EL ELD Y LA PROBLEMÁTICA FILOSOFICA - COGNITIVA DE CÓMO UN SUJETO CONOCE.

El alumno interesa como un sujeto que conoce; es decir, que desarrolla actos de razonamiento propios. Pero cómo asegurarnos que el estudiante trascienda la impresión inmediata de las cosas, que los objetos estudiados queden registrados en su horizonte cognitivo, que tenga la capacidad de dirigir su atención de un modo dinámico y pueda captar cambios en su situación inmediata desde el punto de vista de actividades pasadas, al igual que sea capaz de actuar en el presente desde el punto de vista del futuro.

Según la definición de cómo un sujeto conoce, "el camino para desarrollar pensamiento matemático o recrear pensamiento matemático no es por la vía de actos de transmisión externa al alumno, sino por la de ponerlo a funcionar mas hacia una línea de razonamiento que despliegue actos de razonamiento. El sujeto conoce no necesariamente con una estrategia de transmisión de conocimiento; no necesariamente por medio de esta actividad nos aseguramos de que haya en ese sujeto cognitivo un acto de razonamiento; de pronto hay simplemente una percepción muy externa de un objeto, pero no una apropiación de manera que ese objeto quede ya grabado, registrado de por vida en una cultura; como las famosas experiencias que hacemos de que los estudiantes son muy buenos para percibir en determinadas épocas ciertos conceptos, pero una vez salen de ese sitio de experiencia olvidan, porque eso no quedó registrado en su horizonte cognitivo, puesto que la experiencia no fue de actos de razonamiento con este objeto matemático, sino de actos de transmisión externa a él, en los cuales simplemente le bastó percibir ese objeto, manipularlo en su externabilidad, pero no interiorizarlo en su conciencia." (ARBOLEDA, Luis Carlos. Florencia, 1999).

Lo anteriormente expuesto revela claramente dos necesidades urgentes en el proceso de enseñanza de la matemática. Una tiene que ver con una manera que ayude al estudiante, lo estimule y oriente para que despliegue actos de razonamiento propios; y la otra, para que pueda internalizar el conocimiento.

Ambas necesidades las satisface el ELD. El despliegue de actos propios de razonamiento se ve claramente debido a que, en primer lugar, el ELD puede transformar un objeto matemático en un razonamiento. Veamos esto en la práctica.

Tomemos el teorema ‘ Si $a<b$ y $c<0$ entonces $ac>bc$’. El ELD convierte este teorema en el razonamiento:

$$\begin{array}{ll} a < b & \text{P} \\ c < 0 & \text{P} \\ \therefore\ ac > bc & \text{conclusión} \end{array}$$

De esta manera, demostrar el teorema es entonces demostrar que su correspondiente razonamiento es válido.

Veamos como un estudiante trabaja este objeto matemático con la ayuda del ELD.

El inicia su labor dividiendo la tarea en dos partes: primero organiza su actividad práctica y luego lleva a cabo la demostración.

I. ORGANIZACION DE LA ACTIVIDAD PRACTICA.

1. Interpretación.

Lo que este teorema quiere decir es que el razonamiento:

$$\begin{array}{l} a < b \\ c < 0 \\ \therefore\ ac > bc \end{array}$$

es válido.

Por lo tanto, demostrar el teorema es lo mismo que demostrar que el razonamiento es válido; es decir que la conclusión $ac > bc$ se deduce lógicamente de las premisas $a < b$ y $c < 0$. Esto se plantea de la siguiente manera:

Demostrar $ac > bc$

$$\begin{array}{ll} (1)\ \ a < b & \text{P} \\ (2)\ \ c < 0 & \text{P} \end{array}$$

Este esquema es lo que denominamos El ELD (esquema lógico de demostración). El paso siguiente, en la organización de la actividad práctica, es la demostración de la validez del razonamiento, desarrollando este esquema.

2.

ELD

Demostrar ac > bc

traducción $ac - bc \in \Re^+$

(1)	**$a < b$**	**P**
(2)	**$c < 0$**	**P**
(3)	$b - a \in \Re^+$	traducción de (1)
(4)	$c \neq 0$	consecuencia de (2)
(5)	$c \neq 0 \rightarrow c \in \Re^+ \vee -c \in \Re^+$	Axioma 8
(6)	$c \in \Re^+ \vee -c \in \Re^+$	pp 4,5
(7)	$\neg(c \in \Re^+)$	Traducción (2)
(8)	$-c \in \Re^+$	TP 6,7
(9)	$(b-a)(-c) \in \Re^+$	(3),(8), Axioma 7
(10)	$(b-a)(-c) = ac - bc$	P
(11)	$ac - bc \in \Re^+$	I 9,10
(12)	$ac > bc$	Traducción de (11)

Con esto se termina la organización de la actividad práctica. Lo que sigue es traducir esta demostración realizada en lenguaje lógico por medio del ELD al lenguaje del cálculo.

