EL ELD Y LA METÁFORA DEL ALTER EGO

La interacción maestro – alumno, mediada por el ELD, produce el proceso "imitativo" (Vygotski) o de " transmisión de individuo a individuo" (Leontiev) y tiene como resultado un isomorfismo entre E (el emisor) y P (el perceptor), indicado por

$$E \cong P,$$

que preserva tanto sus formas de conducta como de su pensamiento.

En el contexto del esquema de comunicación alternativa se observará que, en relación con la matemática, no hay diferencia entre E y P tanto en el hacer como en el ser. Esto es, el hacer matemáticas de P es exactamente el mismo de E. Matemáticamente hablando, P expresa a E. P piensa, habla y escribe la mismas cosas y con la misma seguridad, claridad, fluidez, precisión, exactitud y elegancia que E (ver videos *capullos y flores amazónicos de pensamiento lógico y matemático*).

Hablando metafóricamente, podemos decir que E con la ayuda del ELD ha transformado a P en su otro Yo. De ahí que el ELD puede considerarse como el operador

$$P \xrightarrow{\text{ELD}} \text{Alt } E$$

que toma a P y lo transforma en el Alter Ego de E. En la economía eterna de Dios se diría que E con la ayuda del ELD conforma a P a su propia imagen y semejanza.

La imagen hace referencia al pensamiento y sus formas, y la semejanza a la conducta y sus formas.

Puesto que P y E no son individuos sino una colectividad, se puede concluir que el ELD es una herramienta muy útil y práctica para producir inteligencia corporativa o matemáticos en serie.

Todo lo anteriormente planteado quedará completamente ilustrado con la demostración del siguiente teorema por estudiantes de cálculo I de la Licenciatura de Matemáticas y Física de la Universidad de la Amazonía, exposición que podemos encontrar en los videos ”Capullos y Flores de las primeras semillas de pensamiento matemático sembradas con la ayuda del ELD en el terreno de la zona de desarrollo próximo”.

TEOREMA DE BOLZANO

Sea f una función continua en cada punto de un intervalo $[a,b]$ y suponga que *f*(*a*) y *f*(*b*) tienen signos contrarios. Entonces existe por lo menos un c en el intervalo abierto (*a* ,*b*) tal que f(*c*)=0

I ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

1. Interpretación

(a) El teorema quiere decir que el razonamiento:

(1) f es continua en un intervalo $[a,b]$
(2) $f(a)$ y f(b) tienen signos contrarios
$\triangleright$ $\exists c \in (a,b)$: f(c)=0

es válido.

(b) gráficamente:

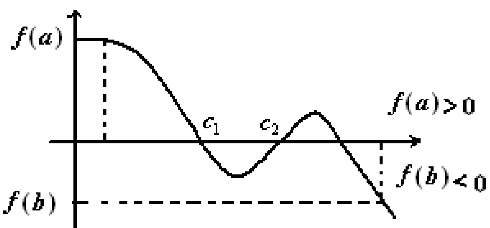


Fig. 1

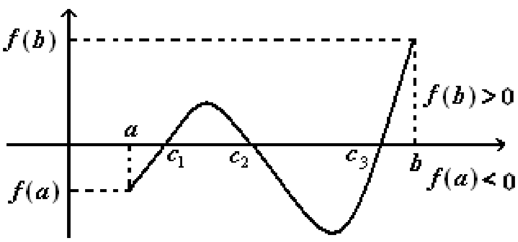
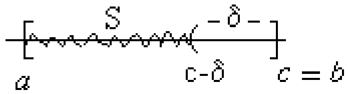


