EXHIBICIÓN DE CAPULLOS Y FLORES AMAZÓNICOS DE LAS PRIMERAS SEMILLAS DE PENSAMIENTO FORMAL MATEMÁTICO SEMBRADAS CON LA AYUDA DEL ELD EN EL TERRENO DE LA ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO

Esta sección consiste en una exhibición de pensamiento formal matemático a nivel de capullos y flores del desarrollo. Las exposiciones de los primeros 24 teoremas y 17 ejercicios son de los niños Santiago y Daniela Rojas en sus catorce y doce años respectivamente; y la mayoría de las exposiciones restantes, son de estudiantes universitarios de Cálculo I de una licenciatura en Matemáticas y Física. Existen los videos de estas exposiciones tal como se presentan escritas en este capítulo, como la evidencia que soporta todo lo que se predica del ELD en este libro.

Pensamiento formal matemático a nivel de capullos y flores del desarrollo significa que aunque las exposiciones son perfectas y muy fluidas, los expositores no dominan ese pensamiento; en otras palabras, que no pueden resolver de modo independiente cualquier problema que se les plantee sobre ese tema debido a que las funciones psicológicas para trabajar con esos objetos abstractos todavía no han madurado. El hecho de que puedan reconstruir demostraciones y exponerlas de manera perfecta y muy fluida y no tengan dominio absoluto de ese pensamiento, significa que ellos no han alcanzado su desarrollo pleno en esos temas. Es decir que lo que ellos tienen ahora, con respecto a los temas que exponen, no son los frutos, sino los capullos y las flores del desarrollo. Ciertamente, ellos han desarrollado en su interior evolutivo pensamiento formal matemático pero a nivel de capullos y flores del desarrollo.

En esta exhibición se podrá apreciar con toda claridad y de manera práctica el papel crucial que desempeña la lógica matemática en el desarrollo de lenguaje y pensamiento matemático, y además, una manera muy sencilla – el ELD - para lograr este desarrollo.

Se ataca en especial y de manera práctica el problema del lenguaje. Una actividad central con el ELD es la que concierne con el ejercicio de traducir una proposición matemática expresada en el lenguaje objeto de la teoría al lenguaje lógico matemático y viceversa, del lenguaje lógico matemático al lenguaje objeto de la teoría (o lenguaje formal).

I. UN CONJUNTO DE AXIOMAS PARA EL SISTEMA DE LOS NÙMEROS REALES

AXIOMA 1. LEYES CONMUTATIVAS.

$$x+y=y+x\,,\quad xy=yx$$

AXIOMA 2. LEYES ASOCIATIVAS.

$$x+(y+z)=(x+y)+z\,,\ x(yz)=(xy)z.$$

AXIOMA 3. LEY DISTRIBUTIVA.

$$x(y+z)=xy+xz.$$

AXIOMA 4. EXISTENCIA DE ELEMENTOS IDÈNTICOS. Existen dos nùmeros reales distintos, que denotamos por 0 y 1, tal que para todo número real x tenemos $x + 0 = x$ y $1\cdot x = x$.

AXIOMA 5. EXISTENCIA DE NEGATIVOS. Para todo número real x existe un número real y tal que $x+y=0$.

AXIOMA 6. EXISTENCIA DE RECÌPROCOS. Para todo número real $x\neq 0$ existe un número real y tal que $xy=1$.

Nota: Los números 0 y 1 en los Axiomas 5 y 6 son los mismos del Axioma 4.

De los anteriores axiomas se pueden deducir todas las leyes usuales del álgebra. Las más importantes de estas leyes se demuestran aquí como teoremas. En todos estos teoremas los símbolos *a, b, c, d* representan números reales arbitrarios.

TEOREMA I.1. LEY CANCELATIVA PARA LA ADICIÓN.
Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$.

ELD

Demostrar: $\boldsymbol{a + b = a + c \Rightarrow b = c}$

(1)	$a + b = a + c$	P
(2)	$\exists y: y + a = 0$	Ax.5 ($\exists$ de negativos)
(3)	$y + (a + b) = y + (a + c)$	1
(4)	$(y + a) + b = (y + a) + c$	I 3, Asoc. Ax.
(5)	$0 + b = 0 + c$	I 4,2
(6)	$0 + b = b$	Ax. 4
(7)	$0 + c = c$	Ax. 4
(8)	$b = c$	I 5,6,7
□ (9)	$a + b = a + c \Rightarrow b = c$	CP 1,8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Sea $a + b = a + c$. **(2)**Por el Axioma 5, existe un número y tal que $y + a = 0$. **(3)**Ya que las sumas están determinadas de manera única, tenemos $y + (a + b) = y + (a + c)$. **(4) (5)**Usando la ley asociativa, obtenemos $(y + a) + b = (y + a) + c$ o $0 + b = 0 + c$. **(6)(7)**Pero por el Axioma 4 tenemos $0 + b = b$ y $0 + c = c$, **(8)(9)**así que $b = c$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $a + b = a + c$. Por el Axioma 5, existe un número y tal que $y + a = 0$. Ya que las sumas son únicas, tenemos $y + (a + b) = y + (a + c)$. Usando la ley asociativa, obtenemos $(y + a) + b = (y + a) + c$ o $0 + b = 0 + c$. Pero por el Axioma 4, tenemos $0 + b = b$ y $0 + c = c$, y por lo tanto, $b = c$.

TEOREMA I.2. POSIBILIDAD DE SUBSTRACCIÓN

Dados a y b, existe exactamente un x tal que $a + x = b$. Este x se denota por $b - a$. En particular, $0 - a$ se escribe simplemente $- a$ y se llama el negativo de a .

ELD

Demostrar: $\forall a,b \exists x!: a + x = b$

(1)	$a,b \in R$	P
(2)	$\exists y: a + y = 0$	Ax.5 ($\exists$ de negativos)
(3)	$x = y + b$	P

(4)	$a + x = a + (y + b)$	3
(5)	$a + (y + b) = (a + y) + b$	Asoc. Ax.
(6)	$(a + y) + b = 0 + b$	2
(7)	$0 + b = b$	Ax.4 (elemento idéntico)
(8)	$a + x = b$	I 4,5,6,7
(9)	Ver que este x es único	
(10)	$\exists x' : a + x' = b$	P
(11)	$a + x' = a + x$	I 8,10
(12)	$x' = x$	I 11,Teo. I.1
□ (13)	$\forall a,b \exists x! : a + x = b$	1,8,12

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2)(3) Dados a y b, escogemos y tal que $a + y = 0$ y sea $x = y + b$. **(4)(5)(6)(7)**Entonces $a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$. **(8)**Por eso existe al menos un x tal que $a + x = b$. **(9) (10) (11) (12)**Pero por el teorema I.1 hay a lo más un tal x. **(13)**Por lo tanto existe exactamente uno.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Dados a y b, escogemos y tal que $a + y = 0$ y sea $x = y + b$.
Entonces $a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$. Por eso existe al menos un x tal que $a + x = b$. Pero por el teorema I.1 hay a lo más un tal x. Por lo tanto existe exactamente uno.

TEOREMA I.3. $b - a = b + (-a)$

I. **ELD**

Demostrar: $b - a = b + (-a)$

(1)	$a,b \in R$	P
(2)	$x = b - a$	P
(3)	$y = b + (-a)$	P
(4)	probaremos que $x = y$	
(5)	$x + a = b$	I 2, Def. de $b - a$
(6)	$y + a = [b + (-a)] + a$	3
(7)	$[b + (-a)] + a = b + [(-a) + a]$	Asoc. Ax.
(8)	$b + [(-a) + a] = b + 0$	Ax. 5 ($\exists$ de negativos)
(9)	$b + 0 = b$	Ax.4
(10)	$y + a = b$	I 6,7,8,9
(11)	$x + a = y + a$	I 5,10
(12)	$x = y$	I 11, Teo.I.1
□ (13)	$b - a = b + (-a)$	I 2,3,12

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2)(3) Sean $x = b - a$ y $y = b + (-a)$. **(4)**Deseamos probar que $x = y$.
(5) Entonces, por definición de $b - a$, se tiene

$$x + a = b. \qquad (*)$$

(6)(7)(8)(9) y

$$y + a = [b + (-a)] + a = = b + [(-a) + a] = b + 0 = b.$$

(10)O sea

$$y + a = b. \qquad (**)$$

(11) De (*) y (**) se tiene

$$x + a = y + a$$

(12) (13)y así, por el Teorema I.1, $x = y$. **(14)** O sea $b - a = b + (- a)$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sean $x = b - a$ y $y = b + (-a)$. Deseamos probar que $x = y$.
Entonces, por definición de $b - a$, se tiene

$$x + a = b. \qquad (*)$$

y

$$y + a = [b + (-a)] + a = = b + [(-a) + a] = b + 0 = b.$$

Es decir

$$y + a = b. \qquad (**)$$

De (*) y (**) se tiene

$$x + a = y + a$$

y así, por el Teorema I.1, $x = y$. O sea $b - a = b + (- a)$.

TEOREMA I.4. $-(-a) = a$

I. **ELD**

Demostrar: $-(-a) = a$

(1)	$a + (-a) = 0$	Def. $-a$
(2)	$(-a) + a = 0$	I 1, Comm. Ax.
(3)	a es el negativo de $-a$	traducción 2
(4)	$a = -(-a)$	traducción 3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) (2) Por definición de – a, tenemos $a + (-a) = 0$ o $(-a) + a = 0$. **(3)** Pero esta ecuación nos dice que a es el negativo de – a. **(3)**Esto es $a = -(-a)$, como se había planteado.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Por definición de – a, tenemos $a + (-a) = 0$ y $(-a) + a = 0$. Pero esta ecuación nos dice que a es el negativo de – a. Esto es $a = -(-a)$, como se había planteado.

TEOREMA I.5. $a(b-c) = ab - ac$

TEOREMA I.6. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

ELD

Demostrar: $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

	(1)	$0 = 0 + 0$	P
	(2)	$a \cdot 0 = a(0+0)$	1
	(3)	$a(0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$	Axioma 3
	(4)	$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$	I 2,3
	(5)	$a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0$	Ax. 4
	(6)	$a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$	I 5,4
□$_1$	(7)	$0 = a \cdot 0$	I 6, Teo.I.1(L. cancelativa)
	(8)	$a \cdot 0 = 0 \cdot a$	Comm. Ax.
□$_2$	(9)	$0 = 0 \cdot a$	I 7,8
□	(10)	$0 = a \cdot 0 = 0 \cdot a$	I 7,9

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2)(3) Usando el hecho de que $0 = 0 + 0$, por el Axioma 3, $a \cdot 0 = a(0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$. **(4)** O sea $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$.**(5) (6)**Como $a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0$, entonces $a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$.**(7)**Por el Teorema I.1(Ley cancelativa para la adición), tenemos $0 = a \cdot 0$. **(8)(9)(10)**Como $a \cdot 0 = 0 \cdot a$, se tiene $0 = 0 \cdot a$, y por lo tanto $0 = a \cdot 0 = 0 \cdot a$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Usando que $0 = 0 + 0$ por el Axioma 3, $a \cdot 0 = a(0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$. O sea $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$.Como $a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0$, $a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$.

Por el Teorema I.1(Ley cancelativa para la adición), tenemos $0 = a \cdot 0$. Como $a \cdot 0 = 0 \cdot a$, se tiene $0 = 0 \cdot a$ y por lo tanto, $0 = a \cdot 0 = 0 \cdot a$.

TEOREMA I.7. LEY CANCELATIVA PARA LA ULTIPLICACION

Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$. (En particular, esto muestra que el número 1 del axioma 4 es único).

ELD

Demostrar: $ab = ac \;\wedge\; a \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{b = c}$

(1)	$ab = ac \;\wedge\; a \neq 0$	P
(2)	$a \neq 0$	S 1
(3)	$\exists y : ya = 1$	I 2,Ax.6
(4)	$y\,(ab) = y(ac)$	1
(5)	$(ya)b = (ya)c$	I 4,Asoc. Ax.
(6)	$1 \cdot b = 1 \cdot c$	I 3,5
(7)	$b = c$	I 6,Ax.4
□ (8)	$ab = ac \;\wedge\; a \neq 0 \Rightarrow b = c$	CP 1, 7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$.

(1) Sea $ab = ac$. **(2) (3)**Como $a \neq 0$, por el Axioma 6, hay un número *y* tal que $ya = 1$. **(4)(5)(6)**Entonces $y\,(ab) = y(ac)$ o $(ya)b = (ya)c$ (por la ley asociativa); de donde $1 \cdot b = 1 \cdot c$. **(7) (8)** O sea *b* = *c*, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$.

Sea $ab = ac$. Como $a \neq 0$, por el Axioma 6, hay un número *y* tal que $ya = 1$. Entonces $y\,(ab) = y(ac)$ o $(ya)b = (ya)c$ (por la ley asociativa); de donde $1 \cdot b = 1 \cdot c$. Y por lo tanto *b* = *c*, que era lo que queríamos demostrar.

TEOREMA I.8. POSIBILIDAD DE DIVISION. Dados *a* y *b* con $a \neq 0$, existe exactamente un *x* tal que $ax = b$. Este x se denota por *b*/*a* o $\frac{b}{a}$ y se llama el cociente de *b* y *a*. En particular, 1/*a* también se escribe a^{-1} y se llama el recíproco de *a*.

ELD

Demostrar: $\forall a,b \in R \wedge a \neq 0\ \exists x!: ax = b$

(1)	$a,b \in R \ \wedge\ a \neq 0$	P
(2)	$\exists y: ay = 1$	I 1, Ax.6 ($\exists$ de recíproco)
(3)	$x = yb$	P
(4)	$ax = a(yb)$	3
(5)	$a(yb) = (ay)b$	Asoc. Ax.
(6)	$(ay)b = 1b$	2
(7)	$1b = b$	Ax.4 (elemento idéntico)
(8)	$ax = b$	I 4,5,6,7
(9)	Ver que este x es único	
(10)	$\exists x' : a x' = b$	P
(11)	$a x' = a\ x$	I 8,10
(12)	$x' = x$	I 11,Teo. I.7
□ (13)	$\forall a,b \exists x!: ax = b$	1,8,12

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2)(3) Dados a y b con $a \neq 0$, escogemos y tal que $ay = 1$ y sea $x = yb$. **(4)(5)(6)(7)**Entonces $ax = a(yb) = (ay)b = 1b = b$. **(8)**Por eso existe al menos un x tal que $ax = b$ **(9) (10) (11) (12)**Pero por el teorema I.7 hay a lo más un tal x. **(13)** Así que existe exactamente uno.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Dados a y b con $a \neq 0$, escogemos y tal que $ay = 1$ y sea $x = yb$. Entonces $ax = a(yb) = (ay)b = 1b = b$. Por eso existe al menos un x tal que $ax = b$ Pero por el teorema I.7 hay a lo más un tal x. Así que existe exactamente uno.

TEOREMA I.9. Si $a \neq 0$, entonces $b/a = b \cdot a^{-1}$

ELD

Demostrar: $a \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{b/a =} \ b \cdot a^{-1}$

	(1)	$a \neq 0$	P
	(2)	$\exists \frac{1}{a} = a^{-1}$	I 1,Ax.6
	(3)	$b/a = b \cdot \frac{1}{a}$	P
	(4)	$b \cdot \frac{1}{a} = b \cdot a^{-1}$	2
	(5)	$b/a = b \cdot a^{-1}$	I 3,4
□	(6)	$a \neq 0 \Rightarrow b/a = b \cdot a^{-1}$	CP 1,5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que si $a \neq 0$, entonces $b/a = b \cdot a^{-1}$

(1)(2) Sea $a \neq 0$. Entonces existe el recíproco de a, esto es, $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

(3)(4) Ahora bien,

$b/a = b \cdot \frac{1}{a} = b \cdot a^{-1}$**. (5)(6)**Por lo tanto, $b/a = b \cdot a^{-1}$**.**

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos A demostrar que si $a \neq 0$, entonces $b/a = b \cdot a^{-1}$

Sea $a \neq 0$. Entonces existe el recìproco de a, esto es, $a^{-1} = \frac{1}{a}$. Ahora bien,

$b/a = b \cdot \frac{1}{a} = b \cdot a^{-1}$**.** Por lo tanto, $b/a = b \cdot a^{-1}$**.**

TEOREMA I.10. Si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.

ELD

Demostrar: $a \neq 0 \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$

(1)	$a \neq 0$	P
(2)	$a \cdot a^{-1} = 1$	I 1,Ax.6
(3)	$a^{-1} \cdot a = 1$	I 2, Comm. Ax.
(4)	$a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1} = 1$	Ax.6
(5)	$a^{-1} \cdot a = a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1}$	I 3,4
(6)	$a = (a^{-1})^{-1}$	I 5, TeoI.7 (L.cancelativa)
□ (7)	$a \neq 0 \Rightarrow a = (a^{-1})^{-1}$	CP 1,6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.
(1)(2) Si $a \neq 0$, existe a^{-1} y $a \cdot a^{-1} = 1$ o $a^{-1} \cdot a = 1$ **(3)**Ahora, por Axioma 6, $a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1} = 1$. **(4)**Entonces $a^{-1} \cdot a = a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1}$. **(5) (6)**Por el Teorema I.7, la ley cancelativa para la multiplicación, se obtiene $a = (a^{-1})^{-1}$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.
Si $a \neq 0$, existe a^{-1} y $a \cdot a^{-1} = 1$. Ahora, por Axioma 6, $a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1} = 1$. Entonces $a^{-1} \cdot a = a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1}$. Por el Teorema I.7, la ley cancelativa para la multiplicación, se obtiene $a = (a^{-1})^{-1}$.

TEOREMA I.11. Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

I **ELD** por RAA

Demostrar $a = 0$ v $b = 0$

(1)	$ab = 0$	**P**
(2)	$\rceil (a = 0 \vee b = 0)$	P
(3)	$a \neq 0 \wedge b \neq 0$	DL (2)
(4)	$a \neq 0$	S 3
(5)	$(1/a)\, a = 1$	P
(6)	$(1/a)(ab) = (1/a)0 = 0$	1
(7)	$(1/a)(ab) = [(1/a)a]b = 1b = b$	5

(8)	b = 0	I 6,7
(9)	b $\neq$ 0	S 3
(10)	b = 0 $\wedge$ b $\neq$ 0	A 8,9
(11)	a = 0 v b = 0	RAA 2,10

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2)(3) Supongamos lo contrario, es decir, $a \neq 0$ y b $\neq$ 0. **(4) (5) (6)**Entonces

$$(1/a)(a\mathrm{b}) = (1/a)0 = 0 \qquad \text{(I)}$$

(7) Por otro lado,

$$(1/a)(a\mathrm{b}) = \mathrm{b}\ . \qquad \text{(II)}$$

(8) De (I) y (II) se tiene b = 0, **(9)(10) (11)** que contradice el supuesto de que b $\neq$ 0.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario, es decir, $a \neq 0$ y b $\neq$ 0. Entonces

$$(1/a)(a\mathrm{b}) = (1/a)0 = 0 \qquad \text{(I)}$$

Por otro lado,

$$(1/a)(a\mathrm{b}) = \mathrm{b}\ . \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) se tiene b = 0, que contradice el supuesto de que b $\neq$ 0.

TEOREMA I.12. $(-a)b = -(ab)$ y $(-a)(-b) = ab$

ELD

Demostrar: $(-a)b = -(ab)$ **y** $(-a)(-b) = ab$

(1)	$ab + (-a)b = (a+(-a))b$	Ax.3
(2)	$(a+(-a))b = 0 \cdot b$	Ax.5
(3)	$0 \cdot b = 0$	Teorema I.6
(4)	$ab + (-a)b = 0$	I 1,2,3
(5)	$(-a)b$ es el negativo de ab	traducción 4
$\square_1$ (6)	$(-a)b = -(ab)$	traducción 5
(7)	$(-a)(-b) + (-a)b = (-a)(-b+b)$	Ax.3
(8)	$(-a)(-b+b) = (-a) \cdot 0$	Ax.5
(9)	$(-a) \cdot 0 = 0$	Teorema I.6

	(10)	$(-a)(-b) + (-a)b = 0$	I 7,8,9
	(11)	$(-a)(-b) + [-(ab)] = 0$	I 6,10
	(12)	$-(ab)$ es el negativo de $(-a)(-b)$	traducción 11
□ $_2$	(13)	$(-a)(-b) = -(-ab)$	traducción 12
	(14)	$(-a)(-b) = ab$	I 13, Teorema I.4
□	(15)	$(-a)b = -(ab)$ y $(-a)(-b) = ab$	A 6,14

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Demostremos primero $(-a)b = -(ab)$.
(1)(2) (3) Por el Axioma 3, el Axioma 5 y el Teorema I.6,

$$ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0 \cdot b = 0.$$

(4) De donde $ab + (-a)b = 0$. **(5)**Pero esto significa que $(-a)b$ es el negativo de ab; **(6)** es decir, $(-a)b = -(ab)$.

Demostremos ahora que $(-a)(-b) = ab$.**(7) (8) (9)**Por el Axioma 3, el Axioma 5 y el Teorema I.6, $(-a)(-b) + (-a)b = (-a)(-b + b) = (-a) \cdot 0 = 0$. **(10)** O sea que $(-a)(-b) + (-a)b = 0$. **(11)**Ya demostramos que $(-a)b = -(ab)$, luego $(-a)(-b) + [-(ab)] = 0$. **(12)(13)**Pero esto quiere decir que $-(ab)$ es el negativo de $(-a)(-b)$ o sea $(-a)(-b) = -\left[-(ab)\right]$. **(14)(15)** Y por el Teorema I.4 $(-a)(-b) = ab$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Demostremos primero $(-a)b = -(ab)$.
Por el Axioma 3, el Axioma 5 y el Teorema I.6,

$$ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0 \cdot b = 0.$$

De donde $ab + (-a)b = 0$. Pero esto significa que $(-a)b$ es el negativo de ab; es decir, $(-a)b = -(ab)$.

Demostremos ahora que $(-a)(-b) = ab$. Por el Axioma 3, el Axioma 5 y el Teorema I.6, $(-a)(-b) + (-a)b = (-a)(-b + b) = (-a) \cdot 0 = 0$. O sea que $(-a)(-b) + (-a)b = 0$.Ya demostramos que $(-a)b = -(ab)$, luego $(-a)(-b) + [-(ab)] = 0$. Pero esto quiere decir que $-(ab)$ es el negativo de

$(-a)(-b)$ o sea $(-a)(-b) = -\left[-(ab)\right]$. Y por el Teorema I.4, $(-a)(-b) = ab$.

TEOREMA I.13. $(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/(bd)$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

ELD

Demostrar: $(a/b)+(c/d)=(ad+bc)/(bd)$

(1)	$b \neq 0$ **y** $d \neq 0$	**P**
(2)	$\exists b^{-1}, d^{-1}$	I 1,Ax. 6
(3)	$(a/b)+(c/d)=ab^{-1}+cd^{-1}$	Teorema I.9
	$= \dfrac{(bd)(ab^{-1}+cd^{-1})}{bd}$	
	$= \dfrac{bdab^{-1}+bdcd^{-1}}{bd}$	Axioma 3
	$= \dfrac{dbab^{-1}+bcdd^{-1}}{bd}$	Axioma 1
	$= \dfrac{dabb^{-1}+bcdd^{-1}}{bd}$	Axioma 1
	$= \dfrac{da\cdot 1+bc\cdot 1}{bd}$	Axioma 6

$$= \frac{da+bc}{bd}$$ Axioma 4

□ (4) $(a/b)+(c/d)=(ad+bc)/(bd)$ 3

TEOREMA I.14. $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

ELD

Demostrar: $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$

(1)	$b \neq 0$ **y** $d \neq 0$	**P**
(2)	$\exists b^{-1}, d^{-1}$	I 1,Ax. 6
(3)	$(a/b)(c/d)=(ab^{-1})(cd^{-1})$	Teorema I.9
	$= a[\,b^{-1}(cd^{-1})\,]$	Axioma 2
	$= a[\,(b^{-1}c)d^{-1}]$	Axioma 2
	$= a[\,(cb^{-1})d^{-1}]$	Axioma 1
	$= a[\,c(b^{-1}d^{-1})\,]$	Axioma 2
	$=(a\,c)(b^{-1}d^{-1})$	Axioma 2
	$= (ac)\,(bd)^{-1}$	Ejercicio 7
	$= \dfrac{ac}{bd}$	Teorema I.9
□(4)	$(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$	3

TEOREMA I.15. $(a/b)/(c/d) = (ad)/(bc)$ si $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$.