II DEMOSTRACION EN LENGUAJE FORMAL CON LA AYUDA DEL ELD.

(Llamamos lenguaje formal al lenguaje objeto de la teoría).

(1)(2) sean a, b, y c reales tales que $a < b$ y $c < 0$; **(3)** por definición de orden, $b - a > 0$ **(4)(5)(6)(7)(8)**. Como $c \neq 0$ y no positivo, por el axioma 8, se tiene que $-c > 0$. **(9)** Por el axioma 7 se deduce $(b - a)(-c) > 0$. **(10)** Pero $(b - a)(-c) = ac - bc$. **(11)** Luego $ac - bc > 0$; **(12)** es decir, $ac > bc$.

Los números entre paréntesis indican la traducción directa del lenguaje lógico en el ELD al lenguaje del cálculo. Lo escrito después de la secuencia (4)(5)(6)(7)(8) es un ejemplo de cómo empieza a darse el desarrollo de procesos superiores, de razonamientos mediatos; y de cómo, desde los primeros estadios con el ELD, se empiezan a ejercitar adecuadamente los 'músculos' del razonamiento matemático. Por último, el estudiante reconstruye la demostración del teorema sin la guía del ELD.

III DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL SIN LA AYUDA DEL ELD

Después que el estudiante ha realizado la demostración formal con la ayuda del ELD, deja a un lado todo lo que ha hecho e inicia de nuevo la demostración del teorema de modo completamente independiente, quedando la demostración de la siguiente manera:

Sean a, b, y c reales tales que $a < b$ y $c < 0$; por definición de orden, se tiene $b- a > 0$. Como $c \neq 0$ y no positivo, por el axioma 8, $- c > 0$. Por el axioma 7, $(b-a) (-c) >0$. Pero $(b-a) (-c) = ac - bc$. Luego $ac - bc > 0$; es decir, $ac > bc$.

En el despliegue de acciones cognitivas que se dan en el ELD podemos ver tanto procesos elementales como superiores.

Los razonamientos inmediatos que se dan son :

$$\{(1),(3),\}, \{ (2), (4)\}, \{(2), (7)\}, \{(11), (12)\}$$

Las funciones psicológicas que provocan estas acciones son elementales, puesto que están directa y totalmente determinadas por los estímulos del entorno.

El entorno esta constituido por el conjunto de premisas {(1), (2)}. Los estímulos son los significados de (1) y (2). Por ejemplo, (3) es el resultado de preguntarse por el significado de (1), y (4) es el resultado de preguntarse qué significa (2)

Los razonamientos mediatos son:

$$\{(4),(5),(6)\}, \{(6),(7),(8)\}, \{(3),(8),(9)\}, \{(9),(10),(11)\}.$$

Las funciones psicológicas que provocan estos razonamientos son superiores puesto que la estimulación es autogenerada; los estímulos que causan de forma inmediata estas acciones son artificiales. El artificio consiste en expresar en forma lógica los objetos que emergen a la conciencia cuando son evocados por la ley de las premisas. Por ejemplo, en la línea (5), el axioma 8, que dice que todo número diferente de cero es mayor o menor que cero, se expresa en la forma lógica

$$c \neq 0 \rightarrow c \in \Re^{+} \vee - c \in \Re^{+},$$

que al asociarla con $c \neq 0$ de la línea (4), y aplicando la regla de inferencia modus ponendo ponens, se obtiene de manera inmediata la fórmula

$$c \ \Re^{+} \ \vee \ - c \in \Re^{+}.$$

Igual ocurre en el segundo razonamiento donde la elaboración del estímulo consiste en expresar la premisa $c < 0$ en la fórmula lógica $\neg(c \in \Re^{+})$ y relacionarla con la expresión $c \in \Re^{+} \vee - c \in \Re^{+}$ de la línea (6) para obtener de forma inmediata, por la regla modus tollendo ponens, la proposición $- c \in \Re^{+}$.