Fig. 2

2. **ELD**

Demostrar $\exists c \in (a,b)$ **: f(c)=0**

(1)	***f* continua en** $[a,b]$	**P**
(2)	***f*(*a*) y *f*(*b*) tienen signos contrarios**	**P**
(3)	$(f(a)>0 \wedge f(b)<0) \vee (f(a)<0 \wedge f(b)>0)$	traducción 2
(4)	$f(a)<0 \wedge f(b)>0$	P (ver Fig. 2)
(5)	$S=\{\ x\in[a,b] / f(x) \leq 0\ \}$	P
(6)	$x \in S \leftrightarrow f(x) \leq 0$	traducción 5
(7)	$f(a) \leq 0 \rightarrow a \in S$	a/x, LB 6
(8)	$f(a)<0$	S4
(9)	$f(a)<0 \vee f(a)=0$	LA 8
(10)	$f(a) \leq 0$	traducción 9
(11)	$a \in S$	PP 7, 10
(12)	$S \neq \emptyset$	consecuencia de 11
(13)	$S \subseteq [a,b]$	5, 12
(14)	S es acotado superiormente	13
(15)	S tiene supremo	14, Axioma 10
(16)	$\exists c \in \Re : c = \text{Sup}\, S \wedge c \leq b$	13, traducción 15
(17)	probaremos que $f(c) = 0$	
(18)	$f(c) > 0 \vee f(c) < 0 \vee f(c) = 0$	P Ley tricotomía
(19)	**f(c)> 0**	**P**
(20)	f continua en $c \wedge f(c) \neq 0 \Rightarrow f$ tiene el mismo signo que $f(c)$ en $(c-\delta, c+\delta)$	P (Teo. Preservación del signo)
(21)	f continúa en $c \wedge f(c) \neq 0$	A 1, 19
(22)	f tiene el mismo signo que $f(c)$ en $(c-\delta, c+\delta)$	PP 20, 21
(23)	$\exists(c-\delta, c+\delta)$ en el que $f(x)> 0$	19, 22
(24)	$f(x)> 0$ en $(c-\delta, c]$ si $c= b$	Fig. 2 16, 23
(25)	No existen x: $x \in S \wedge x \in (c-\delta, c]$	24, 6
(26)		traducción 25
(27)	$c-\delta$ es una cota superior de S	traducción 26
(28)	$c-\delta < c$	P (evidente)
(29)	$c \neq$ Sup S; c no es la mínima	27, 28
(30)	$c = \sup S \wedge c \neq \text{Sup } S$	A 16, 29
(31)	f(c) > 0 no es posible	RAA 19, 30
(32)	**f(c)< 0**	**P**
(33)	f y $f(c)$ tienen el mismo signo en $(c-\delta, c+\delta)$	1,32, 21,20

(34)	$f(x) < 0$ para $x \in [c, c+\delta)$ si $c = a$	32,33
(35)	$f(x) < 0 \wedge x > c \wedge x \in S$	34, 5
(36)		traducción 35
(37)	$c \neq \text{Sup } S$	36
(38)	$c = \text{Sup } S \wedge c \neq \text{Sup } S$	A 16, 37
(39)	$f(c) < 0$ no es posible	RAA 32,38
(40)	$\neg(f(c) > 0) \wedge \neg(f(c) < 0)$	A31,39
(41)	$\neg(f(c) > 0 \vee f(c) < 0)$	DL 40
(42)	$f(c) = 0$	TP 18,41

DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL CON LA AYUDA DEL ELD

(1)(2)(3)(4) Para ser específicos, supongamos que

$$f(a) < 0 \text{ y } f(b) > 0, \qquad \textbf{(I)}$$

como se muestra en la gráfica 2. Pueden haber muchos valores de x entre a y b tales que $f(x) = 0$. Nuestro problema es encontrar uno. Haremos esto encontrando el valor mas grande de x para el cual $f(x) = 0$. **(5)** Para este propósito, sea S el conjunto de todos los puntos x en el intervalo $[a, b]$ para los cuales $f(x) \leq 0$. **(6)(7)(8)(9)(10)(11)** Existe por lo menos un punto en S ya que $f(a) < 0$. **(12)** Por lo tanto S es un conjunto diferente de vacío. **(13)(14)(15)(16)** También, S está acotado superiormente ya que todo S está en [a,b], de manera que S tiene supremo.