ELD

Demostrar: $(a/b)/(c/d) = (ad)/(bc)$

(1)	$b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$	**P**
(2)	$\exists b^{-1}, c^{-1}, d^{-1}$	I 1,Ax. 6
(3)	$(a/b)/(c/d)=\dfrac{ab^{-1}}{cd^{-1}}$	Teorema I.9
	$=\left(\dfrac{a}{c}\right)\left(\dfrac{b^{-1}}{d^{-1}}\right)$	Teorema I. 14
	$= (ac^{-1})\,[\,b^{-1}(d^{-1})^{-1}\,]$	Teorema I.9
	$= (ac^{-1})\;(b^{-1}d)$	Teorema I.10
	$= (ac^{-1})\;(db^{-1})$	Axioma 1

$= a\,[\,c^{-1}(db^{-1})\,]$	Axioma 2
$= a\,[\,(c^{-1}d)b^{-1})\,]$	Axioma 2
$= a\,[\,(dc^{-1})b^{-1})\,]$	Axioma 1
$= a\,[\,d(c^{-1}b^{-1})\,]$	Axioma 2
$= (ad)\,(c^{-1}b^{-1})$	Axioma 2
$= (ad)\,(b^{-1}c^{-1})$	Axioma 1
$= (ad)(bc)^{-1}$	Ejercicio 7
$= \dfrac{ad}{bc}$	Teorema I.9
(4) $(a/b)/(c/d) = \dfrac{ad}{bc}$	3

E J E R C I C I O S I.1

1. $-0 = 0$

ELD

Demostrar: $-0 = \mathbf{0}$

(1)	$0 + (-0) = 0$	Ax.5
(2)	$0 = 0 + 0$	Ax. 4
(3)	$0 + (-0) = 0 + 0$	I 1,2
□ (4)	$-0 = 0$	I 3,TeoI.1 (L. cancel.)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Por Axioma 5, $0 + (-0) = 0$. **(2)**Pero $0 = 0 + 0$ (Axioma 4), **(3)**luego $0 + (-0) = 0 + 0$. **(4)**Por el Teorema I.1 (L. cancelativa), $-0 = 0$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Por Axioma 5, $0 + (-0) = 0$. Pero $0 = 0 + 0$ (Axioma 4), luego $0 + (-0) = 0 + 0$. Por el Teorema I.1 (L. cancelativa), $-0 = 0$.

2. $1^{-1} = 1$

ELD

Demostrar: $1^{-1}=1$

(1)	$1\cdot 1^{-1}=1$	Ax.6
(2)	$1 = 1\cdot 1$	Ax.4
(3)	$1\cdot 1^{-1} = 1\cdot 1$	I 1,2
∴ (4)	$1^{-1}=1$	I 3,TeoI.7 (L.Cancelativa)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2) Por el Axioma 6 se tiene que $1\cdot 1^{-1}=1$ y por el Axioma 4, $1 = 1\cdot 1$. **(3)**Por lo tanto, $1\cdot 1^{-1}=1\cdot 1$.**(4)** Por la ley cancelativa (Teorema I.7), finalmente se tiene que $1^{-1}=1$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Por el Axioma 6 se tiene que $1\cdot 1^{-1}=1$ y por el Axioma 4, $1 = 1\cdot 1$.Por lo tanto, $1\cdot 1^{-1}=1\cdot 1$. Por la ley cancelativa (Teorema I.7), finalmente se tiene que $1^{-1}=1$.

3. El cero no tiene recíproco.

ELD Por RAA

Demostrar: El cero no tiene recíproco

Traducción: $\neg(\exists o^{-1})(o\cdot o^{-1}=1)$

(1)	$\exists o^{-1} : o\cdot o^{-1}=1$	P
(2)	$o\cdot o^{-1}=o$	Teo.I.6
(3)	$1=o$	I 1,2
∴ (4)	$\neg(\exists o^{-1})(o\cdot o^{-1}=1)$	RAA 1,3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Supongamos lo contrario que el cero tiene recíproco, esto es, que existe o^{-1} y $o\cdot o^{-1}=1$. **(2)**Pero por el Teorema I.6, $o\cdot o^{-1}=o$; **(3)**luego $1=o$, que es una contradicción. **(4)**Por lo tanto, el cero no tiene recíproco.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos que el cero tiene recíproco, esto es, que existe o^{-1} y $o\cdot o^{-1}=1$. Pero por el Teorema I.6, $o\cdot o^{-1}=o$; luego $1=o$, que es una contradicción. Por lo tanto, el cero no tiene recíproco.

4. $-(a+b) = -a-b$

ELD

Demostrar: $-(a+b) = -a-b$

(1)	$(a+b)+(-a-b) = (a+b)+[(-a)+(-b)]$	Teo.I.3
	$= (a+b)+[(-b)+(-a)]$	Axioma 1
	$= a+[b+((-b)+(-a))]$	Axioma 2
	$= a+[(b+(-b))+(-a)]$	Axioma 2
	$= a+(0+(-a))$	Axioma 5
	$= a+(-a)$	Axioma 4
	$= 0$	Axioma 5
(2)	$(a+b)+(-a-b) = 0$	1
(3)	$-a-b$ es el negativo de $a+b$	traducción 2
□ (4)	$-a-b=-(a+b)$	traducción 3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $-(a+b) = -a-b$.

(1) En efecto, $(a+b)+(-a-b) = (a+b)+[(-a)+(-b)]$ Teorema I.3

$= (a+b)+[(-b)+(-a)]$ Axioma 1

$= a+[b+((-b)+(-a))]$ Axioma 2

$= a+[(b+(-b))+(-a)]$ Axioma 2

$= a+(0+(-a))$ Axioma 5

$= a+(-a)$ Axioma 4

$= 0.$ Axioma 5

(2) Por lo tanto, $(a+b)+(-a-b) = 0$. **(3)**Pero esto quiere decir que $-a-b$ es el negativo de $(a+b)$. **(4)**Esto es, $-a-b= -(a+b)$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $-(a+b) = -a-b$.

En efecto: $(a+b)+(-a-b) = (a+b)+[(-a)+(-b)]$ Teorema I.3

$= (a+b)+[(-b)+(-a)]$ Comm. Ax.

$= a+[b+((-b)+(-a))]$ Asoc. Ax.

$= a+[(b+(-b))+(-a)]$ Asoc. Ax.

$= a+(0+(-a))$ Axioma 5

$= \; a + (-a)$ Axioma 4

$= 0.$ Axioma 5

Por lo tanto, $(a+b) + (-a-b) = 0$. Pero esto quiere decir que $-a-b$ es el negativo de $(a+b)$. Esto es, $-a-b = -(a+b)$.

5. $-(a-b) = -a+b$

ELD

Demostrar: $-(a-b) = -a+b$

(1)	$(a-b)+(-a+b) = [(a-b)+(-a)] + b$	Asoc. Ax.
	$= [(a+(-b))+(-a))] + b$	Teo.I.3
	$= [(a+((-b)+(-a))] + b$	Asoc. Ax.
	$= [(a+((-a)+(-b))] + b$	Comm.. Ax.
	$= [(a+(-a))+(-b)] + b$	Asoc.Ax.
	$= [0+(-b)] + b$	Ax.5
	$= (-b) + b$	Ax.4
	$= 0$	Ax.5
(2)	$(a-b)+(-a+b) = 0$	1
(3)	$-a+b$ es el negativo de $a-b$	I 2, Ax.4
∴ (4)	$-a+b = -(a-b)$	traducción 3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $-(a-b) = -a+b$.

(1) En efecto : $(a-b)+(-a+b) = [(a-b)+(-a)] + b$ Asoc. Ax.

$= [(a+(-b))+(-a))] + b$ Teo.I.3

$= [(a+((-b)+(-a))] + b$ Asoc. Ax.

$= [(a+((-a)+(-b))] + b$ Comm. Ax.

$= [(a+(-a))+(-b)] + b$ Asoc.Ax.

$= [0+(-b)] + b$ Ax.5

$= (-b) + b$ Ax.4

$= 0$ Ax.5

(2) Por lo tanto $(a-b)+(-a+b) = 0$. **(3)**Pero esto quiere decir que $-a+b$ es el negativo de $a-b$. **(4)**Luego $-a+b = -(a-b)$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $-(a-b) = -a+b$.

En efecto: $(a-b)+(-a+b) = [(a-b)+(-a)]+b$ Asoc. Ax.

$= [(a+(-b))+(-a))]+b$ Teo.I.3

$= [(a+((-b)+(-a))]+b$ Asoc. Ax.

$= [(a+((-a)+(-b))]+b$ Comm. Ax.

$= [(a+(-a))+(-b)]+b$ Asoc.Ax.

$= [0+(-b)]+b$ Ax.5

$= (-b)+b$ Ax.4

$= 0$ Ax.5

Por lo tanto, $(a-b)+(-a+b) = 0$. Pero esto quiere decir que $-a+b$ es el negativo de $a-b$. Luego $-a+b = -(a-b)$.

6. $(a-b)+(b-c) = a-c$

ELD

Demostrar: $(a-b)+(b-c) = a-c$

(1)	$(a-b)+(b-c) = (a+(-b))+(b+(-c))$	Teo.I.3
	$= a+[(-b)+(b+(-c))]$	Asoc. Ax.
	$= a+[((-b)+b)+(-c)]$	Asoc. Ax.
	$= a+[0+(-c)]$	Ax.5
	$= a+(-c)$	Ax.4
	$= a-c$	Teo.I.3
□ (2)	$(a-b)+(b-c) = a-c$	1

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $(a-b)+(b-c) = a-c$.

(1) En efecto : $(a-b)+(b-c) = (a+(-b))+(b+(-c))$ Teo.I.3

$= a+[(-b)+(b+(-c))]$ Asoc. Ax.

$= a+[((-b)+b)+(-c)]$ Asoc. Ax.

$= a+[0+(-c)]$ Ax.5

$= a+(-c)$ Ax.4

$= a-c$ Teo.I.3

(2) Por lo tanto, $(a-b)+(b-c) = a-c$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $(a-b)+(b-c)=a-c$.

En efecto : $(a-b)+(b-c)$	$=(a+(-b))+(b+(-c))$	Teo.I.3
	$=a+[(-b)+(b+(-c))]$	Asoc. Ax.
	$=a+[((-b)+b)+(-c)]$	Asoc. Ax.
	$=a+[0+(-c)]$	Ax.5
	$=a+(-c)$	Ax.4
	$=a-c$	Teo.I.3

Por lo tanto, $(a-b)+(b-c)=a-c$.

7. Si $a\neq 0$ y $b\neq 0$, entonces $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$

ELD

Demostrar: $a\neq 0\wedge b\neq 0\Rightarrow (ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$

(1)	$a\neq 0\wedge b\neq 0$	P
(2)	$\exists\ a^{-1},b^{-1}$	I 1,Ax.6
(3)	$(ab)(a^{-1}b^{-1})=(ab)(b^{-1}a^{-1})$	Comm. Ax.
	$=((ab)\,b^{-1})a^{-1}$	Asoc. Ax.
	$=(a(b\,b^{-1})a^{-1}$	Asoc. Ax.
	$=(a\cdot 1\cdot a^{-1})$	Ax.6
	$=a\,a^{-1}$	Ax.4
	$=1$	Ax.6
(4)	$(ab)(a^{-1}b^{-1})=1$	3
(5)	$a^{-1}b^{-1}$ es el recíproco de ab	I 4, Ax.6
(6)	$(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$	traducción 5
□ (7)	$a\neq 0\wedge b\neq 0\Rightarrow (ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$	CP 1,6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que si $a\neq 0$ y $b\neq 0$, entonces $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$

(1) Sean $a\neq 0$ y $b\neq 0$. **(2)**Entonces existen los recíprocos a^{-1} y b^{-1}.

(3) Ahora bien,	$(ab)(a^{-1}b^{-1})=(ab)(b^{-1}a^{-1})$	Comm. Ax.
	$=((ab)\,b^{-1})a^{-1}$	Asoc. Ax
	$=(a(b\,b^{-1})a^{-1}$	Asoc. Ax.

$= (a \cdot 1 \cdot a^{-1})$ Ax.6

$= a\, a^{-1}$ Ax.4

$= 1$ Ax.6

(4) Por lo tanto $(ab)(a^{-1}b^{-1}) = 1$. **(5)** Esto significa que $a^{-1}b^{-1}$ es el recíproco de ab .**(6)(7)** Luego $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
Sean $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Entonces existen los recíprocos a^{-1} y b^{-1}.

Ahora bien $(ab)(a^{-1}b^{-1}) = (ab)(b^{-1}a^{-1})$	Comm. Ax.
$= ((ab)\, b^{-1})a^{-1}$	Asoc. Ax
$= (a(b\, b^{-1})a^{-1}$	Asoc. Ax.
$= (a \cdot 1 \cdot a^{-1})$	Ax.6
$= a\, a^{-1}$	Ax.4
$= 1$	Ax.6

Por lo tanto $(ab)(a^{-1}b^{-1}) = 1$. Esto significa que $a^{-1}b^{-1}$ es el recíproco de ab. Luego $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

8. $-(a/b) = (-a/b) = a/(-b)$ si $b \neq 0$

ELD

Demostrar: $b \neq 0 \Rightarrow -(a/b) = (-a)/b = a/(-b)$

(1)	$b \neq 0$	P
(2)	$\exists b^{-1}$	I 1,Teo.I.8
(3)	$-(a/b) = -(ab^{-1})$	Teo.I.9
	$= (-a)b^{-1}$	Teo.I.12
	$= (-a)/b$	Teo.I.9
$\square_1$(4)	$-(a/b) = (-a/b)$	3
(5)	$(-a)/b = (-a)b^{-1}$	Teo.I.9
	$= -(ab^{-1})$	Teo.I.12
	$= -(b^{-1}a)$	Comm. Ax.
	$= (-b^{-1})a$	Teo. I.12
	$= a(-b^{-1})$	Comm. Ax.
	$= a/(-b)$	Teo.I.9

□$_2$ (6) $(-a/b) = a/(-b)$ 5

(7) $-(a/b) = (-a)/b = a/(-b)$ 4,6

□ (8) $b \neq 0 \Rightarrow -(a/b) = (-a)/b = a/(-b)$ CP 1,14

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $-(a/b) = (-a/b) = a/(-b)$ si $b \neq 0$.

(1) Sea $b \neq 0$. **(2)**Por el Axioma 6, existe el recíproco de *b*, esto es, b^{-1}.

(3) Entonces $-(a/b) = -(ab^{-1})$ Teo.I.9

$= (-a)b^{-1}$ Teo.I.12

$= (-a)/b$ Teo.I.9

$= (-a/b)$

(4) Por lo tanto, $-(a/b) = (-a/b)$.

(5) De otra parte : $(-a/b) = (-a)b^{-1}$ Teo.I.9

$= -(ab^{-1})$ Teo.I.12

$= -(b^{-1}a)$ Comm. Ax.

$= (-b^{-1})a$ Teo. I.12

$= a(-b^{-1})$ Comm. Ax.

$= a/(-b)$ Teo.I.9

(6)O sea que $(-a/b) = a/(-b)$. **(7)(8)**Luego $-(a/b) = (-a/b) = a/(-b)$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $-(a/b) = (-a/b) = a/(-b)$ si $b \neq 0$.

Sea $b \neq 0$. Por el Axioma 6, existe el recíproco de *b*, esto es, b^{-1}.

Entonces $-(a/b) = -(ab^{-1})$ Teo.I.9

$= (-a)b^{-1}$ Teo.I.12

$= (-a)/b$ Teo.I.9

Por lo tanto $-(a/b) = (-a)/b$.

De otra parte : $(-a/b) = (-a)b^{-1}$ Teo.I.9

$= -(ab^{-1})$ Teo.I.12

$= -(b^{-1}a)$ Comm. Ax.

$= (-b^{-1})a$ Teo. I.12

$= a(-b^{-1})$ Comm. Ax.

$= \; a/(-b)$ Teo.I.9

O sea que $(-a/b) \; = \; a/(-b)$. Luego $-(a/b) = (-a/b) = a/(-b)$.

9. El elemento idéntico para la suma es único.

I. ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRÁCTICA

1. Interpretación:

- No existe otro número diferente de 0 que también desempeñe el papel de elemento idéntico para la suma.
- Sí existe otro idéntico para la suma, digamos $0'$, entonces $0' = 0$.

2. Traducción al lenguaje lógico:

(0′ es también idéntico para la suma) $\Rightarrow$ $0' = 0$,
ó
(0 y 0′ son idénticos para la suma) $\Rightarrow$ $0 = 0'$

3. Significado. El razonamiento:

	0 es elemento idéntico para la suma	P
	0′ es elemento idéntico para la suma	P
$\triangleright$	$0 = 0'$	C

es válido.

4. **ELD**

Demostrar : Si 0′ también es elemento idéntico, entonces $0 = 0'$.

(1)	0 es elemento idéntico	P
(2)	0′ también es elemento idéntico	P
(3)	$y + 0' = y, \; \forall y$	traducción 2
(4)	$0 + 0' = 0$,	0 / y ,3
(5)	$x + 0 = x$, $\forall x$	traducción 1
(6)	$0' + 0 = 0'$,	0′ / x , 5
(7)	$0 + 0' = 0' + 0$	axioma 1
(8)	$0 = 0'$	I 4,6,7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2) Supongamos que $0'$ también desempeña el papel de elemento idéntico para la suma. **(3)** Entonces $y + 0' = y$ para todo real y. **(4)** Especificando 0 para y, se tiene $0 + 0' = 0$. **(5)(6)** Por otro lado, por el axioma 4, se tiene que $0' + 0 = 0'$ (por ser 0 el elemento idéntico). **(7)** Puesto que $0 + 0' = 0' + 0$, **(8)** se tiene finalmente que $0 = 0'$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos que $0'$ también desempeña el papel de elemento idéntico para la suma. Entonces $y + 0' = y$ para todo real y. Especificando 0 para y, se tiene $0 + 0' = 0$. Por otro lado, por el axioma 4, se tiene que $0' + 0 = 0'$ (por ser 0 el elemento idéntico). Puesto que $0 + 0' = 0' + 0$, se tiene finalmente que $0 = 0'$.

10. El elemento idéntico para la multiplicación es único.

Este ejercicio se puede resolver exactamente como el anterior, basta simplemente intercambiar el 0 por el 1 y la suma por el producto.

I. ORGANIZACIÓN DE LA ACTVIDAD PRÁCTICA

Interpretación

- No existe otro número diferente de 1 que también desempeñe el papel de elemento idéntico para la multiplicación.
- Si existe otro idéntico para la multiplicación, digamos $1'$, entonces $1'=1$.

En lógica simbólica

$1'$ también es idéntico para el producto $\Rightarrow 1'=1$
1 y $1'$ son elementos idénticos para el producto $\Rightarrow 1=1'$

SIGNIFICA

El razonamiento:

(1)	1 es elemento idéntico para el producto	P
(2)	$1'$ es elemento idéntico para el producto	P
$\therefore$	$1 = 1'$	Conclusión

es válido.

ELD

Demostrar : Si es también elemento idéntico, entonces $1' = 1$

	(1) 1 es elemento idéntico para la multiplicación	P
	(2) $1'$ también es elemento idéntico para la multiplicación	P
	(3) $y.1' = y$, $\forall y$	Traducción 2
	(4) $1.1' = 1$	$1/y$, 3
	(5) $x.\ 1 = x$	Traducción 1
	(6) $1'.\ 1 = 1'$	$1'/x$, 5
	(7) $1.1' = 1'.1$	Axioma 1
$\therefore$	(8) $1 = 1'$	I 4,6,7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) Supongamos que $1'$ también desempeña el papel de elemento idéntico para la multiplicación; **(3)** entonces $y.1' = y$ para todo real y. **(4)**Especificando 1 para y, se tiene

$$1.1' = 1. \quad (*)$$

(5)(6) Por el axioma 4, se tiene que

$$1'.1 = 1', \quad (**)$$

por ser 1 el elemento idéntico. **(7)** Puesto que $1.1' = 1'.1$,**(8)** de (*) y (**) se tiene finalmente que $1 = 1'$.

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Supongamos que $1'$ también desempeña el papel de elemento idéntico para la multiplicación; es decir, $y.1' = y$ para todo real y. Especificando 1 para y, se tiene $1.1' = 1$. Por otro lado, por el axioma 4, se tiene que $1'.1 = 1'$ (por ser 1 el elemento idéntico). Puesto que $1.1' = 1'.1$ se tiene finalmente que $1 = 1'$.

AXIOMAS DE ORDEN

AXIOMA 7. Si x y y estàn en R^+, tambièn lo estàn $x + y$ y xy.
AXIOMA 8. Para todo real $x \neq 0$, O $x \in R^+$ o $-x \in R^+$, pero no ambos.
AXIOMA 9. $0 \notin R^+$.

DEFINICIÓN DE LOS SÍMBOLOS $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$

Ahora podemos definir los símbolos $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$, llamados, respectivamente, *menor que*, *mayor que*, *menor o igual que*, *y mayor o igual que*, como sigue:

$x < y$ significa que $y - x$ es positivo;
$y > x$ significa que $x < y$
$x \leq y$ significa que $x < y$ o $x = y$
$y \geq x$ significa que $x \leq y$

Así, tenemos que $x > 0$ si y solo si x es positivo. Si $x < 0$, decimos que x es *negativo*; si $x \geq 0$, decimos que x es no negativo.

Un par de desigualdades simultáneas como $x < y$, $y < z$ usualmente se escriben más abreviadamente en la forma $x < y < z$. Interpretaciones similares se dan para las para las desigualdades compuestas $x \leq y < z$, $x < y \leq z$, y $x \leq y \leq z$.

De los axiomas de orden podemos derivar todas las reglas para trabajar con desigualdades. A continuación tenemos una lista de las reglas más importantes expresadas en forma de teoremas.

TEOREMA I.16. LA LEY DE TRICOTOMÍA.

Para números reales a y b cualesquiera se tiene una y solo una de las siguientes relaciones: $a < b$, $b < a$, $a = b$.

