EXHIBICIÓN DE PENSAMIENTO FORMAL MATEMÁTICO DESARROLLODADO EN NIÑOS EN EDAD ESCOLAR CON EL METODO DE LA ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO.

"El uso de métodos concretos de imitación es necesario e inevitable, pero únicamente como trampolín para desarrollar el pensamiento abstracto, como medio, no como fin en sí mismo ...

... La maduración per se es un factor secundario en el desarrollo de las formas más complejas y singulares de la conducta humana. La progresiva evolución de dichas formas de conducta se caracteriza por complicadas transformaciones cualitativas de una forma de comportamiento en otra (o, como diría Hegel, una transformación de cantidad en calidad) ...

... El momento más significativo en el curso del desarrollo intelectual, que da a luz las formas más puramente humanas de la inteligencia práctica y abstracta, es cuando el lenguaje y la actividad práctica, dos líneas de desarrollo antes completamente independientes, convergen."

Vygotski

La matemática expuesta en este capítulo es de nivel universitario. Quizás el lector encuentre difícil entenderla, pero tenga en cuenta que esta matemática ha sido expuesta de modo independiente por niños de diez y once años de una manera perfecta, con toda propiedad y fluidez, como si se tratara de operaciones elementales de la aritmética.

Puede ser que nos asombremos que un niño de la escuela primaria pueda desarrollar este pensamiento que es propio de una carrera de matemáticas. Esto se debe al hecho universal de que esta matemática sólo se estudia en la universidad y en las carreras de matemáticas puras. También se debe a la creencia de que la edad mental depende completamente de la edad cronológica, y que sólo los genios y unos pocos superdotados tienen acceso a la ciencia a una edad temprana.

Conviene hacer dos aclaraciones :

(1) que a pesar de que la matemática expuesta en este capítulo es de alto nivel de abstracción, sin embargo, no es un ejemplo de dominio de pensamiento abstracto en matemáticas, todavía es un pensamiento elemental. Con la ayuda de la metáfora de los capullos, flores y frutos del desarrollo se podrá mostrar con claridad y precisión su relación con el pensamiento superior.

(2) que es normal que los estudiantes no puedan desarrollar pensamiento abstracto matemático por si solos, y que su desarrollo se hace posible a través del aprendizaje escolar al ayudarles a desarrollar en su interior aquello de lo que carecen intrínsecamente en su desarrollo. Este punto también se demostrará en la práctica por medio de un experimento en el que el lector tendrá la oportunidad de verificar por si mismo que con la ayuda de otro es posible desarrollar pensamiento abstracto matemático, aunque se considere una persona no apta para esta materia. Con este experimento, se podrá poner fin a la creencia de que la matemática pura es solo para personas muy inteligentes.

Invitamos, pues, al lector, a que se compenetre con este pensamiento y lea con detenimiento toda la matemática que a continuación se expone, a fin de que verifique por si mismo que la matemática si se la estudia adecuadamente, esto es, según el método de la zona de desarrollo próximo, no solamente será una materia asequible, sino también disfrutable.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA DIVISIBILIDAD

Para facilitar el manejo de los objetos de estudio de este capítulo, adoptaremos las siguientes convenciones y / o notaciones:

- n divide a m se nota por n / m.
- n no divide a m se nota por $n \not/ m$
- r es el residuo por defecto de dividir m entre n se nota por $r \equiv m \dot{\div} n$.

Ejemplos: 5 divide a 10 se nota por 5 / 10, 3 no divide a 10 se nota por $3 \not/ 10$ y $2 \equiv 17 \dot{\div} 5$ indica que 2 es el residuo por defecto de dividir 17 entre 5.

TEOREMA 0
La suma de los residuos por defecto y por exceso es igual al divisor.

Demostración general :

Si c es el coeficiente por defecto en $D \div d$, se ha establecido que el residuo por defecto r y el residuo por exceso r' vienen dados por las siguientes fórmulas :

$$r = D - dc \qquad (1)$$
$$r' = d(c+1) - D$$

Efectuando el producto d(c+1) en esta última igualdad, tenemos :

$$r' = d\,c + d - D \qquad (2)$$

Sumando (1) Y (2) tenemos :

$$r + r' = D - d\,c + d\,c + d - D$$

Simplificando D y –D, – d c y d c , nos queda :

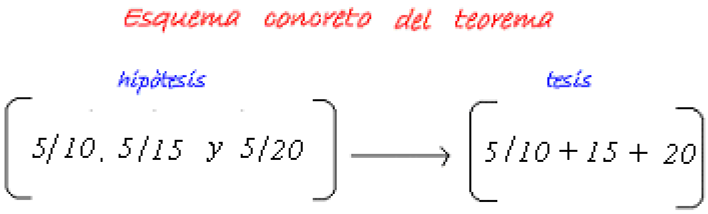
$$r + r' = d$$

Y esto era lo que queríamos demostrar.

TEOREMA I

Todo número que divide a otros varios, divide a su suma.

Ejemplo: Sea la suma 10 + 15 + 20



Prueba

Sea el nùmero 5, que divide a 10, 15 y 20 (hipótesis).
Vamos a probar que 5 divide a 10 + 15 + 20 = 45, o sea que 10 + 15 + 20 es múltiplo de 5 (Tesis).

En efecto:

$$10 = 5x2;$$
$$15 = 5x3;$$
$$20 = 5x4.$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades, según la ley de uniformidad de la suma, tenemos:

$$10 + 15 + 20 = 5x2 + 5x3 + 5x4.$$

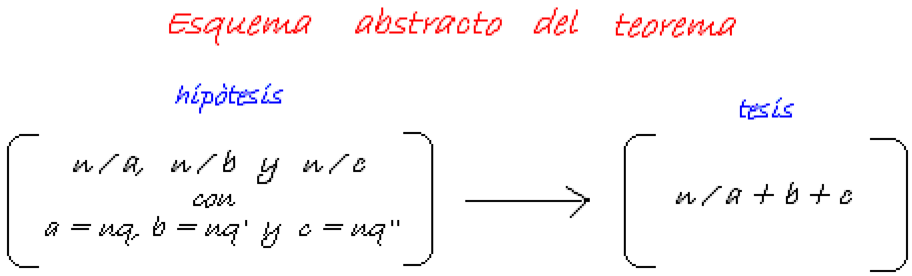
Sacando el factor comùn 5 en el segundo miembro de esta última igualdad, tenemos:

$$10 + 15 + 20 = 5(2 + 3 + 4).$$

O sea $10 + 15 + 20 = 5x9$

lo que nos dice que la suma 10 + 15 + 20, o sea 45, contiene a 5 nueve veces; luego, 5 divide a la suma 10 + 15 + 20, que era lo que queríamos demostrar.

DEMOSTRACIÓN GENERAL



*Sea el número n que divide a los números a, b y c (**hipótesis**). Vamos a probar que n divide a la suma a + b + c (**tesis**).*

En efecto: Sea q el cociente de dividir a entre n, q' el cociente de dividir b entre n y q'' el cociente de dividir c entre n. Como el dividendo es el producto del divisor por el cociente, tendremos:

$$a = nq$$
$$b = nq'$$
$$c = nq''$$

Sumando miembro a miembro estas desigualdades, tenemos:

$$a + b + c = nq + nq' + nq''$$

Sacando n factor común:

$$a + b + c = n(q + q' + q'')$$

lo que nos dice que a + b + c contiene a n un número exacto de veces, q + q' +q'' veces, o sea que n divide a la suma a + b + c, que era lo que queríamos demostrar.

TEOREMA II

Todo número que no divide a otros varios divide a su suma, si la suma de los residuos que resultan de dividir éstos entre el numero que no los divide, es divisible por este número.