$$\text{Sea } c = \sup S \qquad \textbf{(II)}$$

(17) Entonces probaremos que $f(c) = 0$ **(18)** Puesto que $f(c)$ es un número, hay solamente tres posibilidades:

$$f(c) > 0,\ f(c) < 0, \text{ y } f(c) = 0$$

(19)(20)(21)(22)(23)(24). Si $f(c) > 0$, por **(I)** y debido a que f es continua en c, entonces, por el teorema que preserva el signo de funciones continuas, existe un intervalo $(c-\delta, c+\delta)$ o $(c-\delta, c]$ si $c = b$, en el cual f es positiva. **(6) (25)** Por lo tanto no existen puntos de S que estén a la derecha de $c-\delta$, **(26)(27)** lo cual quiere decir que $c-\delta$ es una cota superior de S. **(28)(29)(30)**

Pero c-$\delta < c$ y, según **(II),** c es la mínima cota superior de S. **(31)** Por lo tanto la desigualdad $f(c) > 0$ es imposible.

(32)(33)(34) Ahora si $f(c) < 0$, utilizando nuevamente el teorema que preserva el signo de funciones continuas, podemos afirmar que existe un intervalo $(c-\delta, c+\delta)$ o $[c, c+\delta)$ si c = a, en el que f es negativa. **(35)(36)(37)(38)** Es decir que $f(x) < 0$ para algún $x > c$, contradiciendo el hecho de que c es una cota superior de S. **(39)** Por lo tanto, $f(c) < 0$ también es imposible. **(40)(41)(42)** De esta manera la única posibilidad que queda es $f(c) = 0$. También tenemos $a <$ c $< b$ porque $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Esto prueba el teorema de Bolzano.

DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL CON LA AYUDA DEL ELD

Para ser específicos, supongamos que

$$f(a) < 0 \text{ y } f(b) > 0 \qquad \textbf{(I)}$$

como se muestra en la gráfica 2. Pueden haber muchos valores de x entre a y b tales que $f(x) = 0$. Nuestro problema es encontrar uno. Haremos esto encontrando el valor mas grande de x para el cual $f(x) = 0$. Para este propósito, sea S el conjunto de todos los puntos x en el intervalo $[a, b]$ para los cuales $f(x) \leq 0$. Existe por lo menos un punto en S ya que $f(a) < 0$. Por lo tanto S es un conjunto diferente de vacío.

También, S está acotado superiormente ya que todo S está en [a,b], de manera que S tiene supremo.

$$\text{Sea } c = \sup S \qquad \textbf{(II)}$$

Entonces probaremos que $f(c) = 0$ Puesto que $f(c)$ es un número, hay solamente tres posibilidades:

$$f(c) > 0, f(c) < 0, \text{ y } f(c) = 0$$

Si $f(c) > 0$, por **(I)** y debido a que f es continua en c, entonces, por el teorema que preserva el signo de funciones continuas, existe un intervalo (c-δ, c+δ) o (c-δ, c] si $c = b$, en el cual f es positiva. Por lo tanto no existen puntos de S que estén a la derecha de c-δ, lo cual quiere decir que c-δ es una cota superior de S. Pero c-$\delta < c$ y, según **(II),** c es la mínima cota superior de S. Por lo tanto la desigualdad $f(c) > 0$ es imposible.

Ahora si $f(c) < 0$, utilizando nuevamente el teorema que preserva el signo de funciones continuas, podemos afirmar que existe un intervalo $(c-\delta, c+\delta)$ o $[c, c+\delta)$ si $c = a$, en el que f es negativa. Es decir que $f(x) < 0$ para algún $x > c$, contradiciendo el hecho de que c es una cota superior de S. Por lo tanto, $f(c) < 0$ también es imposible. De esta manera la única posibilidad que queda es $f(c) = 0$

También tenemos $a < c < b$ porque $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Esto prueba el teorema de Bolzano.