ELD

Demostrar: $(\forall a,b \in R)$ **(** $\boldsymbol{a < b}$**, o** $\boldsymbol{b < a}$**, o** $\boldsymbol{a = b}$**)**

(1)	$a,b \in R$	P
(2)	$x = b - a$	P
(3)	$x = 0 \;\vee\; x \neq 0$	2
(4)	$x = 0$	P
(5)	$b - a = a - b = 0$	I 2,4
(6)	$a = b$	5
(7)	$0 \notin R^+$	Axioma 9
(8)	$b - a \notin R^+ \wedge a - b \notin R^+$	I 5,7
(9)	$\neg(b - a \in R^+ \vee a - b \in R^+)$	DL 8

(10) $\neg\ (a< b \vee\ b< a)$ Traducción 9
(11) $a = b\ \wedge\ \neg\ (a< b \vee\ b< a)$ A 6,10
(12) $x = 0\ \Rightarrow\ a = b\ \wedge\ \neg\ (a< b \vee\ b< a)$ CP 4,11
(13) $x \neq 0$ P
(14) $x > 0 \vee\ x < 0$ (pero no ambos) I 13.Ax.8
(15) $b - a > 0\ \vee\ b - a\ < 0$ (pero no ambos) I 2,13
(16) $a< b\ \vee\ b< a$ (pero no ambos) traducción 15
(17) $x \neq 0 \Rightarrow\ a< b\ \vee\ b< a$ (pero no ambos) CP13,16
(18) $[a = b\ \wedge\ \neg\ (a< b \vee\ b< a)]\ \vee\ a< b\ \vee\ a > b$ (pero no ambos) DS 3,12,17
□ (19) Se tiene exactamente una de las tres relaciones:
$a = b, a< b, a > b.$ traducción 18

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que dados *a* y *b* números reales cualesquiera se tiene una y solo una de las siguientes relaciones: $a < b$, $b < a$, $a = b$.
(1) (2) Dados *a* y *b* números reales cualesquiera, sea $x = b - a$.**(3)** Entonces $x = 0$ o $x \neq 0$.**(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)**Si $x = 0$, entonces $b - a = a - b = 0$, y por lo tanto, por el Axioma 9, no podemos tener $a< b \vee\ b< a$. **(11) (12)** Así que tenemos solamente $a = b$. **(13) (14)** Si $x \neq 0$, el Axioma 8 nos dice que se tiene $x > 0$ o $x < 0$ pero no ambos, **(15) (16) (17)** lo que equivale a tener $a< b$ o $b< a$ pero no ambos. **(18) (19)** Así que se tiene exactamente una de las tres relaciones: $a = b, a< b, b< a$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que dados *a* y *b* números reales cualesquiera se tiene una y solo una de las siguientes relaciones: $a < b$, $b < a$, $a = b$.

Dados *a* y *b* números reales cualesquiera, sea $x = b - a$. Entonces $x = 0$ o $x \neq 0$. Si $x = 0$, entonces $b - a = a - b = 0$, y por lo tanto, por el Axioma 9, no podemos tener $a< b \vee\ b< a$. Así que tenemos solamente $a = b$. Si $x \neq 0$, el Axioma 8 nos dice que se tiene $x > 0$ o $x < 0$ pero no ambos, lo que equivale a tener $a< b$ o $b< a$ pero no ambos. Así que se tiene exactamente una de las tres relaciones: $a = b, a< b, b< a$.

TEOREMA I. 17 LEY TRANSITIVA

Si $a < b \wedge b < c$, entonces $a < c$

ELD

Demostrar $a < c$

Traducción $c - a \in R^+$

(1)	$a < b$	P
(2)	$b < c$	P
(3)	$b - a \in R^+$	Traducción 1
(4)	$c - b \in R^+$	Traducción 2
(5)	$(b - a) + (c - b) \in R^+$	I Ax. 7,3,4
(6)	$(b - a) + (c - b) = c - a$	P
(7)	$c - a \in R^+$	I 5,6
□ (8)	$a < c$	Traducción 7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2) Supongamos que $a < b$ y $b < c$. **(3) (4)** Entonces $b - a > 0$ y $c - b > 0$. **(5)** Por el axioma 7, $(b - a) + (c - b) > 0$. **(6)** Pero $(b - a) + (c - b) = c - a$, **(7)** luego $c - a > 0$ **(8)**y por lo tanto $a < c$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos que $a < b$ y $b < c$. Entonces $b - a > 0$ y $c - b > 0$. Por el axioma 7, $(b - a) + (c - b) > 0$. Pero $(b - a) + (c - b) = c - a$, luego $c - a > 0$ y por lo tanto $a < c$.

TEOREMA I.18 Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$

I. **ELD**

Demostrar $a + c < b + c$

Traducción $(b + c) - (a + c) > 0$

(1)	**$a < b$**	**P**
(2)	$b - a > 0$	traducción 1
(3)	$b - a + c - c > 0$	2
(4)	$b - a + c - c = (b + c) - (a + c)$	P
(5)	$(b + c) - (a + c) > 0$	I 3,4
□ (6)	$a + c < b + c$	traducción 5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Sea a < b **(2)** Por definición de orden, b – a > 0. **(3)** Sumando cero al miembro izquierdo de esta inecuación, obtenemos b – a + c – c > 0.
(4) Pero b – a + c – c = (b+a) – (a+c). **(5)** Luego (b+ c) – (a + c) > 0, **(6)**es decir a + c < b +c.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea a < b. Por definición de orden, b – a > 0. Sumando cero al miembro izquierdo de esta inecuación, obtenemos b – a + c – c > 0. Pero b – a + c – c = (b+a) – (a+c). Luego (b+ c) – (a + c) > 0, es decir a + c < b + c.

TEOREMA I. 19 Si a < b $\wedge$ c > 0, entonces ac < bc

ELD
Demostrar ac < bc
Traducción bc – ac >0

(1) a < b	**P**
(2) *c* > 0	**P**
(3) b – a > 0	traducción 1
(4) *c* (b – a) > 0	I 2,3, Ax 7
(5) *c* (b – a) = bc – ac	P
(6) bc – ac > 0	I 4,5
□ (7) ac < bc	traducción 6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2) Supongamos que a < b y c > 0. Entonces **(3)** b – a > 0.**(4)**Por el axioma 7, c (b – a) > 0. **(5)** Pero c(b – a) = bc – ac. **(6)** Luego bc – ac >0 **(7)** y por lo tanto ac < bc.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos que a < b y c > 0. Entonces b – a > 0. Por el axioma 7, c (b – a) > 0. Pero c(b – a) = bc – ac. Luego bc – ac >0 y por lo tanto ac < bc.

TEOREMA I.20 Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$

I. **ELD**

Demostrar $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

(1)	$a \neq 0$	P
(2)	$a > 0 \vee -a > 0$ (pero no ambos)	I 1, Ax.8
(3)	$a > 0$	P

(4)	$a\,a > 0$	I 3, Axioma 7
(5)	$a^2 > 0$	traducción 4
$\square_1$ (6)	$a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$	CP3,5
(7)	$-a > 0$	P
(8)	$(-a)(-a) > 0$	I 7, Ax.7
(9)	$(-a)(-a) = a^2$	Teorema I.12
(10)	$a^2 > 0$	I 8,9
$\square_2$ (11)	$-a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$	CP 7,10
(12)	$a^2 > 0 \vee a^2 > 0$	DS 2,6,11
(13)	$a^2 > 0$	Dp 12
$\square$ (14)	$a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$	CP 1,13

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.
(1) Sea $a \neq 0$. **(2)**Entonces $a > 0$ o $-a > 0$, pero no ambos (Axioma 8).**(3)(4)(5)** **(6)** Si $a > 0$, entonces $a\,a > 0$ o sea $a^2 > 0$.
(7)(8) Si $-a$>0,entonces $(-a)(-a)$>0 (Axioma7).**(9)(10)(11)**Pero $(-a)(-a) = a^2$ (Teorema I.12), luego a^2>0. **(12)(13)(14)**Entonces vemos que cualquiera sea la alternativa que se considere, el resultado es el mismo, a saber, $a^2 > 0$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.

Sea $a \neq 0$. Entonces $a > 0$ o $-a > 0$, pero no ambos (Axioma 8).
Si $a > 0$, entonces $a\,a > 0$ o sea $a^2 > 0$. Si $-a$>0, entonces $(-a)(-a)$>0 (Axioma7). Pero $(-a)(-a) = a^2$ (Teorema I.12), luego a^2>0. Entonces vemos que cualquiera sea la alternativa que se considere, el resultado es el mismo, a saber, $a^2 > 0$.

TEOREMA I.21. 1> 0.

Aplicar el Teorema I.20 con $a = 1$.

TEOREMA I.22. Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $a\,c > b\,c$.

I. **ELD**

Demostrar ac > bc

traducción $ac - bc \in \Re^+$

(1)	**$a < b$**	**P**
(2)	**$c < 0$**	**P**
(3)	$b - a \in \Re^+$	traducción de (1)
(4)	$c \neq 0$	consecuencia de (2)
(5)	$c \neq 0 \rightarrow c \in \Re^+ \vee -c \in \Re^+$	Axioma 8, P
(6)	$c \in \Re^+ \vee -c \in \Re^+$	pp 4,5
(7)	$\rceil(c \in \Re^+)$	Traducción (2)
(8)	$-c \in \Re^+$	TP 6,7
(9)	$(b-a)(-c) \in \Re^+$	(3),(8), Axioma 7,P
(10)	$(b-a)(-c) = ac - bc$	P
(11)	$ac - bc \in \Re^+$	I 9,10
(12)	$ac > bc$	Traducción de (11)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2) Sean a, b, y c reales tales que $a < b$ y $c < 0$. **(3)** Por definición de orden, $b - a > 0$ **(4)(5)(6)(7)(8)**. Como $c \neq 0$ y no positivo, por el axioma 8, se tiene que $-c > 0$. **(9)** Por el axioma 7, se deduce $(b - a)(-c) > 0$. **(10)** Pero $(b - a)(-c) = ac - bc$. **(11)** Luego $ac - bc > 0$; **(12)** es decir, $ac > bc$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sean a, b, y c reales tales que $a < b$ y $c < 0$. Por definición de orden, $b - a > 0$. Como $c \neq 0$ y no positivo, por el axioma 8, se tiene que $-c > 0$. Por el axioma 7, se deduce $(b - a)(-c) > 0$. Pero $(b - a)(-c) = ac - bc$. Luego $ac - bc > 0$; es decir, $ac > bc$.

TEOEMA I.23. Si $a < b$ entonces $-a > -b$.
En particular, Si $a < 0$, entonces $-a > 0$.

I. **ELD**

Demostrar: $a < b \Rightarrow -a > -b$.

(1)	$a < b$	P
(2)	$b - a > 0$	1
(3)	$b - a = -a + b$	I Teo.I.3, Ax. 1
(4)	$-a + b > 0$	I 2,3
(5)	$-(-b) = b$	Teorema I.4

(6)	$-a-(-b)>0$	I 4,5
(7)	$-a>-b$	5
□ (8)	$a<b \Rightarrow -a>-b$	CP 1,7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que si $a<b$ entonces $-a>-b$.
(1) (2)(3)(4) Si $a<b$, entonces $b-a>0$ o sea $-a+b>0$. **(5)** Pero $-(-b)=b$(Teorema I.4); **(6)**por lo tanto $-a-(-b)>0$. **(7)(8)** Y esto quiere decir que $-a>-b$, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que si $a<b$ entonces $-a>-b$.
Si $a<b$, entonces $b-a>0$ o sea $-a+b>0$. Pero $-(-b)=b$(Teorema I.4); por lo tanto $-a-(-b)>0$. Y esto quiere decir que $-a>-b$, que era lo que queríamos demostrar.

TEOREMA I. 24 Si ab >o, entonces ambos son positivos o ambos son negativos.

ELD Por RAA

Demostrar $ab>o \Rightarrow (a>o \wedge b>o) \vee (a<o \wedge b<o)$

(1)	$\neg\ [ab>o \Rightarrow (a>o \wedge b>o) \vee (a<o \wedge b<o)]$	P
(2)	$ab>o \wedge \neg\ [(a>o \wedge b>o) \vee (a<o \wedge b<o)]$	Traducción 1
(3)	$\neg\ [(a>o \wedge b>o) \vee (a<o \wedge b<o)]$	S2
(4)	$\neg\ (a>o \wedge b>o) \wedge \neg\ (a<o \wedge b<o)$	DL 3
(5)	$\neg\ (a>o \wedge b>o)$	S4
(6)	$(a>o \wedge b<o) \vee (a<o \wedge b>o)$	traducción 5
(7)	$a>o \wedge b<o$	P
(8)	$a>o$	S 6
(9)	$\frac{1}{a}>o$	7
(10)	$\frac{1}{a}(ab)>\frac{1}{a}.o$	I 2,9,Teo.I.19
(11)	$(\frac{1}{a}a)b>o$	I 10,Ax.2, Teo.I.6
(12)	b>o	I 11, Ax.6,Ax.4
(13)	b<o	S 7

(14)	b>o $\wedge$ b<o	A 12,13
(15)	a>o $\wedge$ b<o$\Rightarrow$ b>o $\wedge$ b<o	CP 7,14
(16)	a<o $\wedge$ b>o	P
(17)	b>o	S 16
(18)	$\frac{1}{b} > o$	17
(19)	$(ab)\frac{1}{b} > o\ \frac{1}{b}$	I 2,18, Teo.I.19
(20)	$a > o$	I 19,Ax.2, Ax.6,Ax.4,Teo.I.6
(21)	$a < o$	S 16
(22)	$a > o \wedge a < o$	A 20,21
(23)	a<o $\wedge$ b>o$\Rightarrow$ $a > o \wedge a < o$	CP 16,22
(24)	(b>o $\wedge$ b<o) $\vee$ ($a > o \wedge a < o$)	DS 6,15,23
(25)	ab>o $\Rightarrow$(a>o $\wedge$ b>o) $\vee$ (a<o $\wedge$ b<o)	RAA 1,24

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2) Supongamos lo contrario; esto es

$$ab>0, \qquad (*)$$

y que no ocurre que O (a>0 y b> 0) o (a < 0 y b < 0). **(3)(4)** Es decir que ni (a>0 y b> 0) ni (a < 0 y b < 0). **(5)**En particular, tenemos que no ocurre que a>0 y b> 0. **(6)**Esto último implica que (a>0 y b< 0) o (a < 0 y b > 0). **(7)**Supongamos que se cumple la alternativa

$$a>0 \text{ y } b<0. \qquad (**)$$

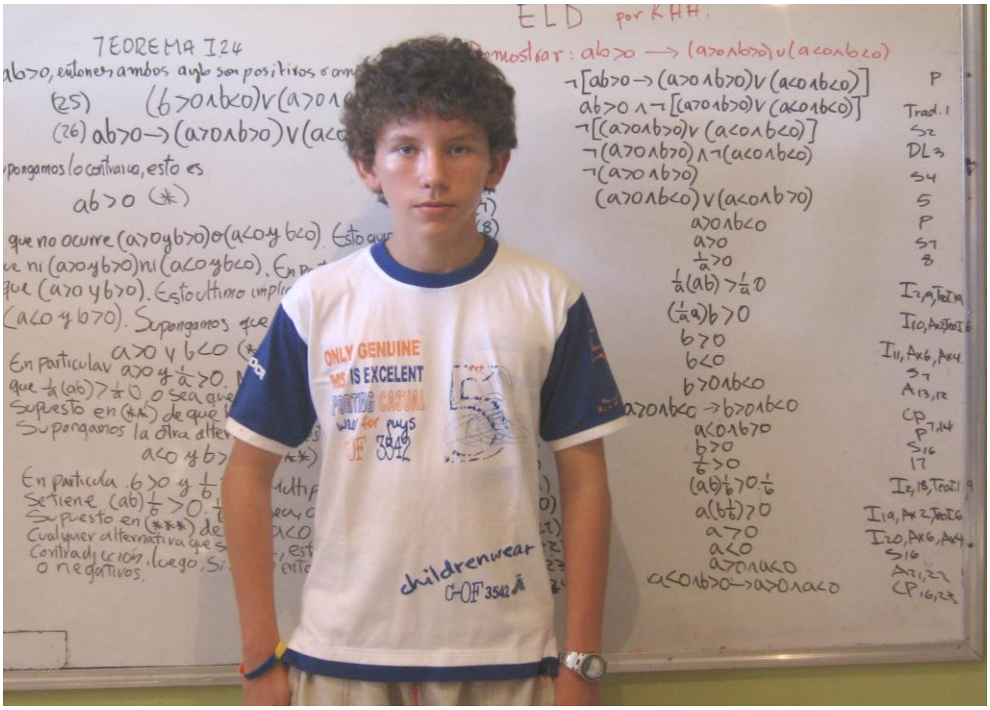
(8)(9)(10)(11)(12) Entonces multiplicando en (*) por $\frac{1}{a}$, se tiene $\frac{1}{a}\ (ab) > \frac{1}{a}\ 0$ o sea b > 0. **(13)(14) (15)**Pero esto contradice el supuesto en (**) de que b< 0.

(16) Supongamos ahora que se cumple la otra alternativa, esto es,

$$a < 0 \text{ y } b > 0\ . \qquad (***)$$

(17)(18)(19)(20) Multiplicando en (*) por $\frac{1}{b}$, tenemos que $a > 0$. **(21)(22)(23)** Pero esto contradice el supuesto en (***) de que $a < 0$.

(24)(25) Entonces vemos que cualquiera sea la alternativa que tomemos, ésta siempre nos conduce a una contradicción. Luego, $ab>o \Rightarrow (a>o \wedge b>o) \vee (a<o \wedge b<o)$.



Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario; esto es que

$$ab>0, \qquad (*)$$

y que no ocurre (a>0 y b> 0) o (a < 0 y b < 0). Es decir que ni (a>0 y b> 0) ni (a < 0 y
b < 0). En particular, tenemos que no ocurre que a>0 y b> 0. Esto último implica que (a>0 y b< 0) o (a < 0 y b > 0). Supongamos que se cumple la alternativa

$$a>0 \text{ y } b<0. \qquad (**)$$

Entonces multiplicando en (*) por $\frac{1}{a}$, se tiene $\frac{1}{a}(ab) > \frac{1}{a}\,0$ o sea b > 0. Pero esto contradice el supuesto en (**) de que b< 0.

Supongamos ahora que se cumple la otra alternativa, esto es,

$$a < 0 \text{ y } b > 0 . \qquad (***)$$

Multiplicando en (*) por $\frac{1}{b}$, tenemos que $a > 0$. Pero esto contradice el supuesto en (***) de que $a < 0$.

Entonces vemos que cualquiera sea la alternativa que tomemos, ésta siempre nos conduce a una contradicción. Luego,

$$ab > o \Rightarrow (a > o \wedge b > o) \vee (a < o \wedge b < o).$$

TEOREMA I.25 Si $a < c$ y $b < d$ entonces $a + b < c + d$.

ELD

Demostrar a + b < c + d

Traducción $(c + d) - (a + b) \in \Re^{+}$

(1)	**a < c**	**P**
(2)	**b < d**	**P**
(3)	$(c - a) \in \Re^{+}$	Traducción 1
(4)	$(d - b) \in \Re^{+}$	Traducción 2
(5)	$(c - a) + (d - b) \in \Re^{+}$	I 3,4 ,axioma 7
(6)	$(c - a) + (d - b) = (c + d) - (a + b)$	P
(7)	$(c + d) - (a + b) \in \Re^{+}$	I 5,6
(8)	$a + b < c + d$	traducción 7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2) Sean a, b, c y d números tales que $a < c$ y $b < d$. **(3)(4)** Entonces $c- a >o$ y $d- b >o$. **(5)**Por Axioma 7, sumando estos dos números positivos, se tiene (c - a) + (d - b) >o.**(6)**Pero (c - a) + (d - b) = (c + d)- (a + b). **(7)** Luego (c + d) – (a + b) > o; **(8)** o sea a + b < c + d.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sean a, b, c y d números con a < c y b < d. Entonces c- a >o y d- b >o. Por Axioma 7, (c - a) + (d - b) >o. Pero (c - a) + (d - b) = (c + d)- (a + b). Luego (c + d) – (a + b) > o; o sea a + b < c + d.

E J E R C I C I O S I. 2

1. No existe un número real *x* tal que $x^2 + 1 = 0$

I. **ELD**

Demostrar: $\neg(\exists x \in R)(x^2 + 1 = 0)$

(1)	$\exists x \in R : x^2 + 1 = 0$	P
(2)	$x^2 = -1$	1
(3)	$x^2 < 0$	2
(4)	$x^2 > 0$	Teorema I.20
(5)	$x^2 < 0 \wedge x^2 < 0$	A 3,4
□ (6)	$\neg(\exists x \in R)(x^2 + 1 = 0)$	RAA 1,5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que no existe un número real *x* tal que $x^2 + 1 = 0$ **.**

(1) Supongamos lo contrario, esto es, que existe un número real *x* tal que $x^2 + 1 = 0$.**(2)** Esto implica que $x^2 = -1$ **(3)**o sea $x^2 < 0$. **(4)(5)**Pero esto es un absurdo ya que $x^2 > 0$ (Teorema I.20). **(6)**Luego, no existe un número real *x* tal que $x^2 + 1 = 0$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que no existe un número real *x* tal que $x^2 + 1 = 0$ **.**
Supongamos lo contrario, esto es que existe un número real *x* tal que $x^2 + 1 = 0$. Esto implica que $x^2 = -1$ o sea $x^2 < 0$. Pero esto es un absurdo ya que $x^2 > 0$ (Teorema I.20). Luego, no existe un número real *x* tal que $x^2 + 1 = 0$.

2. La suma de dos números negativos es negativa.

I. **ELD**

Demostrar: $\boldsymbol{x< 0 \wedge y< 0 \Rightarrow x+ y < 0}$

(1)	$x< 0 \wedge y< 0$	P
(2)	$-x > 0 \wedge -y > 0$	I 1, Ax. 8
(3)	$(-x) + (-y) > 0$	I 2,Ax.7
(4)	$(-x) + (-y) = -(x+y)$	Ejercicio 5 I.3.3
(5)	$-(x+y) > 0$	I 3,4
(6)	$x+y < 0$	I 5, Ax. 8
(7)	$x< 0 \wedge y < 0 \Rightarrow x+ y < 0$	CP 1,6
□(8)	La suma de dos negativos es negativo	traducción 7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que la suma de dos números negativos es negativa.
(1) (2) Si $x< 0$ y $y< 0$, entonces $-x > 0$ y $-y > 0$ (Axioma 8). **(3)** Por el Axioma 7 podemos adicionarlos y obtener $(-x) + (-y) > 0$. **(4)**Pero $(-x) + (-y) = -(x+y)$; **(5)**por eso $-(x+y) > 0$, **(6) (7)**lo que significa que $x+y < 0$ (Axioma 8), **(8)**que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que la suma de dos números negativos es negativa.

Si $x< 0$ y $y< 0$, entonces $-x > 0$ y $-y > 0$ (Axioma 8). Por el Axioma 7 podemos adicionarlos y obtener $(-x) + (-y) > 0$. Pero

$$(-x) + (-y) = -(x+y);$$

por eso $-(x+y) > 0$, lo que significa que $x+y < 0$ (Axioma 8), que era lo que queríamos demostrar.

3. Si $a > 0$, entonces $1/a > 0$ y Si $a < 0$, entonces $1/a < 0$.

I. **ELD** Por RAA

Demostrar $\boldsymbol{a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0}$

(1)	$\neg(a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0)$	P
(2)	$a > 0 \ \wedge \ \neg(\frac{1}{a} > 0)$	Traducción 1
(3)	$a > 0 \wedge \frac{1}{a} < 0$	2
(4)	$\frac{1}{a}\, a < 0a$	I 3, Teo.I.19
(5)	$1 < 0$	I 4, Ax.6,Teo.I.6
□ (6)	$a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$	RAA 1,5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2)(3) Supongamos lo contrario, es decir que $a > 0$ y $\frac{1}{a} < 0$. **(4)** Entonces, por el Teorema I.19, $\frac{1}{a}.a < 0a$ **(5)** o sea $1 < 0$, que es un absurdo; **(6)** luego $\frac{1}{a} > 0$ si $a > 0$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario, es decir que $a > 0$ y $\frac{1}{a} < 0$. Entonces, por el Teorema I.19, $\frac{1}{a}a < 0a$ o sea $1 < 0$, que es un absurdo; luego si $a > 0$, entonces $\frac{1}{a} > 0$.