Ejemplo: Sea la suma 15 + 37 + 46

Esquema concreto del teorema

hipótesis

$$\left[\begin{array}{c} 7 \nmid 15,\ 7 \nmid 37 \ \text{y}\ 7 \nmid 46 \\ \text{y}\ 7 / 1+2+4 \quad \text{con} \\ 1 \equiv 15 \div 7,\ 2 \equiv 37 \div 7 \ \text{y}\ 4 \equiv 46 \div 7 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\ 7 / 15 + 37 + 46\ \right]$$

tesis

confirmación de la hipótesis

$$\begin{array}{r|l} 15 & 7 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 37 & 7 \\ \hline 2 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 46 & 7 \\ \hline 4 & 6 \end{array}$$

$1 + 2 + 4 = 7$, que es divisible por 7

. Lo escrito bajo la confirmación de la hipótesis significa que :

$$15 = 7x2 + 1$$
$$37 = 7x5 + 2$$
$$46 = 7x6 + 4$$

Prueba

Sea el número 7, que no divide a 15, ni a 37, ni a 46, pero el residuo de dividir 15 entre 7 es 1, el de dividir 37 entre 7 es 2 y el de dividir 46 entre 7 es 4, y la suma de estos residuos, 1 + 2 + 4 = 7, es divisible por 7 ***(hipótesis)***

Vamos a probar que 7 divide a 15 + 37 + 46 = 98 ***(tesis)****.*

En efecto:

$$15 = 7x2 + 1$$
$$37 = 7x5 + 2$$
$$46 = 7x6 + 4$$

Sumando estas igualdades:

$$15 + 37 + 46 = 7x2 + 7x5 + 7x6 + 1 + 2 + 4.$$

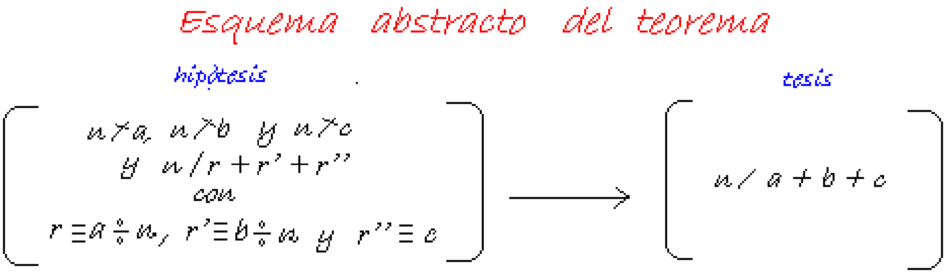
Sacando factor común 7:

$$15 + 37 + 46 = 7(2 + 5 + 6) + (1 + 2 + 4).$$

O sea $15 + 37 + 46 = 7x13 + 7.$

Ahora bien, en el segundo miembro, 7 divide a 7x13 porque es un múltiplo de 7 y divide a 7, porque todo número es divisible por sí mismo; luego 7 divide a su suma 15 + 37 + 46 o sea 98, porque según el teorema anterior todo número que divide a otros divide a su suma, que era lo que queríamos demostrar.

DEMOSTRACIÓN GENERAL



Sea el número n que no divide a los números a, b ni c. Sea r el residuo de dividir a entre n; r’ el residuo de dividir b entre n, r’’ el residuo de dividir c entre n y la suma r + r’ + r’’ divisible por n (**hipótesis**).
Vamos a probar que n divide a a + b + c ***(tesis).***

En efecto: Sea q el cociente de dividir a entre n, q’ el de dividir b entre n y q’’ el de dividir c entre n, tendremos:

$$a = nq + r$$
$$b = nq' + r'$$
$$c = nq'' + r''$$

porque en toda división inexacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el residuo.

Sumando miembro a miembro estas igualdades, tenemos:

$$a + b + c = nq + nq' + nq'' + r + r' + r''.$$

Sacando n factor común:

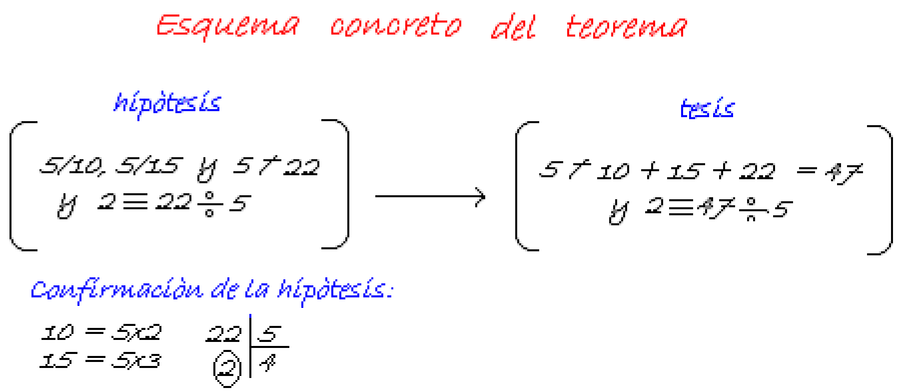
$$a + b + c = n(q + q' + q'') + (r + r' + +r'')$$

En el segundo miembro de esta ecuación, podemos observar que n divide al sumando n(q + q’ +q’’) porque este número es múltiplo de n y divide al sumando (r + r’ + r’’) porque en la hipótesis hemos supuesto que la suma de los residuos era divisible por n; luego, si n divide a estos dos sumandos, tiene que dividir a su suma, que es a + b + c, porque según el teorema anterior, todo número que divide a varios sumandos, divide a su suma. Luego, n divide a a + b + c, que era lo que queríamos demostrar.

TEOREMA III

Si un número divide a todos los sumandos de una suma, menos a uno de ellos, no divide a la suma, y el residuo que se obtiene al dividir la suma entre el número, es el mismo que se obtiene dividiendo el sumando no divisible entre dicho número.

Ejemplo: Sea la suma 10 +15 + 22.



Prueba

*Sea el número 5, que divide a 10 y a 15 pero no divide a 22, siendo 2 el residuo de dividir 22 entre 5, como lo podemos observar en la confirmación de la hipótesis (**Hipótesis**).*

Vamos a demostrar que 5 no divide a 10 + 15 + 22 = 47 y que el residuo de dividir 47 entre 5 es 2, igual al residuo de dividir 22 entre 5 (Tesis).

En efecto:

$$10 = 5x2$$
$$15 = 5x3$$
$$22 = 5x4 + 2.$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades, según la ley de uniformidad, tenemos:

$$10 + 15 + 22 = 5x2 + 5x3 + 5x4 + 2$$

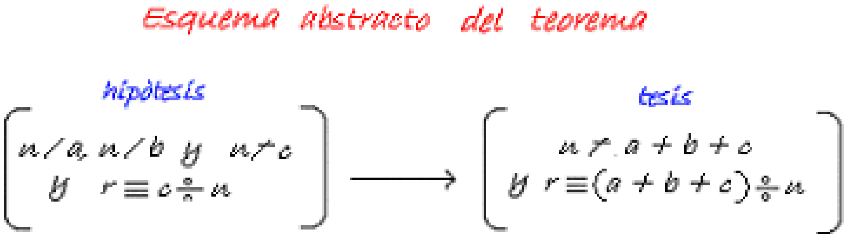
Sacando el factor común 5 en el segundo miembro, tenemos:

$$10 + 15 + 22 = 5(2 + 3 + 4) + 2$$

o sea $10 + 15 + 22 = 5x9 + 2$

y esta última igualdad demuestra el teorema, pues ella nos dice que el número 5 está contenido en la suma 9 veces, pero no exactamente, sobra *el residuo 2; luego 5 no divide a 10 + 15 + 22. Además, ella nos dice que el residuo de dividir 10 + 15 + 22 entre 5 es 2, igual al residuo de dividir 22 entre 5.*

DEMOSTRACIÓN GENERAL



*Sea el numero n que divide a los números a y b, pero no divide a c; sea r el residuo de dividir c entre n(**Hipótesis)**.*

*Vamos a demostrar que n no divide a a + b + c y que el residuo de dividir la suma a + b + c entre n es el mismo que el de dividir c entre n, o sea r **(Tesis)**:.*

En efecto: llamaremos q al cociente de dividir a entre n; q' al cociente de dividir b entre n; q'' al cociente de dividir c entre n siendo r el residuo de esta división. Entonces tendremos:

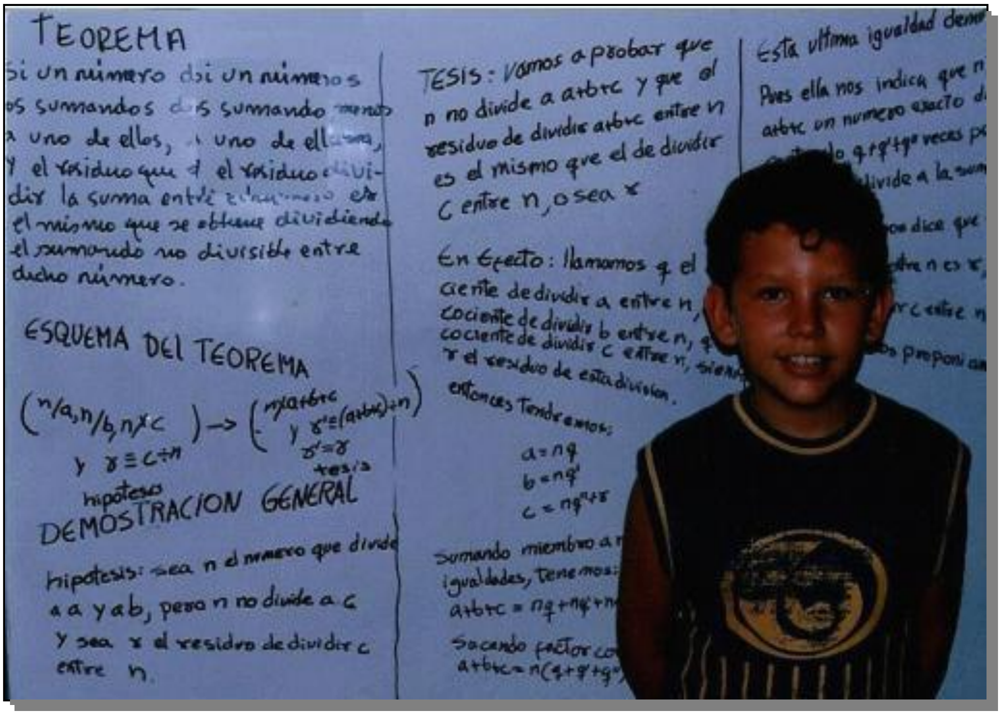
$$a = nq$$
$$b = nq'$$
$$c = nq'' + r.$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades, tenemos:

$$a + b + c = nq + nq' + nq'' + r$$

o sea $$a + b + c = n(q + q' + q'') + r$$

y esta última igualdad demuestra el teorema, pues ella nos indica que el número n no está contenido en la suma a + b + c un número exacto de veces, pues está contenido en ella q + q' + q'' veces pero sobra el residuo r; luego, n no divide al número a + b + c. Además, ella nos dice que el residuo de dividir a + b + c entre n es r, que es el mismo residuo que resulta de dividir c entre n. Luego queda demostrado lo que nos proponíamos.



TEOREMA IV
Todo número que divide a otro divide a sus múltiplos.

Ejemplo, 5 divide a 10. Entonces 5 dividirá a cualquier múltiplo de 10, por ejemplo a 40.

Esquema concreto del teorema

hipótesis tesis

(5/10) → (5/ cualquier múltiplo de 10 (por ejemplo a 40))

*Sea el número 5, que divide a 10 (**hipótesis**).*

*Vamos a probar que 5 divide a cualquier múltiplo de 10; por ejemplo, a 10x4 = 40 (**tesis**).*

En efecto: 10x4 = 10 + 10 + 10 + 10.

Ahora bien, 5 divide a todos los sumandos 10 del segundo miembro por hipótesis; luego, dividirá a su suma que es 10x4 o sea 40, porque hay un teorema (Teorema I) que dice que todo número que divide a varios sumandos divide a su suma; luego, 5 divide a 40, que era lo que queríamos demostrar.

DEMOSTRACIÓN GENERAL

Esquema abstracto del teorema

$$\overset{\text{hipótesis}}{\left[\; n \,/\, a \;\right]} \longrightarrow \overset{\text{tesis}}{\left[\; n \,/\, \text{cualquier múltiplo de } a \;\right]}$$

*Sea n el número que divide al número a (**hipótesis**). Vamos a probar que n divide a cualquier múltiplo de a, por ejemplo al número ab (**tesis**).*

En efecto:

$$ab = \underbrace{a + a + \text{-----} + a}_{b \text{ veces}}$$

Ahora bien, n divide a todos los sumandos a del segundo miembro por hipótesis; luego, dividirá a su suma, que es ab, porque hay un teorema (el teorema 1) que dice que todo número que divide a varios sumandos divide a su suma; luego, n divide a ab, que era lo que queríamos demostrar.

TEOREMA V
Todo número que divide a otros dos, divide a su diferencia.

Ejemplo: Sea la diferencia 18 – 12 = 6

Esquema concreto del teorema

$$\overset{\text{hipótesis}}{\left[\; 3 \,/\, 18 \text{ y } 3 \,/\, 12 \;\right]} \longrightarrow \overset{\text{tesis}}{\left[\; 3 \,/\, 18 - 12 \;\right]}$$

*Sea el número 3, que divide a 18 y a 12 (**hipótesis**).*

*Vamos a probar que 3 divide a la diferencia 18 – 12 = 6 (**tesis**).*

En efecto:

$$18 = 3 \times 6$$
$$12 = 3 \times 4$$

Restando miembro a miembro estas desigualdades, tenemos:

$$18 - 12 = 3 \times 6 - 3 \times 4$$

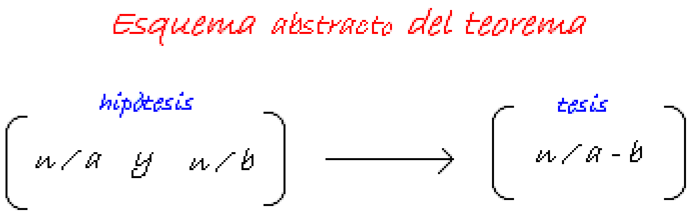
Sacando 3 factor común en el segundo miembro:

$$18 - 12 = 3(6 - 4)$$

$$\text{o sea} \quad 18 - 12 = 3 \times 2$$

lo que nos dice que la diferencia 18 – 12, o sea 6, contiene a 3 dos veces, o sea, que 3 divide a 18 – 12, que era lo que queríamos demostrar.

DEMOSTRACIÓN GENERAL



***Sea n que** divide a los números a y b siendo a > b (**hipótesis**)*
*Vamos a demostrar que n divide a a – b (**tesis**).*

En efecto: Sea q el cociente de dividir a entre n y q' el cociente de dividir b entre n. Como en toda división exacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, tenemos:

$$a = n\,q$$
$$b = n\,q'$$

Restando miembro a miembro estas igualdades, según la ley de uniformidad de la resta, tenemos:

$$a - b = nq - nq'.$$

Sacando n factor común en el segundo miembro:

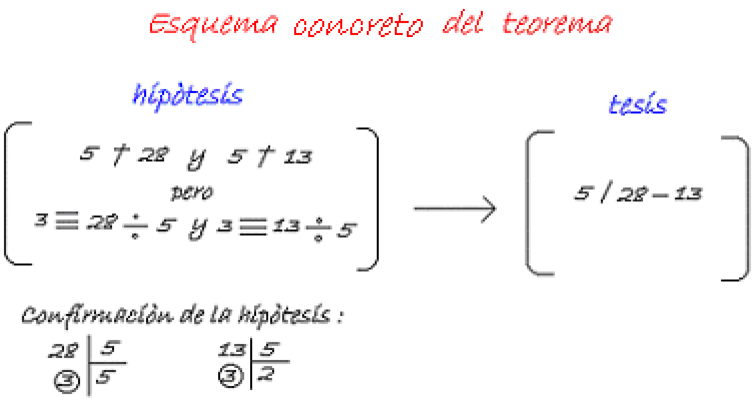
$$a - b = n\,(q - q')$$

lo que nos dice que la diferencia a – b contiene a n un número exacto de veces q – q' veces; luego, n divide a la diferencia a – b, que era lo queríamos demostrar.

TEOREMA VI

Todo número que no divide a otros dos, divide a su diferencia si los residuos por defecto que resultan de dividir estos dos números entre el número que no los divide son iguales.

Ejemplo: Sea la diferencia 28 – 13 = 15.



Prueba

Sea el número 5, que no divide a 28 ni a 13, pero el residuo por defecto de dividir 28 entre 5 es 3 y el residuo de dividir 13 entre 5 también es 3 (hipótesis).

Vamos a probar que 5 divide a la diferencia 28 – 13 = 15 (tesis)

En efecto:

$$28 = 5 \times 5 + 3$$
$$13 = 5 \times 2 + 3$$

Restando miembro a miembro estas igualdades, tenemos:

$$28 - 13 = 5 \times 5 - 5 \times 2 + 3 - 3.$$

Sacando 5 factor común en el segundo miembro:

$$28 - 13 = 5(5 - 2) + (3 - 3)$$

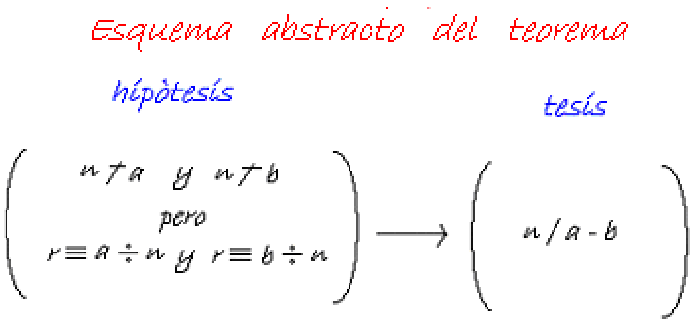
y como $3 - 3 = 0$, $28 - 13 = 5 \times 5 - 5 \times 2 + 3 - 3$ *nos queda:*

$$28 - 13 = 5(5 - 2)$$

o sea $$28 - 13 = 5 \times 3$$

lo que nos dice que la diferencia 28 – 13, o sea 15, contiene a 5 tres veces; luego, 5 divide a la diferencia 28 – 13, que era lo que queríamos demostrar.

