo. Mediante ZDP's el desarrollo avanza muy rápido en los pequeños. Por medio de este método podemos elaborar hoy las dimensiones del aprendizaje de lo que queremos ser en un mañana próximo. Un niño puede imitar solamente aquello que está presente en el interior de su nivel evolutivo. Por ejemplo, si un niño tiene dificultades con un problema de aritmética y el profesor lo resuelve en la pizarra, el pequeño podrá captar la solución rápidamente. Pero si el profesor resolviera un problema de matemática avanzada, el niño nunca podría comprenderlo por mucho que tratara de imitarlo. Es necesario, pues, completar los ciclos evolutivos de aprendizaje de la materia que estudia a fin de que el niño pueda resolver esos problemas imitando la solución del profesor.