3b) Si $a < 0$ entonces $\frac{1}{a} < 0$

ELD Por RAA

Demostrar $a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$

(1)	$\neg(a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0)$	P
(2)	$a < 0 \wedge \neg(\frac{1}{a} < 0)$	Traducción 1

(3)	$a < 0 \wedge \frac{1}{a} > 0$	2
(4)	$a.\frac{1}{a} < a.0$	I 3, Teo.I.19
(5)	$1 < 0$	I 4, Ax.6,Teo.I.6
□ (6)	$a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$	RAA 1,5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2)(3) Supongamos lo contrario, es decir que $a < 0$ y $\frac{1}{a} > 0$. **(4)** Entonces, por el Teorema I.19, $a.\frac{1}{a} < a.0$ o sea $1 < 0$, que es un absurdo; por lo tanto, si $a < 0$, $\frac{1}{a} < 0$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario, es decir que $a < 0$ y $\frac{1}{a} > 0$. Entonces, por el Teorema I.19, $a.\frac{1}{a} < a.0$ o sea $1 < 0$, que es un absurdo; luego si $a < 0$, $\frac{1}{a} < 0$

4. Si $0 < a < b$, entonces $0 < b^{-1} < a^{-1}$

I. **ELD**

Demostrar $0 < a < b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$

(1)	$0 < a < b$	P
(2)	$0 < a \wedge 0 < b$	1
(3)	$0 < a$	S 2
(4)	$0 < b$	S2
(5)	$(\forall x)(x > 0 \to x^{-1} > 0)$	Ejercicio 4 (I.3.5)
(6)	$a > 0 \to a^{-1} > 0$	a/x, 5
(7)	$b > 0 \to b^{-1} > 0$	b/x, 5
(8)	$a^{-1} > 0$	PP 3,6
(9)	$b^{-1} > 0$	PP 4,7

(10)	$a^{-1} > 0 \wedge b^{-1} > 0$	A 8,9
(11)	$0.\, a^{-1} < a^{-1}.\, a < a^{-1} b$	I 1,8, Teo. I.19
(12)	$0 < 1 < a^{-1} b$	11
(13)	$0.\, b^{-1} < b^{-1} < a^{-1} b\, b^{-1}$	I 9,12 Teo. I.19
(14)	$0 < b^{-1} < a^{-1}$	13
□ (15)	$0 < a < b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$	CP 1,14

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Supongamos que

$$0 < a < b. \qquad \textbf{(I)}$$

(2) Entonces $0 < a$ y $0 < b$. **(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)** Por el ejercicio 5 (I.3.5), se tiene $a^{-1} > 0$
y $b^{-1} > 0$. **(11)** Multiplicando por a^{-1} en (I), por el Teorema I.19, se obtiene :

$$0a^{-1} < a^{-1}.\, a < a^{-1} b$$

(12) que es lo mismo que

$$0 < 1 < a^{-1} b \qquad \textbf{(II)}$$

(13) Multiplicando ahora por b^{-1} en (II), por el Teorema I.19, se obtiene :

$$0b^{-1} < b^{-1} < a^{-1} b\, b^{-1}$$

(14) que es lo mismo que $0 < b^{-1} < a^{-1}$, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos que

$$0 < a < b. \qquad \textbf{(I)}$$

Entonces $0 < a$ y $0 < b$. Por el ejercicio 5 (I.3.5), se tiene $a^{-1} > 0$ y $b^{-1} >$ 0. Multiplicando por a^{-1} en (I), por el Teorema I.19, se obtiene :

$$0a^{-1} < a^{-1}.\, a < a^{-1} b$$

que es lo mismo que

$$0 < 1 < a^{-1} b \qquad \textbf{(II)}$$

Multiplicando ahora por b^{-1} en (II), por el Teorema I.19, se obtiene :

$$0b^{-1} < b^{-1} < a^{-1} b\, b^{-1}$$

que es lo mismo que 0< b^{-1} < a^{-1}, que era lo que queríamos demostrar.

5. Si $a \le b$ y $b \le c$, entonces $a \le c$

ELD

Demostrar: $a \le b \wedge b \le c \Rightarrow a \le c$.

(1)	$a \le b \wedge b \le c$	P
(2)	$(a< b \wedge b< c) \vee (a = b \wedge b = c)$	traducción 1
(3)	$a< b \wedge b< c \Rightarrow a < c$	Teorema I.17
(4)	$a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$	P
(5)	$a < c \vee a = c$	DS 2,3,4
(6)	$a \le c$	traducción 5
□ (7)	$a \le b \wedge b \le c \Rightarrow a \le c$	CP 1,6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que si $a \le b$ y $b \le c$, entonces $a \le c$.

(1) Sean $a \le b$ y $b \le c$. **(2)** Esto significa que O $a< b$ y $b< c$ o $a = b$ y $b = c$.

(3) Si $a< b$ y $b< c$, entonces $a < c$ (Teorema I.17). **(4)**Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$. **(5)(6)(7)**Por lo tanto $a \le c$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que si $a \le b$ y $b \le c$, entonces $a \le c$.

Sean $a \le b$ y $b \le c$. Esto significa que O $a< b$ y $b< c$ o $a = b$ y $b = c$. Si $a< b$ y $b< c$, entonces $a < c$ (Teorema I.17). Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$. Por lo tanto $a \le c$.

6. Si $a \le b$ y $b \le c$, y $a = c$ entonces $b = c$.

I. **ELD**

Demostrar: $(a \le b \wedge b \le c) \wedge a = c \Rightarrow \boldsymbol{b = c}$

(1)	$(a \le b \wedge b \le c) \wedge a = c$	P
(2)	$a \le b \wedge b \le c$	S1
(3)	$a = c$	S1
(4)	$c \le b \wedge b \le c$	I 2,3
(5)	$(c< b \wedge b< c) \vee b = c$	traducción 4
(6)	$\neg(c< b \wedge b< c)$	P
(7)	$b = c$	TP5,6
□ (8)	$(a \le b \wedge b \le c) \wedge a = c \Rightarrow b = c$.	CP1,7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que si $a \le b$ y $b \le c$, y $a = c$ entonces $b = c$**.**
(1)(2)(3) Sea $a \le b$ y $b \le c$, y $a = c$. **(4)**Entonces $c \le b$ y $b \le c$. **(5)**Es decir, O $c< b$ y $b< c$ o $b = c$. **(6) (7)**Debido a que no es posible $c< b$ y $b< c$, entonces se deduce $b = c$, **(8)**que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que si $a \le b$ y $b \le c$, y $a = c$ entonces $b = c$**.**
Sea $a \le b$ y $b \le c$, y $a = c$. Entonces $c \le b$ y $b \le c$. Es decir, O $c < b$ y $b < c$ o $b = c$. Debido a que no es posible $c< b$ y $b< c$, entonces se deduce $b = c$, que era lo que queríamos demostrar.

7. *a*) Para todo real *a* y *b* tenemos $a^2 + b^2 \ge 0$.
b) Si *a* y *b* no son ambos cero, entonces $a^2 + b^2 > 0$

I. **ELD *a*)**

Demostrar: $(\forall a, b \in R) \Rightarrow a^2 + b^2 \geqslant 0$

(1)	$a, b \in R$	P
(2)	$a = 0 \vee a \ne 0$	1
(3)	$b = 0 \vee b \ne 0$	1
(4)	$a = 0 \Rightarrow a^2 = 0$	P
(5)	$a \ne 0 \Rightarrow a^2 > 0$	Teorema I.20
(6)	$a^2 = 0 \vee a^2 > 0$	DS 2,4,5
(7)	$a^2 \ge 0$	6
(8)	$b = 0 \Rightarrow b^2 = 0$	P
(9)	$b \ne 0 \Rightarrow b^2 > 0$	Teorema I.20
(10)	$b^2 = 0 \vee b^2 > 0$	DS 3,4,5
(11)	$b^2 \ge 0$	10
(12)	$a^2 + b^2 \ge 0$	I 7,11, Ax.7
(13)	$(\forall a, b \in R) \Rightarrow a^2 + b^2 \geqslant 0$	CP 1,12

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que para todo *a* y *b* reales, $a^2 + b^2 \ge 0$.

(1) Sean a y b reales cualesquiera. **(2)(3)**Entonces $a=0$ o $a\neq 0$ y $b=0$ o $b\neq 0$. **(4)(5)**Si $a=0$, entonces $a^2=0$ y si $a\neq 0$, entonces $a^2>0$ (Teorema I.20). **(6) (7)**Así que

$$a^2\geq 0 . \qquad (*)$$

(8)(9) De igual manera, si $b=0$, entonces $b^2=0$ y si $b\neq 0$, $b^2>0$.
(10)(11) De donde

$$b^2\geq 0 . \qquad (**)$$

(12) (13) De (*) y (**) se concluye que $a^2+b^2\geq 0$ (Axioma 7).

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que para todo a y b reales, $a^2+b^2\geq 0$.

Sean a y b reales cualesquiera. Entonces $a=0$ o $a\neq 0$ y $b=0$ o $b\neq 0$. Si $a=0$, entonces $a^2=0$ y si $a\neq 0$, entonces $a^2>0$ (Teorema I.20). Así que

$$a^2\geq 0 . \qquad (*)$$

e igual manera, si $b=0$, entonces $b^2=0$ y si $b\neq 0$, $b^2>0$. De donde

$$b^2\geq 0 . \qquad (**)$$

De (*) y (**) se concluye que $a^2+b^2\geq 0$ (Axioma 7).

I. **ELD *b*)**

Demostrar: $a\neq 0\wedge b\neq 0\Rightarrow a^2+b^2\mathbf{>0}$

(1)	$a\neq 0\wedge b\neq 0$	P
(2)	$a\neq 0$	S 1
(3)	$a\neq 0 \Rightarrow a^2>0$	Teorema I.20
(4)	$a^2>0$	PP 2,3
(5)	$b\neq 0$	S 1
(6)	$b\neq 0\Rightarrow b^2>0$	Teorema I.20
(7)	$b^2>0$	PP 5,6
(8)	$a^2+b^2>0$	I 4,7,Ax.7

□ (9) $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > 0$ CP1,8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a^2 > 0$ y $b^2 > 0$ (Teorema I.20) y a^2 + $b^2 > 0$ (Axioma 7).

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a^2 > 0$ y $b^2 > 0$ (Teorema I.20) y a^2 + $b^2 > 0$ (Axioma 7).

8. No existe un número real *a* tal que $x \leq a$ para todo real *x*.

ELD por RAA

Demostrar: No existe un número real a tal que x ≤ a para todo real x.

Traducción: $\rceil(\exists a \in \Re)(\forall x)(x \leq a)$

(1)	$(\exists a \in \Re)(\forall x)(x \leq a)$	P
(2)	$2a \leq a$	$2a$ /x,1
(3)	$2 \leq 1$	2
(4)	$\rceil(\exists a \in \Re)(\forall x)(x \leq a)$	RAA 1,3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Supongamos lo contrario; esto es, que existe un número real *a* tal que $x \leq a$ para todo real *x*. **(2)** En particular, para $x = 2a$ se tiene $2a \leq a$; es decir que $2 \leq 1$, **(3)(4)** lo cual evidentemente es una contradicción.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario; esto es, que existe un número real *a* tal que $x \leq a$ para todo real *x*. En particular, para $x = 2a$ se tiene $2a \leq a$; es decir $2 \leq 1$, lo cual evidentemente es una contradicción.

9. Si *x* tiene la propiedad $0 \leq x < h$ para todo número real positivo *h*, entonces $x = 0$.

I. **ELD**

Demostrar: $x = 0$

Por RRA

(1)	$\mathbf{0 \leq x < h, \ \forall h > 0}$	**P**
(2)	$x \neq 0$	P
(3)	$x > 0 \lor x < 0$	I 2, Ax.8
(4)	$x > 0$	P
(5)	$0 \leq x < x$	x/h, 1
(6)	$\neg(x > 0)$	RAA 4,5
(7)	$x < 0$	P
(8)	$-x > 0$	7
(9)	$0 \leq x < -x$	$-x/h$, 1
(10)	$\neg(x < 0)$	RAA 7,9
(11)	$\neg(x > 0) \land \neg(x < 0)$	A 6,10
(12)	$\neg(x > 0 \lor x < 0)$	DL 11
(13)	$(x > 0 \lor x < 0) \land \neg(x > 0 \lor x < 0)$	A 3,12
□ (14)	$x = 0$	RAA 2,13

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) (2) Sea

$$0 \leq x < h, \ \forall h > 0 , \quad (*)$$

y supongamos lo contrario, esto es, $x \neq 0$. **(3)**Entonces, por Axioma 8,

$$x > 0 \text{ o } x < 0 . \quad (**)$$

(4) (5) Si $x > 0$, entonces especificando x para h en (*) , se obtiene $0 \leq x < x$, lo cual es un absurdo. **(6)**Por lo tanto, no es posible $x > 0$. **(7) (8)**Si $x < 0$, entonces $-x > 0$ **(9)** y especificando en (*) $-x$ par h, se obtiene $0 \leq x < -x$, lo cual también es un absurdo . **(10)**Por lo tanto, tampoco es posible $x < 0$.**(11) (12)**Así que no es posible la disjunciòn $x > 0$ o $x < 0$. **(13)** Pero esto contradice (**).**(14)**Luego $x = 0$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea

$$0 \leq x < h, \ \forall h > 0 , \quad (*)$$

y supongamos lo contrario, esto es, $x \neq 0$. Entonces, por Axioma 8,

$$x > 0 \text{ o } x < 0 . \quad (**)$$

Si $x > 0$, entonces especificando x para h en (*) , se obtiene $0 \leq x < x$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto, no es posible $x > 0$. Si $x < 0$, entonces $-x > 0$ y especificando en (*) $-x$ para h, se obtiene $0 \leq x < -x$, lo cual también es un absurdo . Por lo tanto, tampoco es posible $x < 0$. Así que no es posible la disyunción $x > 0$ o $x < 0$. Pero esto contradice (**). Luego *x = 0.*

10. $ab<o \Leftrightarrow (a>o \wedge b<o) \vee (a<o \wedge b>o)$

ELD

Demostrar $ab<o \Leftrightarrow (a>o \wedge b<o) \vee (a<o \wedge b>o)$

$\Leftarrow$)	**(1)**	$(a>o \wedge b<o) \vee (a<o \wedge b>o)$	P
	(2)	$a>o \wedge b<o$	P
	(3)	$a \in P \wedge -b \in P$	traducción 2
	(4)	$a(-b) \in P$	I 3, Axioma 7
	(5)	$a(-b) = -(ab)$	teorema I.12
	(6)	$-(ab) \in P$	I 4,5
	(7)	$ab<o$	traducción 6
	(8)	$a>o \wedge b<o \Rightarrow ab<o$	CP 2,7
	(9)	$a<o \wedge b>o$	P
	(10)	$-a \in P \wedge b \in P$	traducción 9
	(11)	$(-a)b \in P$	I 10, Axioma 7
	(12)	$(-a)b = -(ab)$	Teorema I.12
	(13)	$-(ab) \in P$	I 11,12
	(14)	$ab< o$	traducción 13
	(15)	$a<o \wedge b>o \Rightarrow ab< o$	CP 9,14
	(16)	$ab<o \vee ab< o$	DS 1,8,15
	(17)	$ab<o$	Dp 16
$\square_1$	(18)	$(a>o \wedge b<o) \vee (a<o \wedge b>o) \Rightarrow ab<o$	CP 1,17
$\Rightarrow$)	(19)	$ab<o$	P
	(20)	$-(ab) \in P$	traducción 19
	(21)	$-(ab) > o$	traducción 20
	(22)	$(-a)b > o$	I 12, 21
	(23)	$(-a>o \wedge b>o) \vee (-a<o \wedge b<o)$	22
	(24)	$(a<o \wedge b>o) \vee (a>o \wedge b<o)$	23
	(25)	$(a>o \wedge b<o) \vee (a<o \wedge b>o)$	Cl 23
$\square_2$	(26)	$ab<o \Rightarrow (a>o \wedge b<o) \vee (a<o \wedge b>o)$	CP 19,25

□ (27) ab<o $\Leftrightarrow$ (a>o $\wedge$ b<o) $\vee$ (a<o $\wedge$ b>o) LB 18,26

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que ab<o $\Leftrightarrow$ (a>o $\wedge$ b<o) $\vee$ (a<o $\wedge$ b>o) .

$\Leftarrow$) **(1)**Sea (a>o $\wedge$ b<o) $\vee$ (a<o $\wedge$ b>o) . **(2)**Supongamos la alternativa a>o $\wedge$ b<o. **(3)(4)**Entonces a(-b) es positivo. **(5)(6)**Esto implica que $-(ab)$ es positivo debido a que a(-b) $=-(ab)$;**(7)** **(8)**luego ab<o.

(9) Supongamos ahora la otra alternativa, esto es, a<o $\wedge$ b>o. **(10)** **(11)**Entonces $(-a)b$ es positivo. **(12)** Pero $(-a)b=-(ab)$, **(13)**luego $-(ab)$ es positivo. **(14)** **(15)**Es decir ab< o . **(16)** **(17)**Entonces cualquiera sea la alternativa que se considere, ya sea (a>o $\wedge$ b<o) o (a<o $\wedge$ b>o), el resultado es el mismo, a saber, ab< o. Por lo tanto

(a>o $\wedge$ b<o) $\vee$ (a<o $\wedge$ b>o) $\Rightarrow$ ab<o (*)

$\Rightarrow$) **(19)**Sea ahora ab<o. **(20)**Entonces $-(ab)$ es positivo, **(21)**es decir, $-(ab)>$ o. **(22)**Pero $(-a)b=-(ab)$, luego $(-a)b>$ o . **(23)** Esto implica (- a>o $\wedge$ b >o) o (- a<o $\wedge$ b< o), **(24)** es decir, (a<o $\wedge$ b >o) o (a>o $\wedge$ b< o). **(25)** O sea (a>o $\wedge$ b< o) $\vee$ (a<o $\wedge$ b >o). **(26)** Por lo tanto

ab<o$\Rightarrow$ (a>o $\wedge$ b< o) $\vee$ (a<o $\wedge$ b >o) (**)

(27) De (*) y (**) se tiene la equivalencia ab<o $\Leftrightarrow$ (a>o $\wedge$ b<o) $\vee$ (a<o $\wedge$ b>o), que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que ab<o $\Leftrightarrow$ (a>o $\wedge$ b<o) $\vee$ (a<o $\wedge$ b>o) .

$\Leftarrow$) Sea (a>o $\wedge$ b<o) $\vee$ (a<o $\wedge$ b>o) .

Supongamos la alternativa a >o $\wedge$ b <o. Entonces a(-b) es positivo. Esto implica que $-(ab)$ es positivo debido a que a(-b) $=-(ab)$; luego ab < o.
Supongamos ahora la otra alternativa, esto es, a < o $\wedge$ b > o. Entonces $(-a)b$ es positivo. Pero $(-a)b=-(ab)$, luego $-(ab)$ es positivo. Es decir ab < o.

Entonces cualquiera sea la alternativa que se considere, ya sea (a>o $\wedge$ b<o) o (a<o $\wedge$ b>o), el resultado es el mismo, a saber, ab < o. Por lo tanto

$$(a>o \wedge b<o) \vee (a<o \wedge b>o) \Rightarrow ab<o \qquad (*)$$

$\Rightarrow$) Sea ahora ab<o. Entonces $-(ab)$ es positivo, es decir, $-(ab) >$ o. Pero $(-a)b = -(ab)$, luego $(-a)b >$ o . Esto implica (- a > o $\wedge$ b > o) o (- a<o $\wedge$ b< o), es decir, (a<o $\wedge$ b >o) o (a>o $\wedge$ b< o). O sea (a>o $\wedge$ b< o) o (a<o $\wedge$ b >o). Por lo tanto

$$ab < o \Rightarrow (a > o \wedge b < o) \vee (a < o \wedge b > o) \qquad (**)$$

De (*) y (**) se tiene que ab<o $\Leftrightarrow$ (a>o $\wedge$ b<o) $\vee$ (a<o $\wedge$ b>o), que era lo que queríamos demostrar.

11. No existe un entero entre 0 y 1

ELD por RAA

Demostrar : no existe un entero entre 0 y 1

Traducción : $\neg(\exists\, a \in Z)(0 < a < 1)$

(1)	$(\exists\, a \in Z)(0 < a < 1)$	**P**
(2)	$A = \{n \,/\, n \geq a\} \wedge S = \{a, a+1, a+2, \ldots\}$	P
(3)	$S \subseteq A$ puesto que:	2
	$m \in S \rightarrow m \geq a$	
	$m \geq a \rightarrow m \in A$	
	$\therefore\ m \in S \rightarrow m \in A$	
(4)	$a \in S$	2
(5)	$(\forall\, k \in A)(k \in S \Rightarrow k+1 \in S)$	2
(6)	$(S \subseteq A) \wedge [a \in S \wedge (\forall\, k \in A)(k \in S \Rightarrow k+1 \in S)] \Rightarrow S = A$	Ax.de Inducción
(7)	$(S \subseteq A) \wedge [a \in S \wedge (\forall\, k \in A)(k \in S \rightarrow k+1 \in S)]$	A 3,4,5
(8)	$S = A$	PP 6,7
(9)	$a < 1$	S1
(10)	$a + k < k + 1$	9

(11)	$k + 1 < a + k + 1$	P
(12)	$a + k < k + 1 < a + k + 1$	10,11
(13)	$k + 1 \notin S$	2,12
(14)	$a < k + 1$	9
(15)	$k + 1 \in A$	2,14
(16)	$k + 1 \in S$	I 8,15
(17)	$k + 1 \in S \wedge k + 1 \notin S$	A 13,16
□ (18)	$\neg(\exists a \in Z)(0 < a < 1)$	RAA 1, 17

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Supongamos lo contrario; es decir, existe un entero a tal que $0 < a < 1$.

(2) Sea $A = \{ n \in Z \ / \ n \geq a\}$ y $S = \{a, a+1, a+2, ...\}$

(3) Afirmo que

$$S \subseteq A; \qquad \textbf{(I)}$$

ya que si $m \in S$, entonces $m \geq a$; y por lo tanto $m \in A$. **(4)** Por definición de S, se tiene claramente que

$$a \in S \qquad \textbf{(II)}$$

(5) También es claro que

$$(\forall k \in A)(k \in S \rightarrow k+1 \in S) \qquad \textbf{(III)}$$

(6)(7)(8) De (I), (II) y (III), y por el axioma de inducción se deduce

$$S = A \qquad \textbf{(IV)}$$

(9) (10) Puesto que por hipótesis $a < 1$, es claro que

$$a + k < k + 1 \qquad \textbf{(V)}$$

(11) También es claro que

$$k + 1 < a + (k + 1) \qquad \textbf{(VI)}$$

(12) De (V) y (VI) se tiene que

$$a + k < k + 1 < a + (k + 1) \qquad \textbf{(VII)}$$

(13) De la anterior desigualdad y por definición de S, se deduce que

$$k + 1 \notin S \qquad \textbf{(VIII)}$$

(14) Ahora $a < k + 1$ ya que, por hipótesis, $a < 1$.

(15) Por lo tanto

$$k + 1 \in A \qquad \textbf{(IX)}$$

(16) De (IV) y (VIII) se obtiene

$$k + 1 \in S$$

(17) Pero esto contradice el resultado obtenido en (VIII).

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario; es decir, existe un entero a tal que $0 < a < 1$.

Sea $A = \{ n \in Z \ / \ n \geq a\}$ y $S = \{a, a+1, a+2, ...\}$

Afirmo que

$$S \subseteq A; \qquad \textbf{(I)}$$

ya que si $m \in S$, entonces $m \geq a$; y por lo tanto $m \in A$. Por definición de S, se tiene claramente que

$$a \in S \qquad \textbf{(II)}$$

También es claro que

$$(\forall k \in A)(k \in S \rightarrow k+1 \in S) \qquad \textbf{(III)}$$

De (I), (II) y (III), y por el axioma de inducción se deduce

$$S = A \qquad \textbf{(IV)}$$

Puesto que por hipótesis $a < 1$; es claro que

$$a + k < k + 1 \qquad \textbf{(V)}$$

También es claro que

$$k + 1 < a + (k + 1) \qquad \textbf{(VI)}$$

De (V) y (VI) se tiene que

$$a + k < k + 1 < a + (k + 1) \qquad \textbf{(VII)}$$

De la anterior desigualdad y por definición de S, se deduce que

$k + 1 \notin S$ **(VIII)**

Ahora $a < k + 1$ ya que, por hipótesis, $a < 1$.