DEMOSTRACIÓN GENERAL



*Sea el número n que no divide a a ni a b; r el residuo de dividir a entre n y b entre n (**hipótesis**).*
*Vamos a probar que n divide a la diferencia a – b (**tesis**)*

En efecto: Sea q el cociente de dividir a entre n y q' el cociente de dividir b entre n, como r es el residuo en ambos casos, tenemos:

$$a = nq + r$$
$$b = nq' + r$$

Restando estas igualdades, tenemos:

$$a - b = nq - nq' + r - r$$

Y como r – r es 0, nos queda:

$$a - b = nq - nq'.$$

Sacando n factor común, tenemos:

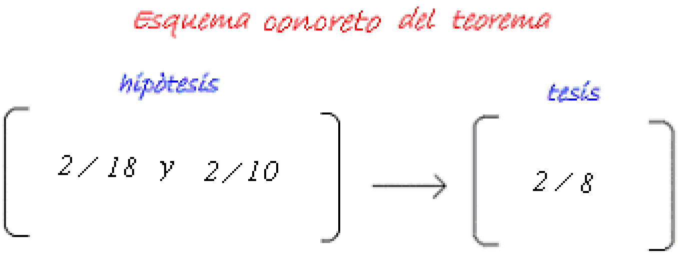
$$a - b = n(q - q')$$

Lo que nos dice que la diferencia a – b contiene a n un número exacto de veces, (q – q') veces o sea que n divide a la diferencia a – b, que era lo que queríamos demostrar.

TEOREMA VII

Todo número que divide a la suma de dos sumandos y a uno de èstos, tiene que dividir al otro sumando.

Ejemplo: Sea la suma 8 + 10 = 18.

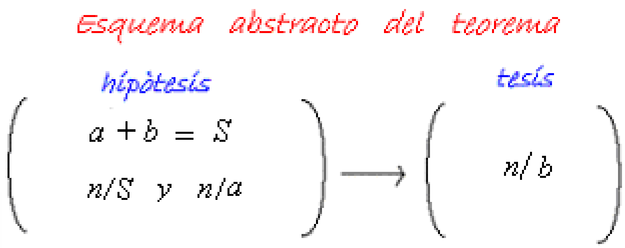


Prueba

Sea la suma 8 + 10 = 18. El número 2 divide a 18 y a 10 ***(Hipótesis).***
Vamos a probar que 2 divide a 8 ***(Tesis)****.*

En efecto: 18 –10 = 8. 2 divide a 18 y a 10 por hipótesis; luego, tiene que dividir a su diferencia 8, porque hay un teorema (T. V) que dice que todo número que divide a otros dos divide a su diferencia. Luego 2 divide a 8, que era lo que queríamos demostrar.

DEMOSTRACIÓN GENERAL

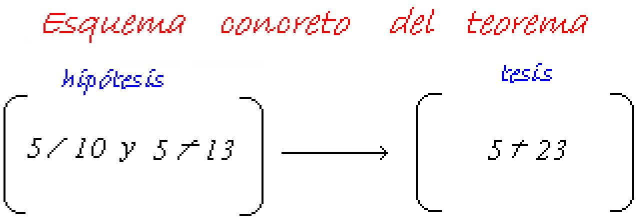


En la suma a + b = S*, el número n divide a* S *y al sumando a (Hipótesis).*
Vamos a que n divide al otro sumando b (Tesis).

En efecto: De la hipótesis se desprende que S *– a = b. En número n divide a S y al sumando a por hipótesis, luego tiene que dividir a su diferencia b porque hay un teorema que dice que todo número que divide a otros dos* *divide a su diferencia, luego n divide a b, que era lo que queríamos demostrar*.

TEOREMA VIII
Todo número que divide a uno de dos sumandos y no divide al otro, no divide a la suma.

Ejemplo: Sea la suma 10 + 13 = 23.

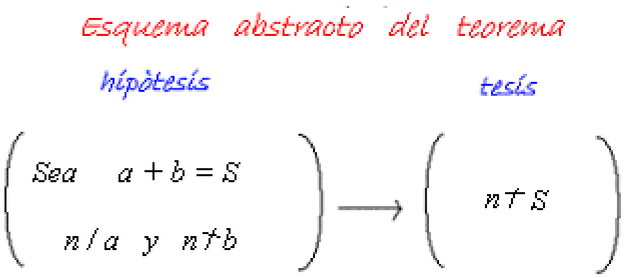


Prueba

Sea la suma 10 + 13 = 23. El número 5 divide a 10 y no divide a 13 (Hipótesis).
Vamos a probar que 5 no divide a 23 (Tesis).

En efecto: 23 – 10 = 13. Si 5 dividiera a 23, como 5 divide a 10 por hipótesis, tendría que dividir a la diferencia entre 23 y 10, que es 13, porque todo número que divide a otros dos divide a su diferencia, pero es imposible que 5 divida a 13, porque va contra lo que hemos supuesto; luego, 5 no divide a 23. *Nota: Este método de demostración se llama de reducción al absurdo*

DEMOSTRACIÓN GENERAL



Sea la suma a + b = S. El número n divide al sumando a y no divide a b (Hipótesis).

Vamos a probar que n no divide a S (Tesis).

En efecto: De la hipótesis se desprende S – a = b. Si n dividiera a S, como n divide al sumando a por hipótesis, tendría que dividir a la diferencia entre S y a que es b, porque todo número que divide a otros dos divide a su diferencia, pero es imposible que n divida a b porque va contra lo que hemos supuesto; luego, n no divide a S, que era lo queríamos demostrar.

TEOREMA IX

Todo número que divide al dividendo y al divisor de una división inexacta, divide al residuo.

Ejemplo: Sea la división $\begin{array}{r|l} 24 & 9 \\ \hline 6 & 2 \end{array}$ 3 divide a 24 y a 9.

Entonces 3 debería dividir a 6

esquema concreto del teorema

hipòtesis — tesis

$$\left(3/24 \text{ y } 3/9 \right) \longrightarrow \left(3/6 \right)$$

Prueba

Sea la división $\begin{array}{r|l} 24 & 9 \\ \hline 6 & 2 \end{array}$

El número 3 divide al dividendo 24 y al divisor 9 ***(Hipótesis)****.*

Vamos a probar que 3 divide al residuo 6 ***(Tesis)****.*

En toda división inexacta el residuo por defecto es la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente; Luego,

$$24 – 9x2 = 6.$$

Ahora bien; en la diferencia anterior 3 divide a 24 y a 9 por hipótesis. Si 3 divide a 9, tiene que dividir a 9x2 que es múltiplo de 9, porque hay un teorema (T. IV) que dice que todo número que divide a otro divide a sus múltiplos, y si 3 divide al minuendo 24 y al substraendo 9x2, tiene que dividir a su diferencia que es el residuo 6, porque todo número que divide *a otros divide a su diferencia; luego, 3 divide a 6, que era lo que queríamos demostrar.*

DEMOSTRACIÓN GENERAL.