Se observa cómo el entorno se va extendiendo a medida que van emergiendo a la conciencia los axiomas, los hechos de la teoría (que se marcan con la letra P como en las líneas (9) y (10)) y se van obteniendo las subsiquientes deducciones. Al final del proceso en el ELD queda exhibido el background suficiente y necesario para escribir la demostración del teorema en el lenguaje formal. Todas las operaciones lógicas en el ELD son directas y los procesos son elementales. Todo salta a la vista; entonces lo que queda es traducir al lenguaje objeto de la teoría todas las cosas que se ven, las acciones inteligentes y excelentes exhibidas en este campo temporal de acción. En esta transición del ELD al lenguaje objeto de la teoría se llevan a cabo otros procesos como el de desarrollo de lenguaje matemático, elaboración de pensamiento abstracto matemático, ejercicios de 'estiramiento muscular' en el razonamiento lógico, y desarrollo de capacidad de síntesis como, por ejemplo, cuando las proposiciones (5)(6)(7)(8) se sintetizan o traducen en una sola al lenguaje objeto de la teoría. Expresados todos los objetos que emergen a la conciencia en formas lógicas, lo que sigue es una actividad mecánica o de acciones automáticas reguladas por las leyes de inferencia proposicional internalizadas en el estudiante.

Un tema básico y de gran importancia que surge en este análisis es el de la internalización del conocimiento. Por ejemplo, si el axioma 8 no hubiera estado registrado en el horizonte cognitivo del estudiante, el proceso se habría detenido en el paso (5). Esto habla, entonces, del papel crucial que desempeña la internalización del conocimiento externo en el desarrollo del lenguaje y pensamiento matemático. También es importante hacer notar el papel que desempeña el lenguaje lógico en la organización de la actividad matemática. En general, el lenguaje desempeña un papel esencial en la organización de las funciones psicológicas superiores y contribuye de modo significativo al desarrollo de una nueva organización estructural de actividad práctica.

En el análisis psicológico anterior podemos ver al ELD como un campo de acción temporal en el cual la lógica matemática desempeña un papel importante en la organización de las funciones psicológicas superiores, y donde el lenguaje junto con la actividad simbólica se incorpora a cada acción para producir la convergencia del lenguaje y la actividad práctica, el momento más significativo en el desarrollo intelectual matemático.

También se pueden apreciar de manera muy clara las siguientes tesis:

"El importante principio evolutivo que estableció K. Buhler de que los inicios del lenguaje inteligente están precedidos por el pensamiento técnico, y este comprende la fase inicial del desarrollo cognoscitivo". En el ELD lo primero que se observa son unas operaciones con fórmulas lógicas (Esto es pensamiento técnico). Pero estas operaciones lógicas son al mismo tiempo un lenguaje que expresan todo un conocimiento. Se ve claramente que este conocimiento es el resultado de la convergencia de la actividad práctica y el lenguaje, dos líneas de desarrollo que tradicionalmente han andado independientemente la una de la otra. Está claro que esta independencia de la actividad práctica del lenguaje es la causa del no desarrollo intelectual superior de los estudiantes en Matemáticas.

Aunque la actividad práctica (pensamiento técnico) y el lenguaje puedan operar independientemente el uno del otro en el estudiante de matemáticas, la unidad dialéctica de estos dos sistemas es la esencia de la conducta compleja del matemático. Si el estudiante toma en cuenta únicamente la demostración sin la ayuda del ELD, él encontrará la demostración muy compleja. Pero si primero trabaja la demostración con la ayuda del ELD, podrá luego reconstruirla de modo independiente y con mucha facilidad. Trabajar teoremas de esta forma puede llevar al estudiante a desarrollar pensamiento formal matemático a un punto tal que él pueda hacer demostraciones formales de modo independiente y sin la ayuda del ELD.

Se observa también cómo la actividad simbólica posee una específica función organizadora que se introduce en el uso del ELD y produce nuevas formas de comportamiento en el estudiante de matemáticas.

A diferencia de lo que ocurre con el formalismo, con el ELD no sucede la separación entre presentación estética, conocimiento y comunicación. Lo primero que impresiona de la actividad matemática es la exhibición, por parte del estudiante que trabaja con el ELD, de los tres aspectos que determinan la naturaleza de la matemática: arte, ciencia y lenguaje.

Como conclusión final podemos decir que el ELD se constituye en una herramienta adecuada y práctica que le permitirá al educador matemático desempeñar eficientemente su oficio, ya que le ayudará en su empeño de orientar al alumno para que en él se produzcan los actos de razonamiento propios que le permitan desarrollar pensamiento matemático o recrear pensamiento matemático.