Por lo tanto

$k + 1 \in A$ **(IX)**

De (IV) y (VIII) se obtiene

$k + 1 \in S$

Pero esto contradice el resultado obtenido en (VIII).

12. Una colección de 500 números reales posee la siguiente propiedad: cualquier número de esta colección es mayor que $\frac{1}{5}$ de la suma de los restantes. Encontrar la cantidad mínima de números negativos que pertenecen a la colección.

I ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA.

1. Traducción del enunciado del problema al lenguaje matemático.

   $$S = \left\{x_1 x_2,.,x_{500} \middle| \; x_n > \frac{1}{5}\left(x_1 + . + x_{n-1} + x_{n+1} + . + x_{500}\right) \right\}$$

2. Forma de trabajo. Cómo la respuesta es 7 entonces:
   a. Verifico que la colección de siete –1′s pertenece a la colección S; lo cual es cierto ya que $-1 > \frac{1}{5}(-1-1-1-1-1-1) = -\frac{6}{5}$
   b. Demuestro que la cantidad mínima de negativos de S es 7.

3. **ELD**

   Demostrar: la cantidad mínima de números negativos de S es 7.

   por RAA

(1)	$x_n \in s \leftrightarrow x_n > \frac{1}{5}(x_1 + x_2 + .. + x_{n-1} + x_{n+1} + .. + x_{500})$	**P**
(2)	La cantidad mínima de negativos de S es menor que 7	P
(3)	$x_1, x_2, \ldots, x_6 \in S;\ x_k < 0$	P, 2
(4)	$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_6 \wedge o \le x_7 \le x_8 \le \ldots \le x_{500}$	ordenando S
(5)	$x_1 \le x_2,\ x_1 \le x_3,\ x_1 \le x_4,\ x_1 \le x_5,\ x_1 \le x_6$	4
(6)	$5x_1 \le x_2 + x_3 + \ldots + x_6$	5

(7) $x_1 \leq \frac{1}{5}(x_2 + x_3 + \ldots + x_6)$ 6

(8) $x_7 + x_8 + \ldots + x_{500} > 0$ 4

(9) $x_1 < \frac{1}{5}(x_2 + x_3 + \ldots + x_6 + x_7 + \ldots + x_{500})$ 7,8

(10) $x_1 > \frac{1}{5}(x_2 + x_3 + .. + x_{500})$ 1/n ,1

(11) $x_1 < \frac{1}{5}(x_2 + x_3 + .. + x_{500}) \wedge x_1 > \frac{1}{5}(x_2 + x_3 + .. + x_{500})$ A 9,10

(12) No es cierto que la cantidad mínima de números negativos de S es menor que 7 RAA 2,11

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) Supongamos que la cantidad mínima de números negativos de S es menor que 7. **(3)** Sean $x_1, x_2, \ldots, x_6$ estos números. **(4)** Ordenando los números de la colección obtenemos $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_6$ y $o \leq x_7 \leq \ldots \leq x_{500}$. **(5)(6)(7)** Sumando las desigualdades $x_1 \leq x_2, x_1 \leq x_3, \ldots, x_1 \leq x_6$, obtenemos $x_1 \leq \frac{1}{5}(x_2 + .. + x_6)$. **(8)(9)** y con mayor razón $x_1 < \frac{1}{5}(x_2 + x_3 + \ldots + x_6 + x_7 + \ldots + x_{500})$; **(10)(11)** lo que contradice la hipótesis $x_1 > \frac{1}{5}(x_2 + .. + x_{500})$. **(12)** Por lo tanto, S tiene al menos 7 números negativos.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos que la cantidad mínima de números negativos de S es menor que 7. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_6$ estos números. Ordenando los números de la colección obtenemos $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_6$ y $o \leq x_7 \leq \ldots \leq x_{500}$.
Sumando las desigualdades

$$x_1 \leq x_2, x_1 \leq x_3, \ldots, x_1 \leq x_6,$$

obtenemos $$x_1 \leq \frac{1}{5}(x_2 + .. + x_6)$$

y con mayor razón $$x_1 < \frac{1}{5}(x_2 + x_3 + \ldots + x_6 + x_7 + \ldots + x_{500});$$

lo que contradice la hipótesis $x_1 > \frac{1}{5}(x_2 + .. + x_{500})$. Por lo tanto, S tiene al menos 7 números negativos.

E J E R C I C I O S II.

1. Sea el conjunto C = {a + b / a∈A y b∈B}. Si A y B tienen cada uno supremo, entonces C tiene supremo, y Sup C= Sup A + Sup B.

I. **ELD**

Demostrar Sup C = SupA + Sup B

(1)	**A tiene Supremo**	**P**
(2)	**B tiene Supremo**	**P**
(3)	**C = {a+b / a∈A y b∈B}**	**P**
(4)	c∈C $\Rightarrow$ c = a + b, con a∈A y b∈B	3
(5)	a ≤ Sup A $\wedge$ b ≤ Sup B	1,2
(6)	c ≤ Sup A + Sup B	4,5
(7)	Sup A + Sup B es una cota superior de C	6
(8)	C tiene Supremo y Sup C ≤ Sup A + Sup B	7, Axioma 10
(9)	S tiene Supremo $\Rightarrow$ $x >$ Sup S-h, p.a. $x\in$S,$\forall h>0$	Teorema
(10)	A tiene supremo $\Rightarrow$ a > Sup A - $\frac{1}{n}$	A/ S, a/x, $\frac{1}{n}$ / h , 9
(11)	B tiene Supremo $\Rightarrow$ b > Sup B - $\frac{1}{n}$,	B/S b/x, $\frac{1}{n}$ /h, 9
(12)	a > Sup A - $\frac{1}{n}$	PP 1,10
(13)	b > Sup B - $\frac{1}{n}$	PP 2,11
(14)	a + b >Sup A + Sup B - $\frac{2}{n}$	12,13
(15)	Sup A + Sup B < a + b + $\frac{2}{n}$	14
(16)	a + b ≤ Sup C	4
(17)	SupA + Sup B < a + b + $\frac{2}{n}$ ≤ Sup C + $\frac{2}{n}$	15,16
(18)	Sup C ≤ Sup A + Sup B	7
(19)	Sup C ≤ Sup A + Sup B < Sup C + $\frac{2}{n}$	17,18

(20) $a \le x \le a + \dfrac{y}{n} \Rightarrow x = a \; ; n \ge 1$ Teorema

(21) $\text{Sup } C \le \text{Sup } A + \text{Sup } B < \text{Sup } C + \dfrac{2}{n} \Rightarrow \text{Sup } C = \text{Sup } A + \text{Sup} B$

Sup C / a , Sup A+ Sup B / x, 2/y en 20

(22) Sup C= Sup A + Sup B PP/ 9,21

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2) Supongamos que A y B tienen cada uno Supremo. **(3)(4)** Si $c \in C$, entonces $c = a + b$, donde $a \in A$ y $b \in B$. **(5)(6)** Por lo tanto $c \le \text{Sup } A + \text{Sup } B$. **(7)** Esto quiere decir que Sup A + Sup B es una cota superior de C. **(8)** De esto podemos afirmar que C tiene Supremo y que $\text{Sup } C \le \text{Sup } A + \text{Sup } B$.

(9)(10)(11)(12)(13) Ahora, sea n un entero positivo cualquiera. Por el teorema I.32 (con $h = \dfrac{1}{n}$) existe un a en A y un b en B tal que $a > \text{Sup } A - \dfrac{1}{n}$, $b > \text{Sup } B - \dfrac{1}{n}$ **(14)(15)(16)(17)** Sumando estas desigualdades, obtenemos $a + b > \text{Sup } A + \text{Sup } B - \dfrac{2}{n}$ y $\text{Sup } A + \text{Sup } B < a + b + \dfrac{2}{n} < \text{Sup } C + \dfrac{2}{n}$ ya que $a+b \le \text{Sup } C$.

(18)(19)(20) Puesto que $\text{Sup } C \le \text{Sup } A + \text{Sup } B$, hemos demostrado que $\text{Sup } C \le \text{Sup } A + \text{Sup } B < \text{Sup } C + \dfrac{2}{n}$ para todo entero $n \ge 1$.

(21)(22) Por el teorema I. 31 tenemos que Sup C = Sup A + Sup B.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos que A y B tienen cada uno extremo superior. Si $c \in C$, entonces $c = a + b$, donde $a \in A$ y $b \in B$. Por lo tanto $c \le \text{Sup } A + \text{Sup } B$. Esto quiere decir que Sup A + Sup B es una cota superior de C. De esto podemos afirmar que C tiene Supremo y que $\text{Sup } C \le \text{Sup } A + \text{Sup } B$.

Ahora, sea n un entero positivo cualquiera. Por el teorema I.32 (con $h = \dfrac{1}{n}$) existe un a en A y un b en B tal que $a > \text{Sup } A - \dfrac{1}{n}$, $b > \text{Sup } B - \dfrac{1}{n}$.

Sumando estas desigualdades, obtenemos $a + b > \text{Sup } A + \text{Sup } B - \dfrac{2}{n}$ y

Sup A + Sup B < a + b + $\frac{2}{n}$ < Sup C + $\frac{2}{n}$ ya que a + b ≤ Sup C.

Puesto que Sup C ≤ Sup A + Sup B, hemos demostrado que Sup C ≤ Sup A + Sup B < Sup C + $\frac{2}{n}$ para todo entero n ≥ 1. Por el teorema I. 31 tenemos que Sup C = Sup A + Sup B.

2. Si A y B son subconjuntos de $\Re^+$ acotados Superiormente y C ={xy / x∈A, y∈B} entonces Sup C = Sup A. Sup B.

I. **ELD**

Demostrar: Sup C = Sup A. Sup B

(1)	**A subconjunto de $\Re^+$ acotado superiormente**	**P**
(2)	**B Subconjunto de $\Re^+$ acotado superiormente.**	**P**
(3)	**C = {*xy* / *x*∈A, *y*∈B}**	**P**
(4)	a = Sup A	1, Axioma 10
(5)	b = Sup B	2, Axioma 10
(6)	c∈C ⇒ c = xy	3
(7)	o < x ≤ a	4
(8)	o < y ≤ b	5
(9)	o < xy ≤ ab ∀x∈A, ∀y∈B	7,8
(10)	C está acotado superiormente y ab es cota superior	9
(11)	o ≤ ab – xy = a(b - y) + y (a – x)	9
(12)	a(b - y) + y (a – x) ≤ (a + 1)(b - y)+ (b + 1)(a - x)	P
(13)	Dado h > o ∃ x_1 ∈ A: o ≤ a – x_1 < h Dado s > o ∃ y_1 ∈ B: o ≤ b – y_1 < s	traducción 4,5
(14)	∃ x_1 ∈A ∧ ∃y_1 ∈B: o ≤ a- x_1 < $\frac{E}{2(b+1)}$ o ≤ b – y_1 < $\frac{E}{2}.\frac{1}{(a+1)}$	 $\frac{E}{2(b+1)}$ / h ,13 $\frac{E}{2(a+1)}$ / s , 13
(15)	o ≤ ab -xy ≤ (a + 1)(b - y) + (b + 1)(a - x)	11,12
(16)	o ≤ ab -x_1y_1 ≤ (a + 1)(b - y_1)+ (b + 1)(a - x_1)	x_1/ x, y_1/ y , 15
(17)	o ≤ ab -x_1y_1 < (a+1)$\frac{E}{2(a+1)}$ + (b+1)$\frac{E}{2(b+1)}$	14, 16
(18)	o ≤ ab -x_1y_1< $\frac{E}{2}$+ $\frac{E}{2}$= E	17
(19)	ab – E < x_1y_1 ≤ ab	18 ,9

(20) ab = Sup C 6,19
(21) Sup C= Sup A. SupB 4,5,20

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)
En efecto, sean a = Sup A, b=Sup B entonces, puesto que:

$$o < x \leq a \text{ para todo } x \in A$$
$$o < y \leq b \text{ para todo } x \in B$$

(9) Se tiene: $o < xy \leq ab$, para todo $x \in A$, para todo $y \in B$.
(10) Con lo cual C está acotado superiormente y ab es una cota superior.
(11)(12) Además

$$o \leq ab - xy = a(b - y) + y(a - x) \leq (a+1)(b-y) + (b+1)(a-x) \qquad \textbf{(I)}$$
para todo $x \in A$, para todo $y \in B$.

(13)(14) Puesto que a y b son extremos superiores de A y B respectivamente, dado eso existen $x_1 \in A$, $y_1 \in B$ tales que

$$o \leq a - x_1 < \frac{E}{2(b+1)}$$
$$\textbf{(II)}$$
$$o \leq b - y_1 < \frac{E}{2(a+1)}$$

(15)(16)(17)(18) De (I) y (II) se tiene que

$$o \leq ab - x_1 y_1 < E$$

(19) y por lo tanto

$$ab - E < x_1 y_1 \leq ab$$

(20)(21) o sea ab = Sup C y Sup C = Sup A. SupB

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

En efecto, sean a = Sup A, b=Sup B entonces, puesto que:

$$o < x \leq a \text{ para todo } x \in A$$
$$o < y \leq b \text{ para todo } x \in B$$

Se tiene: $o < xy \leq ab$, para todo $x \in A$, para todo $y \in B$. Con lo cual C está acotado superiormente y ab es una cota superior. Además

$$o \leq ab - xy = a(b - y) + y(a - x) \leq (a+1)(b-y) + (b+1)(a-x) \quad \textbf{(I)}$$

para todo $x \in A$, para todo $y \in B$.

Puesto que a y b son extremos superiores de A y B respectivamente, dado eso existen $x_1 \in A$, $y_1 \in B$ tales que

$$o \leq a - x_1 < \frac{E}{2(b+1)}$$

(II)

$$o \leq b - y_1 < \frac{E}{2(a+1)}$$

De (I) y (II) se tiene que

$$o \leq ab - x_1 y_1 < E$$

o sea

$$ab - E < x_1 y_1 \leq ab$$

y por lo tanto ab = Sup C y Sup C = Sup A. SupB

3. El producto de dos enteros impares es impar.

I ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRÁCTICA.

a) Traducción al lenguaje Lógico:
x e y son impares $\Rightarrow$ xy es impar.

b) Interpretación. El razonamiento:
x es impar
y es impar
$\triangleright$ xy es impar
es válido.

c) **ELD**

Demostrar: xy es impar

Traducción: $xy = 2k+1$ p.a.k $\in Z$

(1)	**x es impar**	**P**
(2)	**y es impar**	**P**
(3)	$x = 2n+1$, p.a.$n\in Z$	traducción (1)
(4)	$y = 2m+1$, p.a.$m\in Z$	traducción (2)
(5)	$xy = (2n+1)(2m+1)$	I 3,7
(6)	$(2n+1)(2m+1) = 2(2nm+n+m)+i$	P
(7)	$k = 2nm+n+m$	P
(8)	$(2n+1)(2m+1)= 2k+1$	I 6,7
(9)	$xy = 2k+1$	I 5,8
(10)	xy es impar	traducción 9

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2) Sean x e y enteros impares. **(3)(4)** Por definición de número impar, existen enteros n y m tales que $x = 2n+1$, $y = 2m+1$. **(5)(6)** Entonces:

$$\begin{aligned} xy &= (2n+1)(2m+1) \\ &= 2(2nm+n+m)+1 \end{aligned}$$

(7)(8)(9)(10) Haciendo $k = 2nm+n+m$; se obtiene $xy = 2k+1$ con $k\in Z$; es decir que xy es un entero impar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sean x e y enteros impares. Por definición de número impar, existen enteros n y m tales que $x = 2n+1$, $y = 2m+1$. Entonces:

$$\begin{aligned} xy &= (2n+1)(2m+1) \\ &= 2(2nm+n+m)+1 \end{aligned}$$

Haciendo $k = 2nm+n+m$, se obtiene $xy = 2k+1$ con $k\in Z$; y esto quiere decir que xy es un entero impar.

GENERALIZACIÓN:

4. Para cualquier $n > 2$ .El producto de n enteros impares es impar

I. **ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRÁCTICA**.

a) Simbolización de la proposición

P_n : El producto de n enteros impares es impar.

Si $\{a_1, a_2, ., a_n\}$ es un conjunto de n enteros impares

Entonces $p_n : a_1 \times a_2 \times ... \times a_n$ es impar. Para $n > 2$

b) Hay que demostrar (Inducción matemática) :

1) $p_2 : a_1 \times a_2$ es impar
2) $p_k \Rightarrow p_{k+1}$ es cierta

c) Ya está demostrado p_2. Demostremos $p_k \Rightarrow p_{k+1}$

ELD

Demostrar : $\mathbf{a_1 \times a_2 \times ... \times a_k}$ **es impar** $\Rightarrow$ $\mathbf{a_1 \times a_2 \times ... \times a_k \times a_{k+1}}$ **es impar.**

(1)	$a_1 \times a_2 \times ... \times a_k$ es impar	P
(2)	a_{k+1} es impar	P
(3)	$(a_1 \times a_2 \times ... \times a_k) \times a_{k+1}$ es impar	1,2,c)
(4)	$a_1 \times a_2 \times ... \times a_k \times a_{k+1} = (a_1 \times a_2 \times ... \times a_k) \times a_{k+1}$	
(5)	$a_1 \times a_2 \times ... \times a_k \times a_{k+1}$ es impar	I 3,4
(6)	$a_1 \times a_2 \times ... \times a_k$ es impar $\Rightarrow$ $a_1 \times a_2 \times ... \times a_k \times a_{k+1}$ es impar	P1,4

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Sean $a_1\ a_2 ,.., a_k , a_{k+1}$ enteros impares. Por hipótesis, $a_1 \times a_2 \times ... \times a_k$ es impar. **(2)** **(3)** Como a_{k+1} es impar, entonces $(a_1 \times a_2 \times ... \times a_k) \times a_{k+1}$ es impar, ya que hemos probado que el producto de dos números impares es impar.

(4) Pero $a_1 \times a_2 \times ... \times a_k \times a_{k+1} = (a_1 \times a_2 \times ... \times a_k) \times a_{k+1}$.

(5) **(6)** Luego, $a_1 \times a_2 \times ... \times a_k \times a_{k+1}$ es impar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sean $a_1\ a_2 ,.., a_k , a_{k+1}$ enteros impares. Por hipótesis, $a_1 \times a_2 \times ... \times a_k$ es impar. Como a_{k+1} es impar, entonces $(a_1 \times a_2 \times ... \times a_k) \times a_{k+1}$ es impar, ya que hemos probado que el producto de dos números impares es impar. Pero $a_1 \times a_2 \times ... \times a_k \times a_{k+1} = (a_1 \times a_2 \times ... \times a_k) \times a_{k+1}$.

Luego, $a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_k \times a_{k+1}$ es impar.

5. $\sqrt{2}$ es un número irracional

ELD

Demostrar: $\sqrt{2}$ es un número irracional

(Por RAA)

(1)	$\sqrt{2}$ no es un número irracional	P
(2)	$\sqrt{2}$ es racional	traducción 1
(3)	$\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$ con (m, n) = 1	traducción 2
(4)	$2 = \dfrac{m^2}{n^2}$	3
(5)	$m^2 = 2n^2$	4
(6)	m^2 es divisible por 2	5
(7)	m^2 es divisible por 2 $\Rightarrow$ m es divisible por 2	P
(8)	m es divisible por 2	PP 6,7
(9)	m = 2k p.a. k $\in$Z	traducción 8
(10)	$2n^2 = 4k^2$	I 5,9
(11)	$n^2 = 2k^2$	10
(12)	n^2 es divisible por 2	traducción 11
(13)	n es divisible por 2	n/m PP 7,12
(14)	2/m y 2/n	A 8,13
(15)	(m,n) $\neq$ 1	14
(16)	(m,n) = 1 $\wedge$ (m,n) $\neq$ 1	A 3,15
(16)	$\sqrt{2}$ es irracional	RAA 1,15

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Supongamos lo contrario; **(2)** esto es $\sqrt{2}$ es racional. **(3)** Entonces existen enteros n y m tales que $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$ con (n,m) = 1; o sea que m y n no tienen factores comunes distintos de 1. **(4)** Elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuación, se obtiene $2 = \dfrac{m^2}{n^2}$.

(5) De donde

$$m^2 = 2n^2 \qquad \textbf{(I)}$$

(6) es decir que m^2 es divisible por 2; **(7)(8)** lo que implica que

m es divisible por 2. **(II)**

(9) Por lo tanto $m = 2k$ para algún entero k. **(10)** Elevando al cuadrado ambos lados de esta ecuación se tiene

$$m^2 = 4k^2 \qquad \textbf{(III)}$$

(11) De **(I)** y **(III)** se deduce que $n^2 = 2k^2$; **(12)** queriendo decir esto que n^2 es divisible por 2; **(13)** lo que implica que

n es divisible por 2 **(IV)**

(14) De **(II)** y **(IV)** se deduce que m y n tienen factor común 2; **(15)** o sea factor común distinto de 1. **(16)** Pero esto contradice el supuesto de que m y n no tienen factores comunes distintos de 1. Por lo tanto $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario; esto es $\sqrt{2}$ es racional. Entonces existen enteros n y m tales que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ con (n,m) = 1; o sea que m y n no tienen factores comunes distintos de 1. Elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuación, se obtiene $2 = \frac{m^2}{n^2}$. De donde

$$m^2 = 2n^2 \qquad \textbf{(I)}$$

es decir que m^2 es divisible por 2; lo que implica que

m es divisible por 2. **(II)**

Por lo tanto $m = 2k$ para algún entero k. Elevando al cuadrado ambos lados de esta ecuación se tiene

$$m^2 = 4k^2 \qquad \textbf{(III)}$$

De **(I)** y **(III)** se deduce que $n^2 = 2k^2$; queriendo decir esto que n^2 es divisible por 2; lo que implica que

n es divisible por 2 **(IV)**

De **(II)** y **(IV)** se deduce que m y n tienen factor común 2; o sea factor común distinto de 1. Pero esto contradice el supuesto de que m y n no tienen factores comunes distintos de 1. Por lo tanto $\sqrt{2}$ es un número irracional.

6. Sea $f(x) = x^2 + ax + b$ para todo x.

Hallar los valores *a* y b tal que la recta y = 2x es tangente a la gráfica *f* en el punto (2,4).

I. **ELD**

Determinar *a* = ? b = ?