Esquema abstracto del teorema

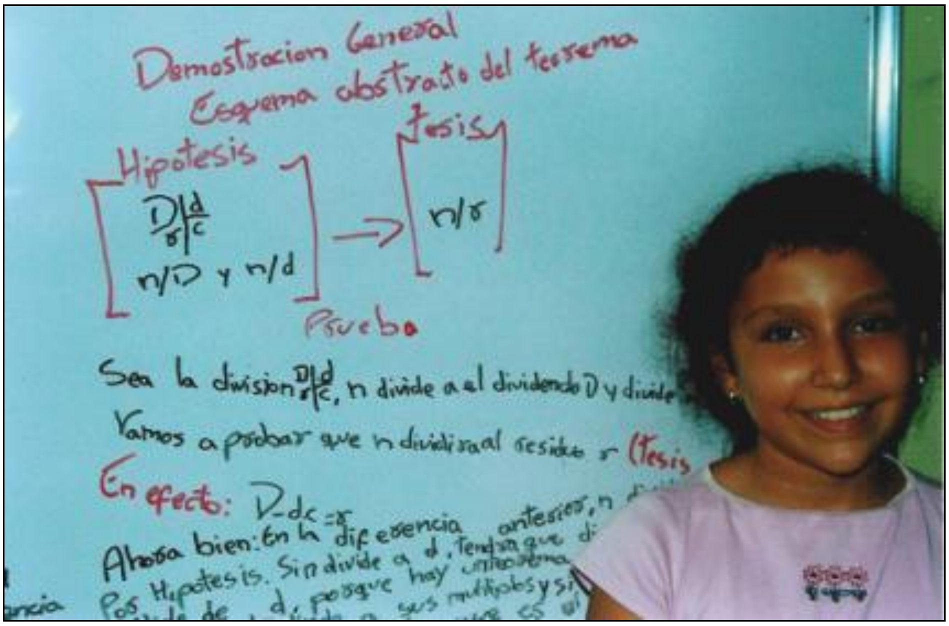
hipótesis tesis

$$\left[\begin{array}{c} \begin{array}{c|l} D & d \\ \cline{2-2} R & c \end{array} \\ n/D \text{ y } n/d \end{array}\right] \longrightarrow \left[\ n/R\ \right]$$

Sea la división $\begin{array}{c|l} D & d \\ \cline{2-2} R & c \end{array}$

El número n divide al dividendo D y al divisor d ***(Hipótesis)****.*
Vamos a probar que n divide al residuo R (Tesis).

En efecto: D – dc = R. Ahora bien, en la diferencia anterior n divide a D y a d por hipótesis. Si n divide a d tiene que dividir a dc porque todo número que divide a otro, divide a sus múltiplos y si n divide a D y a dc tiene que dividir a su diferencia, que es R, porque todo número que divide a otros dos, divide a su diferencia



TEOREMA X .

Todo número que divide al divisor y al residuo de una división inexacta, divide al dividendo.

Ejemplo: sea la división $\begin{array}{r|l} 28 & 8 \\ \hline 4 & 3 \end{array}$

Esquema concreto del teorema

hipótesis tesis

$$\left[\begin{array}{c} \begin{array}{r|l} 28 & 8 \\ \hline 4 & 3 \end{array} \\ 2/8 \text{ y } 2/4 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\; 2/28 \; \right]$$

El número 2 divide al divisor 8 y al residuo por defecto 4 (Hipótesis). Vamos a probar que 2 divide al dividendo 28 (Tesis).

En efecto: En toda división inexacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el residuo; luego,

$$28 = 8x3 + 4$$

Ahora bien, 2 divide a 8 y a 4 por hipótesis. Si 2 divide a 8, tiene que dividir a 8x3, que es múltiplo de 8, porque todo número que divide a otro, divide a sus múltiplos, y si 2 divide a 8x3 y a 4, tiene que dividir a su suma porque hay un teorema (T.I) que dice que todo número que divide a otros varios divide a su suma; luego, 2 divide a 28, que era lo que queríamos demostrar.

DEMOSTRACIÓN GENERAL

Esquema abstracto del teorema

hipótesis tesis

$$\left[\begin{array}{c} \text{Sea} \quad \begin{array}{r|l} D & d \\ \hline R & c \end{array} \\ n/d \text{ y } n/R \end{array} \right] \longrightarrow \left[\; n/D \; \right]$$

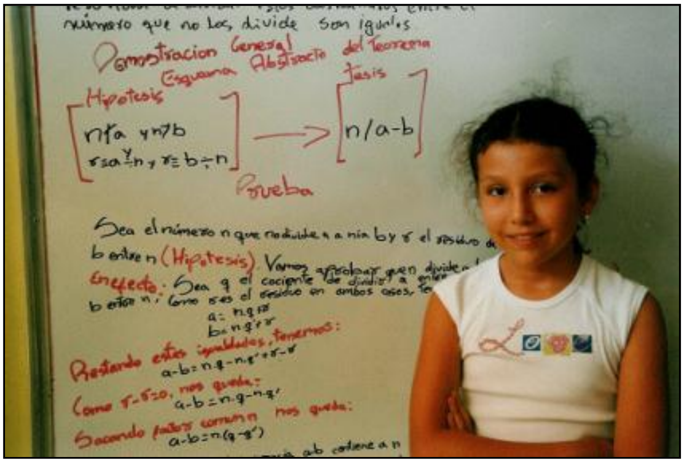
Sea la división $\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} R & c \end{array}$

Sea el número n que divide a d y a R ***(Hipótesis)****.*
Vamos a probar que n divide a D (Tesis).

En efecto: D = dc + R. Ahora bien, n divide a d y a R por hipótesis. Si n divide a d, tiene que dividir a dc porque hay un teorema que dice que todo número que divide a otro, divide a sus múltiplos, y si n divide a dc y a R, tiene que dividir a su suma, que es D, porque todo número que divide a otros dos divide a su suma (Teorema 1); luego, n divide a D, que era lo que queríamos demostrar.□

La lógica y el pensamiento analítico guían

El lector ha podido observar que todo el pensamiento matemático de este capítulo se ha manejado primero en su concreción. En esta forma de trabajo, en la que se ha utilizado la concreción como trampolín para el pensamiento abstracto, sobresalen los esquemas concreto y abstracto de los teoremas, los cuales no son otra cosa que la estructura de los teoremas. Estos esquemas tienen la función de ayudar al estudiante en la comprensión de la verdad en estudio y de guiarlo de una manera lógica y analítica en la demostración de los teoremas.

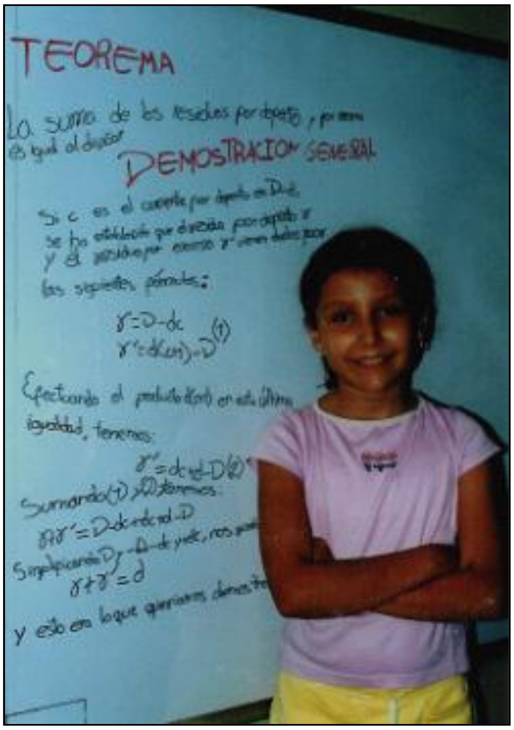


La estructura lógica de los teoremas reemplaza la organización de la tarea en la demostración de los teoremas. Aquí la organización de la actividad práctica no se hace de una manera tan explícita como en el caso de los problemas. En el teorema 1, por ejemplo, el esquema del teorema y la definición de la hipótesis constituyen la organización de la tarea, y tienen como fin orientar al pequeño en la demostración del teorema. Esto le permite al niño reconstruir de modo independiente no solamente el enunciado, sino también toda la demostración del teorema, como si se tratara de operaciones elementales de la aritmética.

Veamos cómo este esquema orienta al pequeño en la demostración del teorema 1 de tal modo que él puede realizarla de una manera fluida y sin ninguna dificultad, a pesar de que se trata de un pensamiento formal y absolutamente abstracto: Para iniciar la demostración, el pequeño mira el esquema, los objetos que va a trabajar (la hipótesis), y luego habla de lo que se propone hacer (demostrar la tesis). Él sabe muy bien en qué consiste tanto la hipótesis como la tesis, incluso lo explica en la exposición. Aclara que en el esquema abstracto los objetos que se trabajan son abstractos, mientras que en el esquema concreto los objetos son concretos, tal como 5,10,15, 20 y 10 + 15 + 20. Él sabe que la demostración la debe iniciar con la frase ‘en efecto’, mirando la definición de la hipótesis. Todo lo que sigue después de esta acción no presenta ninguna dificultad para el pequeño, la lógica y el pensamiento analítico lo guían. El único objeto que podría presentar dificultad en el manejo de su interpretación sería la igualdad $a + b + c = n(q + q' + q'')$, que corresponde al concepto de múltiplo de un número y su relación con el divisor, en caso de que este objeto abstracto no estuviese presente en el nivel de su interior evolutivo. Pero, precisamente, esto es lo que no ocurre, pues en estas demostraciones no se trabaja con ningún pensamiento abstracto que no esté desarrollado en el nivel del interior evolutivo del pequeño. Más adelante tendremos la oportunidad de ver algunas de las acciones concretas que se usaron como trampolín para desarrollar en el interior de los niños todo el pensamiento abstracto implicado en el teorema 1.