(1)	**f(x) =** $x^2 + ax + b$ **para todo** x	**P**
(2)	**y = 2x es tangente a Graf (*f*) en (2,4)**	**P**
(3)	y = mx + c es tangente a Graf (f) en $(x_0, y_0) \Rightarrow m = f'(x_0)$	P
(4)	(y = 2x es tangente a Graf (f) en (2,4)) $\Rightarrow 2 = f'(2)$	2/m, 0/c, 2/x_0, 4/y_0, (3)
(5)	$2 = f'(2)$	pp 2,4
(6)	$f'(x) = 2x + a, \quad \forall x$	1
(7)	$f'(2) = 4 + a$	2/x , 6
(8)	2 = 4 + a	I 5,7
(9)	a = -2	8
(10)	$f(2) = 4$ ya que $(2,4) \in$ Graf (f)	P
(11)	$f(2) = 4 + 2a + b$	2/x , 1
(12)	4 = 4 + 2a + b	I 10,11
(13)	b = 4	I 9, 12
(14)	$a = -2 \wedge b = 4$	A 9,13

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Sea $f(x) = x^2 + ax + b$ para todo x. **(2)(3)(4)(5)** Puesto que la recta y = 2*x* es tangente a la gráfica de *f* en (2,4) entonces

$$f'(2) = 2 \qquad \text{(I)}$$

(6)(7)(8) como $f'(x) = 2x + a$, para x = 2 se tiene

$$f'(2) = 4 + a \qquad \text{(II)}$$

(9) De (I) y (II) se deduce $\quad a = -2$

(10)(11)(12) Como (2,4) está en la gráfica de *f*, tenemos que 4 = *f*(2), es decir,

$$4 = 4 + 2a + b,$$

(13)(14) de donde b = 4 ya que a = -2

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $f(x) = x^2 + ax + b$ para todo x. Puesto que la recta y = 2*x* es tangente a la gráfica de *f* en (2,4) entonces

$$f'(2) = 2 \qquad \text{(I)}$$

como $f'(x) = 2x + a$, para x = 2 se tiene

$$f'(2) = 4 + a \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) se deduce $\quad a = -2$

Como (2,4) está en la gráfica de f, tenemos que 4 = *f*(2), es decir,

$$4 = 4 + 2a + b,$$

de donde b = 4 ya que a = -2

7. $\sum_{K=1}^{n}(2k-1) = n^2$

Ayuda : $2k - 1 = k^2 - (k-1)^2$

ELD

Demostrar $\sum_{K=1}^{n}(2k-1) = n^2$

(1)	$2k-1 = k^2-(k-1)^2$	P
(2)	$a_k = k^2$	P

(3) $a_{k-1} = (k-1)^2$ 2

(4) $\sum_{1}^{n} a_k - a_{k-1} = a_n - a_0$ p. telescópica

(5) $\sum_{K=1}^{n}(2k-1) = \sum_{1}^{n} a_k - a_{k-1}$ 1,2,3

 (6) $\sum_{K=1}^{n}(2k-1) = n^2$ I 1,4; n/k,0/k, 2

8. $\sum_{1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$

ELD

Demostrar $\sum_{1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$

(1) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 1$ P

(2) $\sum_{K=1}^{n}(2k-1) = n^2$ Ejercicio anterior

(3) $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$ P

 (4) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ I 1,2,3

9. Hallar los valores de las constantes a, b, y c para los cuales las gráficas de los dos polinomios f(x) = x^2 + ax + b y g(x) = x^3 - c se interceptan en el punto (1,2) y tienen la misma recta tangente en ese punto.

1. **ELD**

Determinar a = ? b = ? c = ?

(1) ***f*(x) = x^2 + a*x* + b** **P**

(2) ***g*(x) = x^3 - c** **P**

(3) **Las gráficas de *f* y g se interceptan en (1,2)** **P**

(4) **Las gráficas de *f* y *g* tienen la misma recta tgte en (1,2)** **P**

(5)	$f \cap g = \{(1,2)\}$	Traducción 3
(6)	$f(1) = g(1) = 2$	Traducción 5
(7)	$f'(1) = g'(1)$	Traducción 4
(8)	$1 + a + b = 1 - c = 2$	1,2,7
(9)	$f'(x) = 2x + a$	1
(10)	$g'(x) = 3x^2$	2
(11)	$2 + a = 3$	1/x **I** 7,9,10
(12)	$a = 1$	11
(13)	$c = -1$	8
(14)	$b = 0$	8,12
(15)	$a = 1 \wedge b = 0 \wedge c = 1$	A 12,13,14

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2)(3)(4)(5) Sean $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3 - c$ dos polinomios que se intersectan en (1,2) y tienen la misma recta tangente en este punto. **(6) (7)** Entonces

$$f(1) = g(1) = 2 \qquad \text{(I)}$$

y

$$f'(1) = g'(1) \qquad \text{(II)}$$

(8) De (I) se tiene

$$1 + a + b = 1 - c = 2 \qquad \text{(III)}$$

(9) (10)(11)(12)y de (II) se tiene

$$2 + a = 3, \text{ de donde } a = 1.$$

(13)(14)(15) Reemplazando este valor en (III) se obtiene b = 0,

de donde c = - 1.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sean $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3 - c$ dos polinomios que se intersectan en (1,2) y tienen la misma recta tangente en este punto.

Entonces

$$f(1) = g(1) = 2 \qquad \text{(I)}$$

$$\text{y} \qquad f'(1) = g'(1) \qquad \text{(II)}$$

De (I) se tiene

$$1 + a + b = 1 - c = 2 \qquad \text{(III)}$$

y de (II) se tiene

$$2 + a = 3 \text{ de donde } a = 1,$$

Reemplazando este valor en (III) se obtiene $b = 0$, de donde $c = -1$.

10. Demostrar que : La recta $y = -x$ es tangente a la curva dada por la ecuación $y = x^3 - 6x^2 + 8x$,

a) Halle los puntos de tangencia.
b) Esta recta tangente intercepta la curva en otra parte?.

I. ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

ELD

Demostrar: $y = -x$ es tangente a $y = x^3 - 6x^2 + 8x$.

(1) $y = mx + p$ es tangente a $y = f(x) \leftrightarrow m = f'(x)$ **P**
(2) $y = -x$ es tangente a $y = x^3 - 6x^2 + 8x \leftrightarrow -1 = 3x^2 - 12x+8$ P
(3) $3x^2 - 12x+8 = -1 \leftrightarrow x = 3, x = 1$ P
(4) $x = 3, x = 1 \leftrightarrow y = -x$ es tangente a $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ 2,3
(5) $y = -x$ es tangente a $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ en los puntos $x = 3$ y $x = 1$ (4)
(6) $y = mx + p$ intercepta a $y = f(x) \leftrightarrow mx + p = f(x)$ P
(7) $y = -x$ intercepta a $y = x^3 - 6x^2 + 8x$
sii $-x = x^3 - 6x^2 + 8x$ Especificación Universal en 6
(8) $-x = x^3 - 6x^2 + 8x \leftrightarrow x(x^3 - 6x^2 + 9) = 0$
$\leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$ P
(9) $y = -x$ intercepta a $y = x^3 - 6x^2 + 8 \leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$ transit. de (7) y (8)
(10) La recta $y = -x$ intercepta a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$
en los puntos $x = 0$ y $x = 3$ traducción 10

II. SOLUCION EN LENGUAJE FORMAL CON LA AYUDA DEL ELD.

(2) La recta y = -x es tangente a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ puesto que la ecuación $-1 = 3x^2 - 12x + 8$ tiene solución.**(3)(4)(5)** Ahora, esta ecuación implica que x = 3, x = 1; lo cual quiere decir que la recta y = –x es tangente a la curva en estos puntos, o sea en $\{(3,-3),(1,3)\}$**(8)(9)(10)** Como $-x = x^3 - 6x^2 + 8x$ implica que x = 0, x = 3, esto quiere decir que la recta y = –x intercepta a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ en los puntos x = 0 y x = 3.

III. SOLUCIÓN EN LENGUAJE FORMAL SIN LA AYUDA DEL ELD.

La recta y = -x es tangente a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ puesto que la ecuación $-1 = 3x^2 -12x + 8$ tiene solución. Ahora, esta ecuación implica que x = 3, x = 1; lo cual quiere deicr que la recta y = -x es tangente a la curva en estos puntos: o sea en $\{(3,-3),(1,3)\}$ Como $-x = x^3 - 6x^2 + 8x$ implica que x = 0, x = 3, esto quiere decir que la recta y = -x intercepta a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ en los puntos x = 0 y x = 3.

11. PROBLEMA

Una función f está definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le c \\ ax+b & \text{si } x > c \end{cases} \qquad (a,b,c \text{ constantes})$$

Hallar los valores de a y b (en términos de c) tal que f’(c) exista.

I. ELD

Hallar los valores de *a* y b (en términos de c) tal que *f’*(c) exista.

(1) $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le c \\ ax+b & \text{si } x > c \end{cases} \qquad (a,b,c \text{ constantes})$$ P

(2) $f'(c)$ existe $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ si existen P

$$(3)\quad \lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c^+}\frac{ax+b-ac-b}{x-c}=\lim_{x\to c^+} a = a \qquad (1)$$

$$(4)\quad \lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c^-}\frac{x^2-c^2}{x-c}=\lim_{x\to c^-} x+c = 2c \qquad (2)$$

(5) $f'(c)$ existe sii $a = 2c$ (2),(3),(4)

□(6) $f'(c)$ existe para $a = 2c$ y b cualquiera. (1),(2),(3),(4),(5)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) $f'(c)$ existe sí y solo sí los límites laterales

$$\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \text{ y } \lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

existen y son iguales. **(3) (4)**

$$\text{Por un lado } \lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=a$$

$$\text{y por otro, } \lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=2c$$

(5) (6) Entonces, para que exista $f'(c)$ es necesario que $a = 2c$, y b puede ser cualquiera.

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

$f'(c)$ existe sí y solo sí los límites laterales

$$\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \text{ y } \lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

existen y son iguales.

Por un lado $\lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = a$

y por otro, $\lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = 2c$

Entonces, para que exista $f'(c)$ es necesario que $a = 2c$, y b puede ser cualquiera.

12. TEOREMA . Si r_1 y r_2 son las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, entonces

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}; \quad r_1 r_2 = \frac{c}{a}$$

ELD

Demostrar $\left(r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}\right) \wedge r_1 r_2 = \frac{c}{a}$

(1) r_1, r_2 son las dos soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ **P**

(2) $r_1 = -\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $r_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ traducción 1

(3) $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \left(\dfrac{-b}{2a} - \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 2\dfrac{b}{2a}$ 2

(4) $r_1 + r_2 = \dfrac{-b}{a}$ 3

(5) $r_1 r_2 = \left(\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$ P

(6) $r_1 r_2 = \dfrac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a \cdot 2a} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$ 5

(7) $r_1 r_2 = \dfrac{c}{a}$ 6

□ (8) $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} \wedge r_1 r_2 = \dfrac{c}{a}$ A 4,7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Sean r_1 y r_2 las dos soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. **(2)** Entonces $r_1 = -\frac{-b+\sqrt{b^2}-4ac}{2a}$, $r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2}-4ac}{2a}$ **(3) (4)** Por lo tanto

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \left(\frac{-b}{2a}\right) + \left(-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{-b}{a}$$

(5) (6) (7)(8) y $r_1 r_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2}-4ac}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2}-4ac}{2a}\right)$

$$= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4ac}$$

$$= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2c}$$

$$= \frac{c}{a}$$

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sean r_1 y r_2 las dos soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Entonces $r_1 = -\frac{-b+\sqrt{b^2}-4ac}{2a}$, $r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2}-4ac}{2a}$.

De donde

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \left(\frac{-b}{2a}\right) + \left(-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{-b}{a}$$

y $r_1 r_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2}-4ac}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2}-4ac}{2a}\right)$

$$= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{\left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4ac}$$

$$= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2c}$$

$$= \frac{c}{a}$$

13. TEOREMA

Si r_1 y r_2 son las dos soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$,

entonces $ax^2 + bx + c = a(x - r_2)(x - r_1)$.

ELD

Demostrar $ax^2 + bx + c = a(x - r_2)(x - r_1)$

(1)	**r_2 y r_1 son las dos soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$**	**P**
(2)	r_2 y r_1 son sols. de $ax^2 + bx + c \Rightarrow r_1 + r_2 = -b/a \wedge r_2\ r_1 = c/a$	P
(3)	$r_1 + r_2 = -b/a \wedge r_1\ r_2 = c/a$	PP 1,2
(4)	$a(x - r_1)(x - r_2) = ax^2 - a(r_1 + r_2)x + ar_1r_2$	P
(5)	$a(x - r_1)(x - r_2) = ax^2 - a(-b/a)x + a(c/a)$	I 3,4
(6)	$a(x - r_1)(x - r_2) = ax^2 + bx + c$	5
□ (7)	$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$	6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Sean r_1 y r_2 las dos soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. **(2) (3)** Por el teorema anterior $r_1 + r_2 = -b/a$ y $r_1\ r_2 = c/a$.

(4) (5) (6) Ahora reemplazando estas relaciones en $a(x - r_1)(x - r_2) = ax^2 - a(r_1 + r_2)x + a\,r_1r_2$, obtenemos $a(x - r_1)(x - r_2) = ax^2 - a(-b/a)x + a(c/a) = ax^2 + bx + c$.

(7) De donde $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sean r_1 y r_2 las dos soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Por el teorema anterior

$$r_1 + r_2 = -b/a \quad y \quad r_1 r_2 = c/a.$$

Ahora reemplazando estas relaciones en

$$a(x - r_1)(x - r_2) = ax^2 - a(r_1 + r_2)x + a\, r_1 r_2,$$

obtenemos

$$a(x - r_1)(x - r_2) = ax^2 - a(-b/a)x + a(c/a) = ax^2 + bx + c.$$

De donde

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - r_1)(x - r_2).$$

14. TEOREMA DEL RESIDUO

Sea P un polinomio con coeficiente complejo y a cualquier número complejo. Sea P(x) dividido por x – a tal que P(x) = Q(x)(x –a) + R, donde R es un número complejo. Entonces R = P(a).

Si P se divide por x – a entonces R = P(a).

I. ELD

Demostrar : R = P(a)

(1) P un polinomio sobre $\mathbb{C}$	**P**
(2) $a \in \mathbf{C} \wedge (x - a) \in \mathbf{C}(x)$	P
(3) $P(x) = Q(x)(x - a) + R, \quad R \in \mathbf{C}$	1,2, Teo. 2
(4) $P(a) = Q(a)(a - a) + R$	a/x , 3
□ (5) $P(a) = R$	4

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2) Sea P un polinomio sobre $\mathbb{C}$ y a un número complejo. **(3)** Por el teorema del algoritmo de la división, se sabe que existe polinomio Q y R tal que

$$P(x) = Q(x)(x - a) + R,$$

donde grado de R es que menor que 1. **(4)** Debido a que esta ecuación se tiene para todo complejo x, en particular se tiene para x = a. **(5)** Asi:

$$P(a) = Q(a)(a - a) + R = R\ .$$

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea P un polinomio sobre $\mathbb{C}$ y a un número complejo. Por el teorema del algoritmo de la división, se sabe que existe polinomio Q y R tal que

$$P(x) = Q(x)(x - a) + R,$$

donde grado de R es que menor que 1. Debido a que esta ecuación se tiene para todo complejo x, en particular se tiene para x = a. Asi:

$$P(a) = Q(a)(a - a) + R = R\ .$$

15. TEOREMA DEL FACTOR :

El polinomio P es divisible por el polinomio x – a si y solo si P(a) = 0.

$\mathbf{ELD_1}$

Demostrar $\mathbf{x - a \mid P \Rightarrow P(a) = 0}$

(1)	$x - a \mid P$	P
(2)	$(\exists Q)(P = Q(x - a))$	traducción 1
(3)	$P(a) = Q(a)(a - a) = 0$	a/x ,2
(4)	$P(a) = 0$	3
□ (5)	$x - a \mid P \Rightarrow P(a) = 0$	CP 1,4

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Supongamos que x – a divide al polinomio P(x). **(2)** Esto significa que existe un polinomio Q tal que P(x) = Q(x)(x – a). **(3)** **(4)** **(5)** Debido a que esta ecuación se cumple para todo x, específicamente para x = a, se tiene que P(a) = Q(a)(a – a) = 0.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos que x – a divide al polinomio P(x). Esto significa que existe un polinomio Q tal que P(x) = Q(x)(x – a). Debido a que esta ecuación se cumple para todo x, específicamente para x = a se tiene que

$$P(a) = Q(a)(a - a) = 0.$$

I. **ELD_2**

Demostrar: $P(a) = 0 \Rightarrow (x - a) \mid P$

(1)	$P(a) = 0$	P
(2)	$P(x) = (x - a)\, Q(x) + R$	P
(3)	$P(a) = R$	a/x , 2
(4)	$R = 0$	I 1,3
(5)	$P(x) = (x - a)\, Q(x)$	I 2,4
(6)	$(x - a) \mid P$	Traducción 5
□ (7)	$P(a) = 0 \Rightarrow (x - a) \mid P$	CP 1,6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Sea P un polinomio sobre $\mathbb{C}$ tal que P(a) = 0 para algún complejo a. **(2)** Por el teorema del algoritmo de la división existen polinomios Q y R tales que

$$P(x) = (x - a)\, Q(x) + R \quad \text{con } R = 0 \text{ o grado } R < \text{grado } (x - a)$$

(3) **(4)** Es evidente que P(a) = R y R = 0 (según la hipótesis). **(5)** Por lo tanto P(x) = (x – a) Q(x) . **(6)** **(7)** Es decir que x – a divide al polinomio P.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea P un polinomio sobre $\mathbb{C}$ tal que P(a) = 0 para algún complejo a. Por el teorema del algoritmo de la división existen polinomios Q y R tales que

$$P(x) = (x - a)\, Q(x) + R \quad \text{con } R = 0 \text{ o grado } R < \text{grado } (x - a)$$

Es evidente que P(a) = R y R = 0 (según la hipótesis). Por lo tanto

P(x) = (x – a) Q(x) . Es decir que x – a divide al polinomio P.

16. TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Sea *f* una función continua en cada punto de un intervalo cerrado [a, b]. Sean dos puntos arbitrarios $x_1 < x_2$ en [a, b] tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Entonces para cualquier K entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ existe al menos un c entre el intervalo (x_1, x_2) tal que $f(c) = K$.

I. ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

1. Interpretación:
   - Si *f* es continua en [a, b] y k es cualquier número entre *f*(a) y *f*(b) entonces existe al menos un número c entre a y b tal que *f*(c)=k.
   - El teorema afirma que si x toma todos los valores entre *a* y *b*, la función *f*(x) debe tomar todos los valores entre *f*(a) y *f*(b).
   - El teorema afirma también, que si *f* es continua en un intervalo cerrado, no hay agujeros ni saltos en su gráfica.
   - Gráficamente :

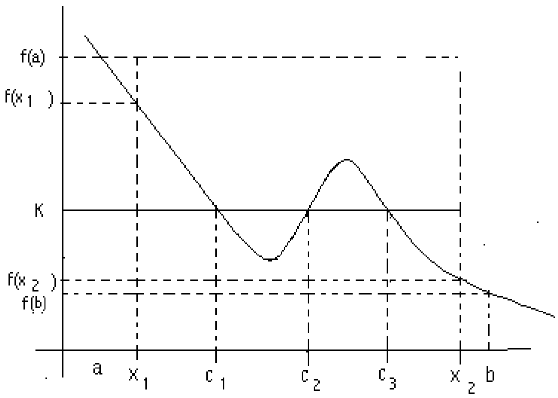


Fig. 1

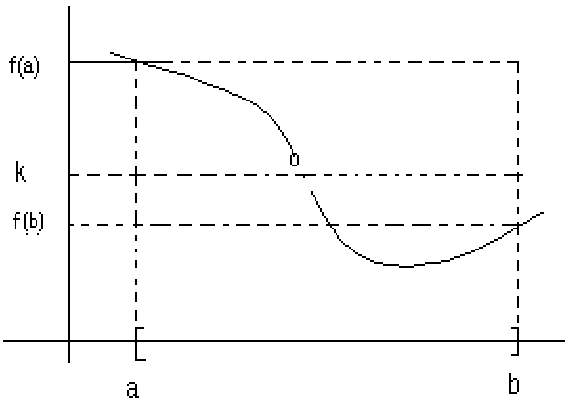


Fig. 2

Las funciones discontinuas, sin embargo, pueden no poseer la propiedad del valor intermedio, como la comparación de las figuras 1 y 2 pone de manifiesto

-<u>Metafóricamente:</u> Como ejemplo, considérese la altura de una persona. Si un niño mide 1.50 cm al cumplir 13 años y 1.68 cm al cumplir catorce, en algún instante intermedio midió 1.60 cm. Lo cual parece razonable si pensamos que crece continuamente, sin saltos bruscos en su talla.

2. **ELD**

Demostrar: $\exists\ c \in [a,b] : f(c) = K$

(1) $\boldsymbol{f \in C_{[a,b]}}$	**p**
(2) $\boldsymbol{x_1 < x_2 \wedge f(x_1) \neq f(x_2) \wedge [x_1, x_2] \subseteq [a,b]}$	**p**
(3) $\boldsymbol{f(x_1) < K < f(x_2) \quad \forall K}$	**p**
(4) $f(x_1) < f(x_2)$	**P**
(5) g: $[x_1,x_2] \rightarrow \Re$ tal que $g(x) = f(x) - K$	P 1, 3
(6) $g \in C_{[x_1,x_2]}$	1,4
(7) $g(x_1) = f(x_1) - K < 0 \wedge g(x_2) = f(x_2) - k > 0$	3
(8) $g(x_1)$ y $g(x_2)$ tienen signos opuestos en [a,b]	traducción de (7)
(9) $g \in C_{[x_1,x_2]} \wedge g(x_1)$ y $g(x_2)$ tienen signos opuestos $\Rightarrow\ \exists c \in (x_1,x_2)$ Tal que g (c) = 0	(Teorema de Bolsazo)
(10) $g \in C_{[x_1,x_2]} \wedge g(x_1)$ y $g(x_2)$ tienen signos opuestos	A 6,8
(11) $\exists c \in (x_1,x_2) : g(c) = 0$	PP 9,10

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2)(3) Suponga que $f(x_1) < f(x_2)$ y sea K cualquier valor entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$.

(4)(5) Sea g definida en $[x_1,x_2]$ tal que $g(x) = f(x) - K$. **(6)** Entonces g es continua en cada punto de $[x_1,x_2]$ y **(7)** además $g(x_1) = f(x_1) - K < 0$ y $g(x_2) = f(x_2) - k > 0$

(8)(9)(10)(11) Aplicando el teorema de Bolsano a g tenemos $g(c) = 0$ para algún c entre x_1 y x_2. De donde $f(c) - K = 0$ y $f(c) = K$, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Suponga que $f(x_1) < f(x_2)$ y sea K cualquier valor entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$.

Sea g definida en $[x_1, x_2]$ tal que $g(x) = f(x) - K$. Entonces g es continua en cada punto de $[x_1, x_2]$ y además

$$g(x_1) = f(x_1) - K < 0 \text{ y } g(x_2) = f(x_2) - k > 0$$

Aplicando el teorema de Bolsano a g tenemos $g(c) = 0$ para algún c entre x_1 y x_2. De donde $f(c) - K = 0$ y $f(c) = K$, que era lo que queríamos demostrar.

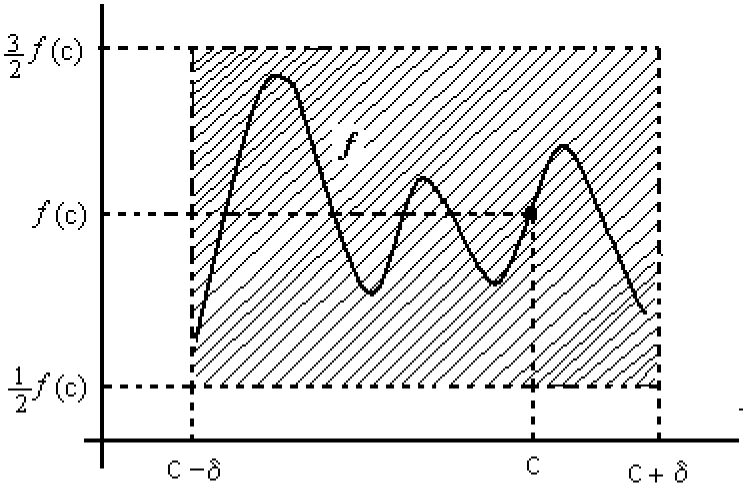
17. TEOREMA. Propiedad que preserva el signo de las funciones continuas.

Sea f una función continua en c y tal que $f(c) \neq 0$. Entonces existe un intervalo $(c-\delta, c+\delta)$ de centro c en el cual f tiene el mismo signo que $f(c)$.