EL CONOCIMIENTO SE DESARROLLA COMO UNA ESPIRAL.

En esta sección mostraremos cómo el desarrollo avanza, no en círculo, sino en espiral, atravesando siempre el mismo punto en cada nueva revolución, mientras avanza hacia un estadio superior. Para este efecto, haremos un recorrido por todas las demostraciones de los teoremas, revisando qué nociones y operaciones están involucradas en cada una de ellas, a fin de ver cómo se mueve en su evolución este pensamiento matemático alrededor del tema de la divisibilidad. En el teorema 1, vemos la ley de uniformidad de la suma en la suma de igualdades, el factor común, las nociones de dividendo, divisor y cociente, y de cuándo un número divide a otro. En el teorema 2, aparece la negación de las nociones del teorema 1; en concreto, tenemos:



el residuo en la división inexacta, cuándo un número no divide a otro; pero vuelve a la noción de factor común y a la de cuando un número divide a otro. Tratar con la negación de un concepto no es sencillo, es algo que puede ser complicado. Esto quiere decir que el conocimiento aquí se eleva. En el teorema 3, se presentan todas las nociones de los anteriores teoremas; no hay una noción nueva, pero el enunciado es complejo. Así que la demostración en este teorema aumenta en complejidad. Es decir que aquí el conocimiento vuelve a pasar por los mismos puntos pero no de forma sencilla, o sea, no en círculo, sino, posiblemente, en forma de una curva más forzada y ascendente. En el teorema 4, tenemos las mismas nociones del teorema 1 pero considera una nueva noción, a saber, la de múltiplo de un número y su relación con el divisor. O sea que aquí el conocimiento baja más pero luego se eleva más alto. En el teorema 5, tenemos una parte de las nociones del teorema anterior pero considera una nueva, a saber, la noción de resta o diferencia. Esta noción es sencilla, está casi al nivel de la de suma; o sea que el conocimiento baja y luego se amplía. Debido a que, al final, el teorema termina con la noción de múltiplo y su relación con la división, el conocimiento, en esta demostración, vuelve a subir. En el teorema 6, se presentan todas las nociones de los anteriores teoremas. Dentro de las nuevas nociones está la del residuo por defecto que involucra la noción de división inexacta. Esta noción no es nada sencillo de manejar sobre todo si se hace desde el punto de vista teórico. Esto quiere decir que, en este teorema, el conocimiento se eleva considerablemente. En el teorema 7, no se presenta ninguna noción nueva. Los argumentos aquí manejan las nociones de suma, división exacta y diferencia. Esto quiere decir que aquí el conocimiento no se eleva sino que más bien baja. En el teorema 8 podemos apreciar un pensamiento bastante complejo. Lo interesante en este teorema es que aunque en su enunciado están implícitas todas las nociones de los anteriores teoremas; sin embargo, no las utiliza todas en la demostración.

En la demostración, llama la atención el hecho de no utilizar la negación de la división, una noción difícil de manejar, muy explícita en el enunciado del teorema. Esto indica que los pequeños no dependen del entorno o campo visual para demostrar el teorema; es decir, como en las demostraciones de los teoremas anteriores, no dependen de los métodos directos, o sea, demostración paso a paso, que corresponde a una conducta reactiva, inmediata y elemental. Aquí hacen gala del uso del método indirecto de demostración, llamado de “reducción al absurdo”. Este método que corresponde a una conducta superior en matemáticas es claramente un indicativo de desarrollo intelectual superior (específicamente humano) en este campo. Por lo tanto, el conocimiento, en este teorema, después de bajar y volver a pasar por ciertos puntos, vuelve y se eleva. En el teorema 9, se presentan las nociones de división exacta, división inexacta, dividendo, divisor, residuo por defecto, diferencia, producto, cociente, múltiplo, minuendo, substraendo, uso de principios teóricos (el teorema 4, por ejemplo). Aquí la conducta no es simple, no depende del espacio inmediato y evidente. Se ve el uso de métodos mediatos. La demostración es compleja, no consiste en simples operaciones. En los razonamientos se ve una cadena proposicional, es decir, manejo de conceptos y relaciones entre estos. Claramente, esta demostración exhibe un nivel de abstracción bastante alto en matemáticas. Debido a que se retoman nociones ya conocidas, se consideran nuevas y hay manejo de conceptos, el conocimiento, en este teorema, pensando metafóricamente, hace un giro bastante difícil hacia arriba y por lo tanto sigue avanzando en forma de espiral. En el teorema 10, tenemos las mismas nociones del teorema anterior y el mismo tipo de razonamiento, lo que quiere decir que el conocimiento aquí se mantiene al mismo nivel del anterior teorema y quizás baje un poco.

De lo concreto a lo abstracto: una transformación de cantidad en calidad

Como estos son los primeros teoremas que se demuestran, se ha hecho en cada caso una demostración con números como preparación para la demostración general con letras, la cual corresponde a un pensamiento completamente abstracto.

Veamos cuál fue el método concreto de imitación que permitió desarrollar el pensamiento abstracto implicado en el teorema 1:

Para desarrollar la idea de esta sección, a continuación mostraremos algunas de las acciones concretas que se usaron como trampolín para desarrollar el pensamiento abstracto del teorema 1 en los niños. El concepto de múltiplo de un número y su relación con el divisor es la base para desarrollar el pensamiento abstracto representado por este teorema.

La idea intuitiva de divisor de un número es que éste contiene a aquel un número exacto de veces. Ejemplo: 2 es divisor de 8 porque éste contiene 2 cuatro veces; esta idea, en matemáticas, se expresa por medio de la igualdad: 8 = *2x4.*

Para internalizar esta idea matemática, se trabajaron con los niños las siguientes expresiones:

6 = *2x3 significa que 6 contiene a 2 un número exacto de veces, 3 veces*

12 = 3x4 significa que 12 contiene a 3 un número exacto de veces, 4 veces

20 = 4x5 significa que 20 contiene a 4 un número exacto de veces, 5 veces

42 = 6x7 significa que 42 contiene a 6 un número exacto de veces, 7 veces

... generalizando ...

B = cd significa que B contiene a c un número exacto de veces, d veces

M = hK *significa que* M contiene a h *un número exacto de veces,* K *veces*

(ΣΩ) = Δ η significa que (ΣΩ) *contiene a* Δ *un número exacto de veces,* η veces.

$(a + b + c) = n(q + q' + q'')$ *significa que* $(a + b + c)$ *contiene a* n *un número exacto de veces,* $(q + q' + q'')$ *veces.*

Debido a que la frase ‘8 contiene a 2 cuatro veces’ es equivalente a la expresión ‘2 divide a 8 cuatro veces’, tenemos las siguientes equivalencias:

8 = *2x4* ↔ *2 divide a 8 cuatro veces*

6 = *2x3* ↔ *2 divide a 6 tres veces*

12 = 3x4 ↔3 divide a 12 cuatro veces

20 = 4x5 ↔ 4 divide a 20 cinco veces

42 = 6x7 ↔ 6 divide a 42 siete veces

... generalizando :

B = *cd* ↔ *c divide a B d veces*

M = hK ↔ *h divide a* M K *veces*

Ahora, trabajando cada una de estas equivalencias desde el otro lado, tenemos:

2 divide a 8 cuatro veces porque 8 = 2x4

2 divide a 6 tres veces porque 6 = 2x3

3 divide a 12 cuatro porque 12 = 3x4

4 divide a 20 cinco veces porque 20 = 4x5

6 divide a 42 siete veces porque 42 =6x7

... generalizando :

c divide a B porque existe un entero d tal que B = cd.

k divide a n porque existe un entero m tal que n = km.

ñ divide a v porque existe un entero q tal que ñ = vq

f divide a w porque existe un entero u tal que w = fu.

(a + b) *divide a* (c + d) *porque existe un entero x tal que*
(c + d) = (a + b)x

Δ *divide a* (ΣΩ) *porque existe un entero* η *tal que* (ΣΩ) = Δ η.

Podemos observar que esta concreción dio como resultado un pensamiento matemático abstracto en el pequeño. Esta concreción tenía como fin elaborar en el interior de los niños el siguiente pensamiento matemático abstracto: "un número k divide a un número n si y solo si existe un entero m tal que $n = km$." Esta idea matemática corresponde a la noción de divisor de un número. Observemos que este pensamiento abstracto tuvo su génesis y evolución desde lo concreto. En esta concreción un mismo concepto se trabaja una buena cantidad de veces y de varias formas, llegando al final al pensamiento abstracto que se quería obtener: un pensamiento cristalizado, resultado de una transformación de cantidad en calidad.

Los métodos concretos de imitación como trampolín para desarrollar el pensamiento abstracto.

Luego de trabajar esta noción matemática, la de divisor de un número, por medio de esta concreción, a los pequeños les quedó muy fácil entender todas las ideas abstractas de la demostración general del teorema. Retomemos la última parte de la demostración del teorema 1 para que el lector verifique por si mismo que esta concreción efectivamente conlleva al desarrollo del pensamiento abstracto representado por dicho teorema:

... " Sacando n vector común:

$$a + b + c = n(q + q' + q'')$$

lo que nos dice que $a + b + c$ *contiene a n un número exacto de veces,* $q + q' + q''$ *veces, o sea que n divide a la suma* $a + b + c$*, que era lo que queríamos demostrar."*

El lector que haya seguido con detenimiento el desarrollo de la concreción objeto de nuestra consideración, no importa cuál sea su background matemático, habrá entendido perfectamente esta parte de la demostración.

Observemos que en esta concreción la imitación ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de este pensamiento abstracto: Quizá la experiencia misma del lector, con la lectura de estos últimos párrafos, puede confirmar nuestra tesis. Para verificarlo, presentamos al lector la ecuación $(\Sigma\Omega) = \Delta\,\eta$ con la pregunta ¿ Qué conclusión puede sacar de esta ecuación ?. Estoy seguro que al lector le quedará fácil contestar que lo que se puede deducir de esta ecuación es que Δ *divide a* $(\Sigma\Omega)$ un número exacto de veces, n veces. Si esta es su experiencia, significa que con esta sencilla práctica el lector habrá desarrollado algo de pensamiento abstracto matemático. Antes de leer la sección anterior, el lector no tenía ni el más mínimo rasgo de pensamiento abstracto matemático. Ahora, después de estudiar el desarrollo de esa concreción, ya tiene, al menos, algo incipiente de matemática abstracta en su cerebro. Esto quiere decir que la matemática pura le es asequible.

Toda la concreción trabajada en la sección anterior, que tenía como fin obtener la definición matemática de divisor de un número, nos ilustra acerca del hecho de que los estudiantes no pueden elaborar por sí solos formas de pensamiento abstracto matemático. Sin esta concreción, trabajada mediante la imitación, hubiera sido imposible desarrollar este pensamiento abstracto en los niños. También nos ilustra acerca de que por medio de la imitación los niños acceden a la vida social de los adultos (al pensamiento abstracto), al ayudarles a desarrollar en su interior aquello de lo que carecen intrínsecamente en su desarrollo.

Así, pues, podemos ver que el pensamiento abstracto es producto de la integración del lenguaje y el pensamiento práctico en el curso del desarrollo, y que el pensamiento técnico es tan solo el comienzo del desarrollo cognoscitivo. Esto concuerda con el importante principio evolutivo que estableció K. Buhler de que los inicios del lenguaje inteligente están precedidos por el pensamiento técnico, y este comprende la fase inicial del desarrollo cognoscitivo. Y esto es lo que hemos visto en el desarrollo de la concreción que nos llevó a la definición matemática de divisor de un número.

• *La concreción es necesaria e inevitable, pero únicamente como trampolín para desarrollar el pensamiento abstracto, como medio, no como fin en sí misma.*

Es un hecho universal que la enseñanza de las matemáticas en las escuelas se queda en la concreción; el aspecto abstracto o formal se deja para la universidad. Así pues es necesario que en las escuelas se observe un cambio favorable tendente a alejarse de esta práctica de limitarse únicamente al pensamiento concreto, y a situar en su correspondiente lugar a los métodos de imitación. El uso de métodos concretos de imitación es necesario e inevitable, pero únicamente como trampolín para desarrollar el pensamiento abstracto, como medio, no como fin en sí mismo. Si no hay desarrollo de pensamiento abstracto o formal en un campo específico del conocimiento, no hay desarrollo intelectual superior en ese campo.

• *Mediante ZDP's el desarrollo avanza muy rápido en los pequeños.*

Se puede ver que con este método de la zona de desarrollo próximo [ayuda de un adulto + imitación], el desarrollo avanza muy rápido. Normalmente, los estudiantes tienen que esperar a llegar a la universidad para poder desarrollar pensamiento formal en matemáticas; incluso, en esta etapa, un estudiante tiene muchos problemas para trabajar con el pensamiento abstracto, y se puede decir que son muy pocos los estudiantes de la carrera de matemáticas que pueden desarrollar pensamiento matemático formal desde los primeros semestres de su carrera.

• *Por medio del método de la zona de desarrollo próximo, un instrumento que nos permite comprender el curso interno del desarrollo, podemos elaborar hoy las dimensiones del aprendizaje de lo que queremos ser mañana.*

Este capítulo hemos tenido la oportunidad de verificar experimentalmente que es posible acceder al pensamiento abstracto matemático aun desde la escuela primaria. Hemos visto que lo que un estudiante universitario normal puede aprender con la ayuda de los profesores en los primeros semestres de su carrera, estos niños ya lo han logrado con seis años de anticipación; lo que quiere decir que cuando lleguen a esa etapa de su vida, ellos podrán aprender con mucha facilidad y de modo independiente lo que los estudiantes de la actualidad aprenden difícilmente con la ayuda de los profesores. Esto ilustra fehacientemente que lo que se encuentra hoy en la zona de desarrollo próximo, será mañana el nivel real de desarrollo: lo que un niño es capaz de hacer hoy con la ayuda de alguien, mañana podrá hacerlo por sí solo.

«Capullos » o «Flores» del desarrollo de pensamiento formal matemático.

En esta exhibición de pensamiento matemático de los niños Santiago y Daniela, podemos ver desarrollo de procesos de deducción, comprensión, evolución de nociones, dominio de formas lógicas de pensamiento, lógica abstracta y reconstrucción de demostración de teoremas, memoria lógica, memoria analítica, pensamiento abstracto, pensamiento teórico; todos ellos producidos no por sí solos, sino por influencia del aprendizaje escolar a través del método de la zona de desarrollo próximo.

A pesar de que la matemática exhibida en este capítulo es rica en pensamiento abstracto, hay que decir que los niños no tienen dominio de este pensamiento; en otras palabras, que ellos no pueden resolver de modo independiente cualquier problema que se les plantee sobre el tema de la divisibilidad. El hecho de que tengan pensamiento abstracto alrededor de este tema, pero no su dominio absoluto, significa que ellos no han alcanzado su desarrollo pleno. A continuación presentamos dos tipos de problemas que nos pueden ilustrar acerca de dos niveles de desarrollo que es necesario distinguir en la zona de desarrollo próximo, a saber: por un lado, los capullos o flores del desarrollo, y por otro, los frutos del desarrollo.

PROBLEMA TIPO 1

¿Divide 3 a 19 y 21? ¿Dividirá a 40? ¿Por qué?

Solución:

$$19 + 21 = 40$$

3 no divide a 19 pero 3 sí divide a 21. Por lo tanto, 3 no divide 40, porque hay un teorema que dice que todo número que divide a uno de dos sumandos y no divide al otro, no divide a la suma.

PROBLEMA TIPO 2

“Si el divisor y el resto de una división inexacta son múltiplos de 5, ¿qué ha de ser el dividendo? ¿Por qué?