I. **ELD**

Demostrar: $\exists$ $(c-\delta, c+\delta)$ en el cual f tiene el mismo signo que $f(c)$

(1)	**f continua en c**	**P**
(2)	**$f(c) \neq 0$**	**P**
(3)	$f(c) > 0 \vee f(c) < 0$	2
(4)	$f(c) > 0$	P
(5)	$(\forall \xi > 0)(\exists \delta > 0)(\lvert x - c \rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(c) \rvert < \xi)$	trad. 1
(6)	$(\forall \xi > 0)(\exists \delta > 0)(c-\delta < x < c+\delta \Rightarrow f(c) - \xi < f(x) < f(c) + \xi)$	trad. 5
(7)	$c - \delta < x < c+\delta \Rightarrow \frac{1}{2} f(c) < f(x) < \frac{3}{2} f(c)$	$\frac{f(c)}{2} / \xi$, 6
(8)		



7, 4

Aquí f (x) > 0 para *x* cerca a c puesto que f(c) > 0

(9) f (*x*) tiene el mismo signo que f(c) en el intervalo (c-δ , c+δ) 8

(10) f(c) > 0 $\Rightarrow$ f (*x*) tiene el mismo signo que f(c) en el intervalo (c-δ , c+δ) CP 4,9

(11) f (c) < 0 P

(12) c - δ < x < c+δ $\Rightarrow \frac{3}{2} f\,(\mathrm{c}) < f\,(\mathrm{x}) < \frac{1}{2}\, f\,(\mathrm{c})$ -- $\frac{f(c)}{2}$ / ξ , 6

(13)f *t*iene el mismo signo que f(c) en el intervalo (c-δ , c+δ) 11,12

(14) f (c) < 0$\Rightarrow$ f (*x*) tiene el mismo signo que f(c) en el intervalo (c-δ , c+δ) CP 11,13

(15) f (*x*) tiene el mismo signo que f(c) en el intervalo (c-δ , c+δ)

o

f (*x*) tiene el mismo signo que f(c) en el intervalo (c-δ , c+δ) DS 3,9,13

(16) f (*x*) tiene el mismo signo que f(c) en el intervalo (c-δ , c+δ) DP15

(17) $\exists$ (c-δ ,c+δ) de centro c en el cual f tiene el mismo signo que f(c). 16

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(4) Supongamos que f(c) > 0. **(5)(6)** Por continuidad, para todo $\xi > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(\mathrm{c}) - \xi < f(\mathrm{x}) < f(\mathrm{c}) + \xi \quad \text{siempre que} \quad \mathrm{c} - \delta < \mathrm{x} < \mathrm{c} + \delta \qquad \text{(I)}$$

(7) Si tomamos el δ correspondiente a $\xi = \frac{f(c)}{2}$ (este ξ es positivo ya que f(c) > 0), entonces la expresión (I) se convierte en

$$\frac{1}{2}f(c) < f(x) < \frac{3}{2}\ f(c) \quad \text{siempre que } \ c - \delta < x < c + \delta\ ;$$

(8) (9) (10)de donde se obtiene que $f(x) > 0$ en este intervalo, mostrándose de esta manera que $f(x)$ y $f(c)$ tienen el mismo signo.

(11) (12) Si $f(c) < 0$, tomamos el δ correspondiente a $\xi = -\frac{1}{2}f(c)$ y de (I) obtenemos $\frac{3}{2}f(c) < f(x) < \frac{1}{2}\ f(c)$ siempre que $c - \delta < x < c + \delta$, **(13) (14) (15) (16)**llegando a la misma conclusión; **(17)**o sea que f y $f(c)$ tienen el mismo signo en $(c - \delta, c + \delta)$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos que $f(c) > 0$. Por continuidad, para todo $\xi > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(c) - \xi < f(x) < f(c) + \xi \quad \text{siempre que } \ c - \delta < x < c + \delta \qquad \text{(I)}$$

Si tomamos el δ correspondiente a $\xi = \frac{f(c)}{2}$ (este ξ es positivo ya que $f(c) > 0$), entonces la expresión (I) se convierte en

$$\frac{1}{2}f(c) < f(x) < \frac{3}{2}\ f(c) \quad \text{siempre que } \ c - \delta < x < c + \delta\ ;$$

de donde se obtiene que $f(x) > 0$ en este intervalo, mostrándose de esta manera que $f(x)$ y $f(c)$ tienen el mismo signo.

Si $f(c) < 0$, tomamos el δ correspondiente a $\xi = -\frac{1}{2}f(c)$ y de (I) obtenemos $\frac{3}{2}f(c) < f(x) < \frac{1}{2}\ f(c)$ siempre que $c - \delta < x < c + \delta$, llegando a la misma conclusión; o sea que $f(x)$ y $f(c)$ tienen el mismo signo en $(c - \delta, c + \delta)$.

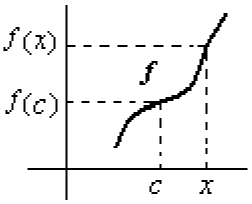
18. TEOREMA ANULACION DE LA DERIVADA

Sea *f* definida en un intervalo abierto I, y suponga que *f* tiene un máximo relativo o un mínimo relativo, en un punto interior c de I. Si la derivada $f'(c)$ existe, entonces $f(c)$=0.

I ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA ELD

Demostrar: Si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$

Traducción: $f'(c)$ existe $\Rightarrow$ $f'(c) = 0$.

(1)	***f* definida en un intervalo abierto I**	**P**
(2)	***f* tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en un punto interior c de I**	**P**
(3)	$f'(c)$ existe	P
(4)	$Q: I \to \Re : Q(x) = \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ si $x \neq c$; $Q(c) = f'(c)$	1,2
(5)	$\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$	traducción 3
(6)	$\lim\limits_{x \to c} Q(x) = Q(c)$	I 4,5
(7)	Q es continua en c	Traducción 6
(8)	Queremos probar que Q(c)=0	P
(9)	$Q(c)>0 \vee Q(c)<0 \vee Q(c)=0$	P
(10)	**$Q(c)>0$**	**P**
(11)	Q es continua en c $\wedge$ $Q(c)\neq 0$	A 7,10
(12)	Q es continua en c$\wedge Q(c)\neq 0 \rightarrow \exists(c-\alpha, c+\delta)$ en el que Q tiene el mismo signo que Q(c)	P
(13)	Q y Q(c) tiene el mismo signo en $(c-\alpha, c+\delta)$	PP 11,12
(14)	Existe$(c-\alpha, c+\delta)$ en el que $Q(x)>0$	10,14
(15)	$Q(x) = \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$ para $x \neq c$	8,14
(16)	El numerador de Q(x) tiene el mismo signo que el denominador para todo $x \neq c$	15
(17)	$f(x)>f(c)$ cuando $x>c$ y $f(x)<f(c)$ cuando $x<c$	16
(18)		traducción 17
(19)	*f* no tiene un extremo en c	Traducción 18
(20)	*f* tiene un extremo en c $\wedge$ f no tiene un extremo en c	A2,19

(21) Q(c)>0 es imposible RAA 10,20

(22) **Q(c)< 0** **P**

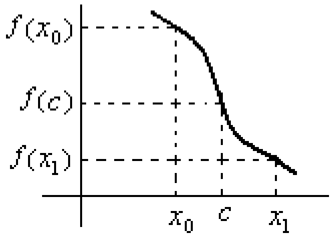
(23) Q es continua en c $\wedge$Q(c)$\neq$0 A 7,22

(24) Q es continua en c $\wedge$Q(c) $\neq$ 0$\Rightarrow\exists$(c-α, c+δ) en el que Q y Q(c) tienen el mismo signo P

(25) Q y Q(c) tiene el mismo signo en (c-α, c+δ) PP 23,24

(26) $Q(x)=\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} < 0 \quad x \neq c$ 4, 22, 25

(27) f(x)< f(c) cuando x >c $\wedge$ f(x)>f(c) cuando x< c 26

(28) 

Traducción gráfica 27

(29) f no tiene extremo en c Traducción 28

(30) f tiene un extremo en c $\wedge$ f no tiene un extremo en c A2, 29

(31) Q(c)< 0 es imposible RAA 22, 30

(32) $\rceil$(Q(c)>0) $\wedge$ $\rceil$ (Q(c)< 0) A 21,31

(33) $\rceil$(Q(c)>0) $\vee$ (Q(c)< 0) DL32

(34) Q(c) = 0 TP 9,33

(35) f'(c)=0 I 4,34

(36) f'(c) existe $\Rightarrow$ f'(c)=0 CP 3,35

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2)(3)(4) Definamos una función Q en I tal que

$$Q(x)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \quad \text{si } x \neq c;\ Q(c) = f'(c)$$

(5)(6)(7) Ya que f'(c) existe, Q(x) $\to$Q(c) cuando x$\to$c, así que Q es continua en c. **(8)** Deseamos probar que Q(c) = 0.

(9) Hay solamente tres posibilidades para Q(c): Q(c)>0 o Q(c)<0 o Q(c)=0. Probaremos que las desigualdades Q(c)>0 y Q(c)<0 conducen a una contradicción.

(10) Supongamos Q(c)>0. **(11)(12)(13)(14)** puesto que Q es continua en c y Q(c)$\neq$0, por el teorema de la propiedad que preserva el signo de las funciones continuas, existe un intervalo alrededor de c en el que Q(x)>0. **(15)(16)** Esto implica que el numerador del cociente Q(x) tiene el mismo signo que el denominador para todo x ≠c en este intervalo. **(17)** En otras palabras, *f*(x)>*f*(c) cuando x >c, y *f*(x)< *f*(c) cuando x< c. **(18)(19)(20)** Esto contradice la suposición de que *f* tiene un extremo en c. **(21)** Por lo tanto, la desigualdad Q(c)>0 es imposible.

Mediante un argumento similar podemos mostrar que la desigualdad Q(c)< 0 tampoco es posible.
(22) Sí Q(c)>0, **(23)(24)(25)(26)(27)(28)** por el teorema de la propiedad que preserva el signo de las funciones continuas, podemos afirmar que Q y Q(c) tienen el mismo signo en un intervalo al rededor de c; o sea que *f*(x)< *f*(c) cuando x >c y *f*(x)>*f*(c) cuando x< c. **(29)(30)** Pero esto contradice el hecho de que *f* tiene un extremo en c. **(31)** De manera que la desigualdad Q(c)< 0 tampoco es posible. **(33)(34)(35)(36)** Por lo tanto Q(c)= 0.
Puesto que Q(c) = f'(c), esto prueba el teorema.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Definamos una función Q en I tal que

$$Q(x)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \quad \text{si } x \neq c;\ Q(c) = f'(c)$$

Ya que f'(c) existe, Q(x) → Q(c) cuando x → c, así que Q es continua en c.

Deseamos probar que Q(c) = 0.

Hay solamente tres posibilidades para Q(c): Q(c)>0 ∨ Q(c)< 0 o Q(c)=0. Probaremos que las desigualdades Q(c)>0 y Q(c)<0 conducen a una contradicción.

Supongamos Q(c)>0. puesto que Q es continua en c y Q(c)≠0, por el teorema de la propiedad que preserva el signo de las funciones continuas, existe un intervalo alrededor de c en el que Q(x)>0. Esto implica que el numerador del cociente Q(x) tiene el mismo signo que el denominador para todo x ≠c en este intervalo. En otras palabras, *f*(x)>*f*(c) cuando x > c, y *f*(x)< *f*(c) cuando x< c. Esto contradice la suposición de que *f* tiene un extremo en c. Por lo tanto, la desigualdad Q(c)>0 es imposible. Mediante un argumento similar podemos mostrar que la desigualdad Q(c) < 0 tampoco es posible.

Sí Q(c)>0, por el teorema de la propiedad que preserva el signo de las funciones continuas, podemos afirmar que Q y Q(c) tienen el mismo signo en un intervalo al rededor de c; o sea que $f(x) < f(c)$ cuando x >c y $f(x) > f(c)$ cuando x< c. Pero esto contradice el hecho de que f tiene un extremo en c. De manera que la desigualdad Q(c)< 0 tampoco es posible. Por lo tanto Q(c)= 0. Puesto que Q(c) = $f'(c)$, esto prueba el teorema.

19. TEOREMA

El conjunto P de los enteros positivos no es acotado superiormente.

I. **ELD** por RAA

Demostrar: P no es acotado superiormente

(1)	*P* es acotado superiormente	P
(2)	Existe $b \in$ R : b = Sup P	Ax 10
(3)	$b - 1 < b$	P
(4)	b – 1 no esta en superior de P	2,3
(5)	$\exists n \in P : n > b - 1$	traducción 4
(6)	$n + 1 > b$	5
(7)	$n + 1 = m$	P
(8)	$(\exists\, m \in P)(m > b)$	I. 6,7
(9)	$b \neq$ sup. p	traducción 8
(10)	$b = \sup P \wedge b \neq \sup P$	A 2,9
∴ (11)	*P* no es acotado superiormente	RAA 1,10

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Supongamos lo contrario, es decir, *P* es acotado superiormente. **(2)** Por el axioma 10, *P* tiene una mínima cota superior, digamos b = Sup*P*. **(3)** Es un hecho evidente que b – 1< b. **(4)** Pero esto implica que b – 1 no es una cota superior de *P* puesto que hemos supuesto que b es la mínima cota superior. **(5)** **(6)** Por lo tanto existe por lo menos un entero positivo n tal que n > b – 1 y por lo tanto n + 1 > b. **(7)** **(8)** **(9)** **(10)** Pero esto contradice el supuesto de que *P* es un conjunto acotado superiormente y que n +1 pertenece a *P*.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario, es decir, *P* es acotado superiormente. Por el axioma 10, *P* tiene una mínima cota superior, digamos b = Sup*P*. Es un hecho evidente que b – 1< b. Pero esto implica que b – 1 no es una cota superior de *P* puesto que hemos supuesto que b es la mínima cota superior. Por lo tanto existe por lo menos un entero positivo n tal que n > b – 1 y por lo tanto n + 1 > b. Pero esto contradice el supuesto de que *P* es un conjunto acotado superiormente y que n +1 pertenece a *P*.

20. TEOREMA . Si n es un entero positivo y $a > 0$ entonces existe exactamente un positivo b tal que $b^n = a$.

I. ELD

Demostrar: $n \in P \wedge a\rangle 0 \rightarrow \exists b! \in R^+ : b^n = a$

(1)	$n \in P \wedge a\rangle 0$	P
(2)	$c > 1: 0 < a < c$	P
(3)	$f : [0,c] \rightarrow R$ tal que $f(x) = x^n$	P
(4)	$f \in C_{[0,c]} \wedge f(0) = 0, f(c) = c^n$	3
(5)	$0 < a < c < c^n$	2
(6)	$f(0) < a < f(c)$	I 4,5
(7)	$f \in C_{[0,c]}$	S4
(8)	$f \in C_{[0,c]} \wedge f(0) < a < f(c) \Rightarrow \exists x \in (0,c) : f(x) = a$	Teorema del V. I.
(9)	$f \in C_{[0,c]} \wedge f(0) < a < f(c)$	A 6,7
(10)	$\exists x \in (0,c) : f(x) = a$	PP 8,9
(11)	$x = b$	P
□ (12)	$\exists b \in R^+ : b^n = a$	I. 11,10,3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2)(3) Sea c > 1 tal que $0 < a < c$, y considérese la función *f* definida en el intervalo [0,c] por la ecuación $f(x) = x^n$.**(4)**Esta función es continua en [0,c], y en los extremos tenemos $f(0) = 0$, $f(c) = c^n$. **(5) (6)** Ya que $0 < a < c < c^n$, el número dado *a* está entre los valores de la función $f(0)$ y $f(c)$.**(7) (8) (9) (10).**Por lo tanto, por el teorema del valor intermedio tenemos que $f(x) = a$ para algún *x* en el intervalo [0,c], **(11)** digamos que $x = b$. **(12)** Esto prueba la existencia de al menos un positivo b tal que $b^n = a$. No puede haber más de un tal b puesto que *f* es estrictamente creciente en [0,c]. Esto completa la demostración.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea c > 1 tal que $0 < a < c$, y considérese la función *f* definida en el intervalo [0,c] por la ecuación $f(x) = x^n$. Esta función es continua en [0,c], y en los extremos tenemos $f(0) = 0$, $f(c) = c^n$. Ya que $0 < a < c < c^n$, el número dado a está entre los valores de la función $f(0)$ y $f(c)$.Por lo tanto, por el teorema del valor intermedio tenemos que $f(x) = a$ para algún x en el intervalo [0,c], digamos que $x = b$. Esto prueba la existencia de al menos un positivo b tal que $b^n = a$. No puede haber más de un tal b puesto que f es estrictamente creciente en [0,c]. Esto completa la demostración.

21. PROBLEMA

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo [0,1] y que tenga derivada continua en el intervalo (0,1). Demostrar que si $f(0) = f(1) = 0$, entonces $f'(c) = f(c)$ p. a. $c \in (0,1)$.

I. ELD

Demostrar : $\boldsymbol{f(0) = f(1) \Rightarrow f'(c) = f(c)\ ,\ c \in (0,1).}$

(1)	$f \in \mathbf{C}_{[0,1]} \wedge f' \in C_{(0,1)}$	**P**
(2)	$f(0) = f(1) = 0$	P
(3)	$g(x) = f(x)e^{-x}$	P
(4)	$g \in C_{[0,1]} \wedge g' \in C_{(0,1)}$	1,3
(5)	$g(0) = g(1) = 0$	2,3
(6)	$[g \in C_{[0,1]} \wedge g' \in C_{(0,1)}] \wedge (g(0) = g(1))$	A 4, 5
(7)	$[g \in C_{[0,1]} \wedge g' \in C_{(0,1)}] \wedge (g(0) = g(1)) \Rightarrow \exists c \in (0,1) : g'(c) = 0$	T. Rolle
(8)	$\exists\ C \in (0,1) : g'(c) = 0$	PP 6,7
(9)	$g'(c) = (f'(c) - f(c))\, e^{-c}$	Derivando g en 3, c/x
(10)	$0 = (f'(c) - f(c))\, e^{-c}$	8,9
(11)	$f'(c) = f(c)$	10
(12)	$f(0) = f(1) = 0 \Rightarrow f'(c) = f(c)$	CP 2,11

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2) Sea f una función continua en el intervalo [0,1] y con derivada continua en el intervalo (0,1) y tal que $f(0) = f(1) = 0$. **(3)**Sea g una función definida por $g(x) = f(x)e^{-x}$. **(4)(5)** Entonces g también es continua en [0,1] y su derivada continua en el intervalo (0,1) y además $g(0) = g(1) = 0$. **(6)(7)**Es claro que la function g satisface las condiciones del teorema de Rolle; **(8)**por lo tanto existe un $c \in (0,1)$ tal que $g'(c) = 0$. **(9)** Ahora, derivando g y especificando c para x tenemos que $g'(c) = (f'(c) - f(c))\, e^{-c}$, **(10)(11)(12)**de donde, y por el resultado anterior, se deduce que $f'(c) = f(c)$, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea f una función continua en el intervalo [0,1] y con derivada continua en el intervalo (0,1) y tal que $f(0) = f(1) = 0$. Sea g una función definida por $g(x) = f(x)e^{-x}$. Entonces g también es continua en [0,1] y su derivada continua en el intervalo (0,1) y además $g(0) = g(1) = 0$. Es claro que la function g satisface las condiciones del teorema de Rolle; por lo tanto existe un $c \in (0,1)$ tal que $g'(c) = 0$. Ahora, derivando g y especificando c para x tenemos que $g'(c) = (f'(c) - f(c))\, e^{-c}$, de donde, y por el resultado anterior, se deduce que $f''(c) = f(c)$, que era lo que queríamos demostrar.

22. PROBLEMA . Hallar todas las funciones reales $f(x)$ definidas en el intervalo [a, b] que tienen las siguientes propiedades:

i) $f(x)$ es continua y tiene segunda derivada en [a, b].

ii) $f(a) = f(b) = 0$

iii) $f'(x) = e^x f(x)$

La respuesta $f \equiv 0$

I. ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

1. Se replantea el problema.

Sea f: [a, b] $\rightarrow$ |R tal que

(i) f es continua y tiene segunda derivada en [a, b]

(ii) $f(a) = f(b)$

(iii) $f''(x) = e^x f(x)$

Entonces $f \equiv 0$

2. **ELD** por RAA

Demostrar $f \equiv 0$

(1)	f: [a, b] $\rightarrow$ |R	P
(2)	$f \in C \wedge \exists f''$ en [a, b]	P
(3)	$f(a) = f(b) = 0$	P
(4)	$f''(x) = e^x f(x)$	P
(5)	$\neg(\forall x)(f(x) = 0)$	traducción 4

(6)	$\exists\, x : f(x) \neq 0$	traducción 5
(7)	$f(x) < 0 \vee f(x) > 0$	Ley tricotomia,6
(8)	$f(x) > 0$	P
(9)	f alcanza su máximo valor en $f(x_0), x_0 \in$ (a, b)	1, 2
(10)	$f(x_0) > 0$	8
(11)	$f(x_0)$ es máximo $\Leftrightarrow f''(x_0) \leq 0$	P
(12)	$f''(x_0) \leq 0$	9,11
(13)	$f''(x_0) = e^{x_0} f(x_0) > 0$	3,10
(14)	$0 \geq f'(x_0) > 0$	12 ,13
(15)	$\rceil (f(x) > 0)$	RAA 4,14
(16)	$f(x) < 0$	P
(17)	$\exists\, x_0 \in$ (a, b) $: f(x_0)$ mínimo	1, 2
(18)	$f(x_0)$ es mínimo $\Leftrightarrow f''(x_0) \geq 0$	P
(19)	$f''(x_0) \geq 0$	17,18
(20)	$f(x_0) < 0$	16, 17
(21)	$f''(x_0) = e^{x_0} f(x_0) < 0$	3, 20
(22)	$0 < f''(x_0) < 0$	19, 21
(23)	$\rceil (f(x) < 0)$	RAA 16,22
(24)	$\rceil (f(x) > 0) \wedge \rceil (f(x) < 0)$	A 15,23
(25)	$\rceil (f(x) < 0 \vee f(x) > 0)$	DL 24
(26)	$(f(x) < 0 \vee f(x) > 0) \wedge \rceil (f(x) < 0 \vee f(x) > 0)$	A 7,25
□ (27)	$f \equiv 0$	RAA 5,26

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $f \equiv 0$.

(5)(6) Supongamos lo contrario, esto es que existe un x tal que $f(x) \neq 0$. **(7)** Esto plantea la disyunción : $f(x) < 0$ o $f(x) > 0$ (Ley de tricotomía) . **(8)**

(9) Supongamos la alternativa $f(x) > 0$. Por hipótesis, f alcanza su máximo valor en $f(x_0)$ con $x_0 \in$(a, b) debido a que f es continua, tiene segunda derivada en [a, b] y además f(a) = f(b) = 0.

(10) Entonces

$$f(x_0) > 0 . \qquad (*)$$

(11) **(12)** Puesto que $f(x_0)$ es un máximo, entonces

$$f''(x_0) \leq 0 . \qquad (**)$$

(13) Por la tercera hipótesis, y por (*), se obtiene :

$$f''(x_0) = e^{x_0} f(x_0) > 0 . \qquad (***)$$

(14) De (**) y (***) obtenemos $0 \geq f'(x_0) > 0$, lo cual es un absurdo. **(15)**Esto quiere decir que la alternative $f(x) > 0$ es imposible.

(16) Consideremos ahora la otra alternativa, esto es $f(x) < 0$.**(17)** **(18)(19)** Como f es continua en [a, b] y su segunda derivada también es continua en este intervalo, existe un $x_0 \in$ (a, b) tal que $f(x_0)$ es mínimo y

$$f''(x_0) \geq 0. \qquad \textbf{(I)}$$

(20) Consecuentemente

$$f(x_0) < 0. \qquad \textbf{(I I)}$$

(21) Por hipótesis, y por (II) ,

$$f''(x_0) = e^{x_0} f(x_0) < 0 \qquad \textbf{(III)}$$

(22) De (I) y (III) $\qquad 0 < f''(x_0) < 0$,

que es un absurdo. **(23)** Luego la alternativa $f(x) < 0$ tampoco es possible.