Solución:

Si en una división inexacta D es el dividendo, d el divisor, q el cociente y r el residuo, entonces

$$D = dq + r \qquad (1)$$

Como, según los datos del problema, el divisor y el resto son múltiplos de 5, entonces Tenemos que

$$d = 5n \ \text{ y } \ r = 5m, \ \text{ para algunos enteros } n \text{ y } m.$$

Reemplazando estos valores para d y r en (1), tenemos :

$$D = 5nq + 5m$$

Sacando factor común 5 en esta última igualdad, nos queda:

$$D = 5(nq + m)$$

Esta igualdad significa que el dividendo D contiene a 5 un número exacto de veces, *(nq + m) veces; luego, el dividendo D es múltiplo de 5.*

Los niños son capaces de resolver problemas del tipo1 de modo independiente, aunque inicialmente necesiten un poco de entrenamiento. Sin embargo, con relación a problemas del tipo 2 los niños no los pueden resolver de modo independiente, aunque el desarrollo de su solución la entienden perfectamente y la pueden reconstruir fluidamente de modo independiente. En ambos tipos de problemas hay desarrollo; por ejemplo, en el tipo 1 hay pensamiento teórico, aunque muy elemental; pero es evidente que en el tipo 2 el desarrollo es incomparablemente mayor. En este problema, además de procesos de deducción y pensamiento teórico, hay lenguaje formal, y por lo tanto, dominio de pensamiento abstracto.

Desde el punto de vista de la zona de desarrollo próximo, este dominio de pensamiento abstracto, en el tema de la divisibilidad, corresponde a los frutos del desarrollo. Es normal que los niños no puedan resolver este tipo de problemas de modo independiente. Aunque toda la matemática expuesta en este capítulo la han realizado de modo independiente, sin embargo ellos no pueden resolver cualquier problema, especialmente los que estén relacionados con el pensamiento abstracto, debido a que las funciones para trabajar con estos objetos abstractos todavía no han madurado.

Por medio de estos dos tipos de problemas podemos visualizar, con respecto a una materia específica de estudio, las funciones que todavía no han madurado, pero que se hallan en proceso de maduración, funciones que en un mañana próximo alcanzarán su madurez y que ahora se encuentran en estado embrionario. También podemos ver a través de estos problemas que lo que los niños tienen ahora, con respecto a este pensamiento de la divisibilidad, no son los frutos, sino los capullos y las flores del desarrollo. Ciertamente, ellos han desarrollado en su interior evolutivo pensamiento abstracto, pero hasta el nivel de capullos y flores del desarrollo.

Los egresados de la licenciatura en matemáticas de la Universidad de la Amazonia no alcanzan a desarrollar pensamiento matemático ni siquiera al nivel de capullos o flores del desarrollo.

Es un hecho que los estudiantes de las licenciaturas en matemáticas en el país carecen del pensamiento matemático exhibido en este capítulo. Se puede decir que la causa está en la ausencia de una metodología que ayude a los estudiantes a desarrollar pensamiento abstracto desde los primeros semestres de universidad.

Los profesores creen que el pensamiento abstracto es algo que se debe desarrollar por si solo sin influencia del aprendizaje escolar, y que es cuestión de tener aptitudes para ello. Los profesores exigimos de los estudiantes resultados a nivel de pensamiento formal matemático, pero no nos esforzamos en ayudarles a que ellos lo desarrollen en el interior de su nivel evolutivo. Este pensamiento tiene sus raíces en la idea de que el pensamiento abstracto se logra con esfuerzo, a través de mucha dedicación. En mi práctica docente, todos mis esfuerzos se centraban en que el estudiante entendiera las explicaciones, que asimilara los conceptos; pero no en ayudarles a internalizar y desarrollar lo que les enseñaba. Sabía que no era suficiente con entender la demostración de los teoremas, sino que era necesario reconstruirla, y eso se lo predicaba a los estudiantes, pero no les enseñaba a hacerlo. Todo lo relacionado con el pensamiento abstracto no es un asunto de esfuerzo, sino de desarrollo. Esto explica el por qué de la ausencia total de desarrollo de pensamiento abstracto matemático en los escolares, incluso, en los estudiantes de las licenciaturas en matemáticas; al menos, es lo que sucede con los estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas y Física de la Universidad de la Amazonia. A ellos les queda muy difícil, prácticamente imposible, reconstruir de modo independiente las demostraciones de teoremas, incluso, muchísimos no son capaces de escribir en el tablero una definición sin antes mirar en el libro varias veces. Esto sucede no solo con los estudiantes de primeros semestres, sino también con estudiantes de últimos semestres. Esta experiencia la tuve muchas veces con estudiantes de análisis matemático del séptimo semestre cada vez que dictaba esta materia. Esto se debe a que, en la carrera, el pensamiento abstracto matemático existe como exigencia más no como oportunidad para desarrollarlo. El estudio de la matemática en la licenciatura se limita a la concreción, a la parte operativa, al pensamiento técnico. El cálculo, por ejemplo, se maneja únicamente en su aspecto algebraico, separado completamente del lenguaje. Esto explica la carencia de pensamiento formal matemático en los estudiantes. Es claro que si se separa la parte operativa del lenguaje en el cálculo matemático, éste queda reducido al álgebra, al pensamiento técnico, a las operaciones elementales, dejando así a los estudiantes sin aprendizaje y por lo tanto sin desarrollo.

El desarrollo en matemáticas descrito en el párrafo precedente nos da una idea gráfica del perfil matemático de los egresados de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de la Amazonía. Debido a que la mayoría absoluta de los profesores de matemáticas de la universidad son egresados de esta licenciatura y que la mayoría absoluta de esta mayoría no han hecho especialización ni maestría en matemáticas, se puede afirmar categóricamente que la mayoría de los profesores de la Licenciatura de Matemáticas y Física de la Universidad de la Amazonía también carece de manera absoluta de desarrollo intelectual en matemáticas.

La independencia de la inteligencia práctica del lenguaje es la causa de la falta de desarrollo intelectual en los estudiantes de matemáticas.

Tradicionalmente, en la matemática, siempre se ha trabajado la parte operativa independiente del lenguaje. Esta cultura de la incultura matemática [contracultura] ha sido sostenida por el análisis que postula la independencia de la acción inteligente del lenguaje del pensamiento práctico en el curso del desarrollo. También ha influido en esta tradición la creencia de que procesos tales como la deducción y la comprensión, la evolución de nociones acerca del mundo y de la materia que estudia, la interpretación de la causalidad física y el dominio de formas lógicas de pensamiento y lógica abstracta se producen por sí solos, sin influencia alguna del aprendizaje escolar. Tanto los estudiosos de la historia natural de la inteligencia práctica como los psicólogos interesados en el estudio del desarrollo de los procesos simbólicos en el niño han tratado el estudio de la utilización de instrumentos, al margen del empleo de signos. El origen y desarrollo del lenguaje, así como de todas las otras actividades que utilizan signos han sido tratados al margen de la organización de la actividad práctica en el niño. Los psicólogos prefirieron estudiar el desarrollo del empleo de signos como un ejemplo de intelecto puro y no como producto de la historia evolutiva del niño. A menudo atribuían el uso de signos al descubrimiento espontáneo por parte del niño de la relación entre los signos y sus significados. Tal como sostenía W. Stern, el reconocimiento de que los signos verbales poseen un significado constituye " el mayor descubrimiento en la vida del niño". Numerosos autores sitúan este feliz “momento” en el paso del año a los dos años de vida, y lo consideran como el producto de la actividad mental del niño. Un examen detallado del desarrollo del lenguaje y de otras formas del uso de signos se estimó innecesario. Sin embargo, habitualmente se ha supuesto que la mente del pequeño contiene todos los estadios del futuro desarrollo intelectual; éstos existen en su forma completa, a la espera del momento adecuado para hacer su aparición. No sólo se pensaba que el lenguaje y la inteligencia práctica tenían distinto origen, sino que se consideraba que su participación en operaciones comunes no poseía ninguna importancia psicológica básica. Incluso cuando el lenguaje y el empleo de instrumentos estaban íntimamente ligados en una operación, se estudiaban como procesos separados pertenecientes a dos clases completamente distintas de fenómenos. Como mucho, su aparición simultánea se consideraba como una consecuencia accidental de factores externos. Aquellos que se dedican al estudio de la inteligencia práctica, así como los que estudian el desarrollo del lenguaje, a menudo no logran vislumbrar la interrelación de estas dos funciones. En consecuencia, la conducta adaptativa de los niños y la actividad de utilizar signos [el lenguaje] se tratan como fenómenos paralelos; este punto de vista nos lleva al concepto de Piaget de lenguaje “egocéntrico”. Este no atribuía al lenguaje un papel importante en la organización de las actividades del pequeño, ni subrayaba sus funciones comunicativas, aunque se viera obligado a admitir su importancia práctica. *Aunque la inteligencia práctica y el uso de los signos puedan operar independientemente la una del otro en los niños pequeños, la unidad dialéctica de estos sistemas en el ser humano adulto es la esencia de la conducta humana compleja.*□