(24) **(25)** **(26)** **(27)** Así que hemos demostrado que ni $f(x) > 0$ ni $f(x) < 0$ son posibles, lo que contradice la afirmación $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$ planteada al inicio de la demostración. Luego $f \equiv 0$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $f \equiv 0$.

Supongamos lo contrario, esto es, existe un x tal que $f(x) \neq 0$. Esto plantea la disyunción : $f(x) < 0$ o $f(x) > 0$ (Ley de tricotomía) . Supongamos la alternativa $f(x) > 0$. Por hipótesis, f alcanza su máximo valor en $f(x_0)$ con $x_0 \in (a, b)$ debido a que f es continua, tiene segunda derivada en [a, b] y además $f(a) = f(b) = 0$. Entonces

$$f(x_0) > 0 . \qquad (*)$$

Puesto que $f(x_0)$ es un máximo, entonces

$$f''(x_0) \leq 0 . \qquad (**)$$

Por la tercera hipótesis, y por (*), se obtiene :

$$f''(x_0) = e^{x_0} f(x_0) > 0 . \qquad (***)$$

De (**) y (***) obtenemos $0 \geq f'(x_0) > 0$, lo cual es un absurdo. Esto quiere decir que la alternative $f(x) > 0$ es imposible.

Consideremos ahora la otra alternativa, esto es $f(x) < 0$. Como f es continua en [a, b] y su segunda derivada también es continua en este intervalo, existe un $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0)$ es mínimo y

$$f''(x_0) \geq 0. \qquad \textbf{(I)}$$

Consecuentemente

$$f(x_0) < 0. \qquad \textbf{(I I)}$$

Por hipótesis, y por (II) ,

$$f''(x_0) = e^{x_0} f(x_0) < 0 \qquad \textbf{(III)}$$

De (I) y (III)

$$0 < f''(x_0) < 0\ ,$$

que es un absurdo. Luego la alternativa $f(x) < 0$ tampoco es possible. Así que hemos demostrado que ni $f(x) > 0$ ni $f(x) < 0$ son posibles, lo que contradice la afirmación $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$ planteada al inicio de la demostración. Luego $f \equiv 0$.

23. PROBLEMA . Demostrar que existen dos funciones f(x) y g(x) cóncavas hacia arriba tal que f(x) – g(x) = Senx.

I. **ELD**

Demostrar : existen dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ cóncavas hacia arriba tal que $f(x) - g(x) = \mathrm{Sen}\,x$.

Traducción $(\exists\ f, g)(f'' > 0 \wedge g'' > 0 \wedge (f - g)(x) = \mathrm{Sen}\ x)$

(1)	f es cóncava hacia arriba $\Leftrightarrow f'' > 0$	P
(2)	$f(x) = x^2 + \mathrm{Sen}x$	P
(3)	$g(x) = x^2$	P
(4)	$f(x) - g(x) = \mathrm{Sen}x$	2,3
(5)	$f''(x) = 2 - \mathrm{Sen}x > 0$	2
(6)	$g''(\mathrm{x}) = 2 > 0$	3
(7)	$f'' > 0 \wedge g'' > 0$	5, 6
(8)	f y g son cóncavas hacia arriba	1,7
(9)	$(\exists\ f, g)\ (f'' > 0 \wedge g'' > 0 \wedge f(x) - g(x) = \mathrm{Sen}x$	4, 6,7
(10)	Existen dos funciones f(x) y g(x) cóncavas hacia arriba tal que f(x) – g(x) = Senx.	traducción 9

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2) Sean $f(x) = x^2 + \mathrm{Sen}x$ y $g(x) = x^2$. **(3)**Es claro que $f(x) - g(x) = \mathrm{Sen}x$ **(5)(6)(7)**y también que $f'' > 0$ y $g'' > 0$. **(8)(9)(10)** Por lo tanto f y g son cóncavas hacia arriba y satisfacen la condición del problema.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sean $f(x) = x^2 + \mathrm{Sen}x$ y $g(x) = x^2$. Es claro que $f(x) - g(x) = \mathrm{Sen}x$ y también que $f'' > 0$ y $g'' > 0$. Por lo tanto f y g son cóncavas hacia arriba y satisfacen la condición del problema.

24. TEOREMA :DERIVABILIDAD IMPLICA CONTINUIDAD

Si *f* es derivable en $x = c$, entonces *f* es continua en x = c.

ELD

Demostrar: *f* derivable en $c \Rightarrow$ *f* continua en c

(1)	*f* es derivable en c	P
(2)	$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$	P
(3)	$\lim_{x \to c} (f(x) - f(c)) = \lim_{x \to c} \left[(x - c) \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) \right]$	P
	$= \lim_{x \to c} (x - c) \lim_{x \to c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right)$	
	$= 0 \cdot f'(c) = 0$	
(4)	$\lim_{x \to c} (f(x) - f(c)) = 0$	3
(5)	$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$	4
(6)	*f* es continua en c	traducción 5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2) Sea f derivable en c. **(3)** Entonces existe $f'(c)$ y $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$.

(3) Calculemos $\lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] = \lim_{x \to c} \left[(x - c) \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) \right]$

$$= \lim_{x \to c} [(x - c)] \lim_{x \to c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right)$$

$$= 0 \cdot f'(c) = 0 .$$

(4) Como $(f(x) - f(c))$ tiende a cero cuando $x \to c$,

(5) concluimos que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. **(6)** Luego f es continua en $x = c$.

25. PROBLEMA .

Demostrar que el número s = $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$ es irracional.

I. **ELD**

Demostrar: S = $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}$ **es irracional**

(1)	S no es irracional	P
(2)	S es racional	1
(3)	$S=\frac{m}{n}, \quad n,m\in Z$	traducción 2
(4)	$(n!)^2 S\in Z$	3
(5)	$(n!)^2 S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(k!)^2}$	I. 4, Def.S
(6)	$(n!)^2 S=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n!)^2}{(k!)^2}+\sum_{n+1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(k!)^2}$	5
(7)	$\frac{(n!)^2}{(k!)^2}$ es un entero para $k\le n$	P
(8)	$\sum_{k=1}^{n}\frac{(n!)^2}{(k!)^2}$ es un entero	7
(9)	$\sum_{n+1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(k!)^2}$ es un entero	4,8
(10)	$0<\sum_{n+1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(k!)^2}<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{2i}}$	P (T. de series)
(11)	$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{2i}}=\frac{1/(n+1)^2}{1-1/(n+1)^2}=\frac{1}{n(n+2)}$	P (serie geométrica)
(12)	$\frac{1}{n(n+2)}\le\frac{1}{3}$	P
(13)	$0<\sum_{n+1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(k!)^2}<\frac{1}{3}$	10,11,12
(14)	$\sum_{n+1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(k!)^2}$ no es un entero	13
(15)	$\sum_{n+1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(k!)^2}$ es un entero $\wedge$ $\sum_{n+1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(k!)^2}$ no es un entero	A 9,14

□ (16) S = $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$ es irracional RAA 1,15

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2)(3) Supongamos lo contrario; esto es, que S es racional, o sea $S = \frac{m}{n}$, con n y m enteros. **(4)**Es claro que $(n!)^2 S$ es un entero ya que n es un factor de $(n!)^2$. **(5)(6)(7)(8)(9)**Debido a que $(n!)^2 S = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n!)^2}{(k!)^2} + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(k!)^2}$ y $\sum_{k=1}^{n} \frac{(n!)^2}{(k!)^2}$ es un entero, entonces $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(k!)^2}$ debe ser un entero. **(10) (11) (12) (13) (14)** Pero

$$0 < \sum_{n+1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(k!)^2} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{2i}} = \frac{1/(n+1)^2}{1-1/(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+2)} < \frac{1}{3},$$

(15)lo cual contradice que $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(k!)^2}$ es un entero. **(16)** Por consiguiente, la suma S es irracional.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario; esto es, que S es racional, o sea $S = \frac{m}{n}$, con n y m enteros. Es claro que $(n!)^2 S$ es un entero ya que n es un factor de $(n!)^2$. Debido a que $(n!)^2 S = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n!)^2}{(k!)^2} + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(k!)^2}$ y $\sum_{k=1}^{n} \frac{(n!)^2}{(k!)^2}$ es un entero, entonces $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(k!)^2}$ debe ser un entero. Pero

$$0 < \sum_{n+1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(k!)^2} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{2i}} = \frac{1/(n+1)^2}{1-1/(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+2)} < \frac{1}{3},$$

lo cual contradice que $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(k!)^2}$ es un entero. Por consiguiente, la suma S es irracional.

26. PROBLEMA.

Demostrar que existen infinitos naturales n con la propiedad de que si p es un divisor primo de n^2+3, entonces existe un natural $k<n$, tal que p también divide a k^2+3.

I. **ELD**

Demostrar: $\exists$ inf *initos* $n \in N$:

$$p/n^2+3 \to \exists k \in N : p/k^2+3 \wedge k < \mathrm{n}$$

(1) p primo P

(2) p/n^2+3 P

(3) $(m+i\sqrt{3})\ ((m+1)-i\sqrt{3}) = (m(m+1)+3)+i\sqrt{3}$ P

(4) $z_1 \cdot z_2 = z_1 \quad z_2 \quad \wedge \quad z_1,\ z_2 \in C$ P

(5) $(m+i\sqrt{3})\ ((m+1)-i\sqrt{3}) = m+i\sqrt{3}\ \ ((m+1)-i\sqrt{3})$ m + i $\sqrt{3}/z_1$, m +1- i $\sqrt{3}/z_2$, 4

(6) $(m(m+1)+3)+i\sqrt{3} = m+i\sqrt{3}\ \ ((m+1)-i\sqrt{3})$ I 3,5

(7) $(m(m+1)+3)^2+3 = (m^2+3)\ ((m+1)^2+3)$ 6

(8) $n = m(m+1)+3$ P

(9) $n^2+3 = (m^2+3)\ ((m+1)^2+3)$ I 7,8

(10) $p/m^2+3 \vee p/\ (m+1)^2+3$ 2,9

(11) $m < m+1 < m^2+m+3$ P

(12) $m < m+1 < n$ I 8,11

(13) $k = m \vee k = m+1$ P

(14) $p/k^2+3 \vee p/k^2+3$ con $k<n$ 10,13,12

(15) p/k^2+3 con $k<n$ DP 14

□ (16) $(\exists$ inf *initos* $n \in N)(\,p/n^2+3 \to \exists k \in N : p/k^2+3\,) \wedge k < \mathrm{n}$ 8, 14

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(3) Sea el producto $(m+i\sqrt{3})\ ((m+1)-i\sqrt{3}) = (m(m+1)+3)+i\sqrt{3}$ **.**
(4)(5)(6)(7) Por cuanto el módulo del producto de números complejos es igual al producto de los módulos, entonces la ecuación anterior implica la siguiente identidad para todo natural *m*.

$$(m(m+1)+3)^2+3 = (m^2+3)\ ((m+1)^2+3)$$

(8)(9) Tomando $n = m(m+1)+3$, la anterior identidad nos queda:

$$n^2+3 = (m^2+3)\ ((m+1)^2+3)$$

(10) Como, por hipótesis, p/n^2+3**,** entonces

$$p/m^2+3 \text{ o } p/\ (m+1)^2+3.\ (*)$$

(11) Ahora

$$m < m + 1 < m^2 + m + 3\ .$$

(12) Es decir

$$m < m + 1 < n$$

(13) Podemos tomar

$$k = m \text{ o } k = m + 1.$$

(14) **(15)**En cualquier caso, de (*) obtenemos que p/k^2+3 con $k < n$. **(16)**Puesto que *m* es arbitrario, hemos demostrado que existen infinitos *n* con la propiedad de que si p es un divisor primo de n^2+3, entonces existe un natural $k < n$ tal que *p* también divide a k^2+3.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea el producto $(m+i\sqrt{3})\ ((m+1)-i\sqrt{3}) = (m(m+1)+3)+i\sqrt{3}$**.** Por cuanto el módulo del producto de números complejos es igual al producto de los módulos, entonces la ecuación anterior implica la siguiente identidad para todo natural *m*.

$$(m(m+1)+3)^2+3 = (m^2+3)\ ((m+1)^2+3)$$

Tomando $n = m(m+1)+3$, la anterior identidad nos queda:

$$n^2+3 = (m^2+3)\ ((m+1)^2+3)$$

Como, por hipótesis, p/n^2+3**,** entonces

$$p/m^2+3 \text{ o } p/\ (m+1)^2+3.\ (*)$$

Ahora

$$m < m + 1 < m^2 + m + 3\ .$$

Es decir

$$m < m + 1 < n$$

Podemos tomar

$$k = m \text{ o } k = m + 1.$$

En cualquier caso, de (*) obtenemos que $p / k^2 + 3$ con $k < n$. Puesto que m es arbitrario, hemos demostrado que existen infinitos n con la propiedad de que si p es un divisor primo de $n^2 + 3$, entonces existe un natural $k < n$ tal que p también divide a $k^2 + 3$.

APLICACIÓN A LA FÍSICA

27. PROBLEMA

Supongamos que un gas es bombeado hacia dentro de un globo esférico a una rata de cambio constante de 50 centímetros cúbicos por segundo. Suponga que la presión del gas permanece constante y que el globo siempre tiene una forma esférica. ¿Que tan rápido esta creciendo el radio del globo cuando el radio es de 5 centímetros?.

I. ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

1. Identificación y simbolización de elementos básicos, premisas y conclusión del problema.

a) r es el radio y V es el volumen del globo.

b) El gas es bombeado a una rata de cambio constante de 50cm^3/seg; es decir:

$$\frac{dV}{dt} = 50\text{cm}^3/\text{seg}$$

c) La presión del gas permanece constante y el balón siempre tiene forma esférica. O sea V = $4\pi r^3/3$

d) Conclusión:

$$\text{Si } r = 5, \text{ determinar } \frac{dr}{dt}$$

2. **ELD**

Determinar $\frac{dr}{dt}$ Si r = 5

(1) r es el radio y V es el volumen del globo **P**

(2)	$\frac{dV}{dt}=50$	**P**
(3)	La presión del gas permanece constante y el globo siempre tiene forma esférica.	**P**
(4)	r = 5	P
(5)	$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\times\frac{dr}{dt}$	P
(6)	$V = 4\pi r^3/3$	Traducción 3
(7)	$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$	6
(8)	$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$	I 5,7
(9)	$\frac{dr}{dt} = \frac{50}{4\pi r^2}$	I 2,8
(10)	$\frac{dr}{dt} = \frac{50}{4\pi 25} = \frac{1}{2\pi}$	I 9,4
(11)	$r = 5 \Rightarrow \frac{dr}{dt}=\frac{1}{2\pi}$	Cp 4,10
(12)	$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{2\pi}$ Si r = 5	traducción 11
(13)	La razón de cambio del radio con respecto al tiempo es de $\frac{1}{2\pi}$ centímetros por segundos, en el instante cuando r = 5	traducción 12

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Sea r el radio y V el volumen del balón en el tiempo t. **(2)** Como dato básico se nos da $\frac{dV}{dt}=50$, la razón de cambio del volumen con respecto al tiempo, **(4)** y queremos determinar $\frac{dr}{dt}$, la razón del cambio del radio con respecto al tiempo, en el instante cuando r=5. **(5)** La regla de la cadena proporciona la conexión entre los datos dados y el desconocido. Esta regla afirma que:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\times\frac{dr}{dt} \qquad \textbf{(I)}$$

(6) Para calcular $\frac{dV}{dr}$, usamos la fórmula V= $4\pi r^3/3$ que expresa el volumen de la esfera en términos de su radio. **(7)** Derivando esta fórmula tenemos:

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \qquad \textbf{(II)}$$

De (I) y (II) obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \qquad \textbf{(III)}$$

(8)(9)(10)(11)(12) Substituyendo $\frac{dV}{dt}$ =50 y r = 5 en (III), obtenemos $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi}$.

Es decir que la razón de cambio del radio es de $\frac{1}{2\pi}$ centímetros por segundos en el instante cuando
r = 5.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea r el radio y V el volumen del balón en el tiempo t. Como dato básico se nos da $\frac{dV}{dt}$ =50, la razón de cambio del volumen con respecto al tiempo, y queremos determinar $\frac{dr}{dt}$, la razón del cambio del radio con respecto al tiempo, en el instante cuando r = 5. La regla de la cadena proporciona la conexión entre los datos dados y el desconocido. Esta regla afirma que:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \times \frac{dr}{dt} \qquad \textbf{(I)}$$

Para calcular $\frac{dV}{dr}$, usamos la fórmula V= $4\pi r^3/3$ que expresa el volumen de la esfera en términos de su radio. Derivando esta fórmula tenemos:

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \qquad \textbf{(II)}$$

De (I) y (II) obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \qquad \textbf{(III)}$$

Substituyendo $\frac{dV}{dt}$ =50 y r = 5 en (III), obtenemos $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi}$. Es decir que la razón de cambio del radio es de $\frac{1}{2\pi}$ centímetros por segundos en el instante cuando r = 5.

28. UNA APLICACIÓN DE RAZONES RELACIONADAS

Una piedra se deja caer sobre un estanque en reposo y produce ondas circulares concéntricas. El radio r de la onda exterior crea el ritmo constante de 1 pies/seg., cuando su radio es 4 pies. ¿A qué ritmo esta creciendo el área total A de la zona perturbada?.

I. ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA.

1. Determinación de premisas y conclusión.

a) Sea r el radio de la onda exterior.

b) Sea A el área total de la zona perturbada.

c) El radio r de la onda exterior crece al ritmo de 1 pies/seg $\Leftrightarrow$ $\frac{dr}{dt}$ =1

d) Conclusión o tesis para demostrar:

Si r = 4, entonces determinar $\frac{dA}{dt}$

2. ELD

Determinar $\frac{dA}{dt}$, si r = 4

(1) r es el radio de la onda exterior **P**

(2) A es el área de la zona perturbada **P**

(3) $\frac{dr}{dt}$ = 1 **P**

(4) A= πr^2 traducción 2

(5)	r = 4	P
(6)	$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$	P
(7)	$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$	derivando 4
(8)	$\frac{dA}{dr} = 8\pi$	**I** 5,7
(9)	$\frac{dA}{dt} = 8\pi \frac{dr}{dt}$	**I** 6,8
(10)	$\frac{dA}{dt} = 8\pi$	**I** 3,9
(11)	Sí r = 4, entonces $\frac{dA}{dt} = 8\pi$	Cp 5,10

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2) Sea r el radio de la onda exterior y A el área de la zona perturbada. **(3)** Como dato básico se nos da $\frac{dr}{dt}=1$, la razón de cambio del radio con respecto al tiempo, **(4)(5)** y queremos determinar $\frac{dA}{dt}$, la razón de cambio del área con respecto al tiempo en el instante cuando r = 4. **(6)** La regla de la cadena proporciona la conexión entre los datos dados y el desconocido. Esta regla afirma que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \qquad \text{(I)}$$

(7) Para calcular $\frac{dA}{dr}$, usamos la formula $A = \pi r^2$ que expresa el área de la zona perturbada en términos de su radio, derivando esta fórmula obtenemos

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r \qquad \text{(II)}$$

(8)(9)(10)(11) De (I) y (II) obtenemos

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\,\frac{dr}{dt} \qquad \text{(III)}$$

Sustituyendo $\frac{dr}{dt}=1$ y $r = 4$ en (III) obtenemos $\frac{dA}{dt} = 8\pi$

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea r el radio de la onda exterior y A el área de la zona perturbada. Como dato básico se nos da $\frac{dr}{dt}=1$, la razón de cambio del radio con respecto al tiempo, y queremos determinar $\frac{dA}{dt}$, la razón de cambio del área con respecto al tiempo en el instante cuando r=4. La regla de la cadena proporciona la conexión entre los datos dados y el desconocido. Esta regla afirma que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} \qquad \text{(I)}$$

Para calcular $\frac{dA}{dr}$, usamos la formula $A=\pi r^2$ que expresa el área de la zona perturbada en términos de su radio, derivando esta fórmula obtenemos

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) obtenemos

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\,\frac{dr}{dt} \qquad \text{(III)}$$

Sustituyendo $\frac{dr}{dt}=1$ y $r = 4$ en (III) obtenemos $\frac{dA}{dt} = 8\pi$

29. HINCHANDO UN GLOBO

Se bombea aire en un globo esférico a razón de 4,5 pulgadas cúbicas por minuto. Hallar la razón de cambio del radio cuando éste es de 2 pulgadas.

I. ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRÁCTICA.

1. Identificación y simbolización de elementos básicos, premisas y conclusión del problema.

a) Sean r el radio y V el volumen del globo esférico;

es decir $V=\frac{4}{3}\pi r^{3}$

b) El volumen del globo crece a razón de 4,5 pulgadas^{3} /min.

Es decir, $\frac{dV}{dt}=\frac{9}{2}$ pulg/min

c) Conclusión o tesis para demostrar:

si r = 2, entonces hallar $\frac{dr}{dt}$.

2. **ELD**

Hallar la razón de cambio del radio cuando este es de 2 pulgadas.

Traducción: Hallar $\frac{dr}{dt}$ si r = 2

(1) $V = \frac{4}{3}\pi r^{3}$ $\wedge$ **r el radio** **P**

(2) $\frac{dV}{dt}=\frac{9}{2}$ **P**

(3) r = 2 P

(4) $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$ P

(5) $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^{2}$ 1

(6) $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^{2} \frac{dr}{dt}$ **I** 4,5

(7) $$\frac{9}{2} = 16\pi \frac{dr}{dt}$$ **I** 2,3,6

(8) $$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{16\pi}\left(\frac{9}{2}\right) \approx 0.09$$ Traducción 7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Sea r el radio y V el volumen del globo esférico en el tiempo t. **(2)** Como dato básico se nos da $\frac{dV}{dt} = \frac{9}{2}$, la razón de cambio del volumen con respecto al tiempo; **(3)** y queremos determinar $\frac{dr}{dt}$, la razón de cambio del radio con respecto al tiempo, en el instante cuando r = 2. **(4)** La regla de la cadena proporciona la conexión entre los datos dados y el desconocido. Esta regla afirma que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \qquad \text{(I)}$$

(5) Para calcular $\frac{dV}{dr}$ usamos la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; que expresa el volumen de la esfera en términos de su radio. Derivando esta fórmula tenemos

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \qquad \text{(III)}$$

(6)(7)(8) Sustituyendo $\frac{dV}{dt} = \frac{9}{2}$ y r=2 obtenemos $\frac{dr}{dt} \approx 0.09$. Es decir que la razón de cambio del radio es 0.09 pulgadas^3 /seg. cuando r=2.

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Sea r el radio y V el volumen del globo esférico en el tiempo t. Como dato básico se nos da $\frac{dV}{dt} = \frac{9}{2}$, la razón de cambio del volumen con respecto al tiempo; y queremos determinar $\frac{dr}{dt}$, la razón de cambio del radio con respecto al tiempo, en el instante cuando r = 2. La regla de la cadena proporciona la conexión entre los datos dados y el desconocido. Esta regla afirma que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \qquad \text{(I)}$$

Para calcular $\frac{dV}{dr}$ usamos la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; que expresa el volumen de la esfera en términos de su radio. Derivando esta fórmula tenemos

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \qquad \text{(III)}$$

Sustituyendo $\frac{dV}{dt} = \frac{9}{2}$ y r = 2 obtenemos $\frac{dr}{dt} \approx 0.09$. Es decir que la razón de cambio del radio es 0.09 pulgadas^3 /seg. Cuando r = 2