EL ELD Y EL ALGEBRA LINEAL

1. Sea V = R^n y W = $\{ (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) / \ x_i \in R \ \} = R^{n-1}$

Demostrar : W es un subespacio de R^n.

I. ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIVIDAD PRÁCTICA.

1. $X \in W \leftrightarrow X = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0)$

2. **ELD**

Demostrar : W es un subespacio de R^n

Traducción : 1) X,Y$\in W \Rightarrow$ X + Y$\in W$

2) X$\in W$ y c$\in R \Rightarrow cX \in W$

3) $(0,0,\ldots,0) \in W$

(1)	X,Y$\in W$	P
(2)	$X \in W \leftrightarrow X = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0)$	Def. de W
(3)	X + Y = $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) + (y_1, y_2, ..., y_{n-1}, 0)$	
	$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_{n-1} + y_{n-1}, 0)$	2
(4)	X + Y = $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_{n-1} + y_{n-1}, 0)$	3
(5)	X + Y$\in W$	1,4
$\square_1$ (6)	X,Y$\in W \Rightarrow$ X + Y$\in W$	CP 1,5
(7)	X$\in W \wedge$ c$\in R$	P
(8)	cX = $(cx_1, cx_2, ..., cx_{n-1}, 0)$	I 7,2
(9)	cX$\in W$	1,8
$\square_2$ (10)	X$\in W$ y c$\in R \Rightarrow cX \in W$	CP 7,9
$\square_3$ (11)	$(0,0,\ldots,0) \in W$ ya que $x_n = 0$	2

II. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL CON LA AYUDA DEL ELD.

Vamos a demostrar que W es un subespacio.

1.**(1)**Si X,Y$\in W$,**(2)(3)(4)** $X = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0)$, Y = $(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, 0)$ y

$$X + Y = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) + (y_1, y_2, ..., y_{n-1}, 0)$$
$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_{n-1} + y_{n-1}, 0).$$

(5)(6) De donde X + Y$\in W$ (por definición de W).

2.**(7)**Sea $X \in W$ y $c \in R$.**(8) (9)**Como $X = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0)$, entonces $cX = c\,(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) = (cx_1, cx_2, ..., cx_{n-1}, 0)$. **(10)** Y por lo tanto $cX \in W$.

3. .**(13)** $(0,0,\ldots,0) \in W$ ya que su última componente es cero.

III. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMA SIN LA AYUDA DEL ELD.

Vamos a demostrar que W es un subespacio.

1. Si $X, Y \in W$, $X = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_{n-1}, 0)$ y

$$
\begin{aligned}
X + Y &= (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) + (y_1, y_2, ..., y_{n-1}, 0) \\
&= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_{n-1} + y_{n-1}, 0).
\end{aligned}
$$

De donde $X + Y \in W$ (por definición de W).

2. Sea $X \in W$ y $c \in R$. Como $X = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0)$, entonces $cX = c\,(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) = (cx_1, cx_2, ..., cx_{n-1}, 0)$. Y por lo tanto $cX \in W$.

3. $(0,0,\ldots,0) \in W$ ya que su última componente es cero.

2. Sea V un espacio vectorial sobre K. Sean U y W subespacios de V. Entonces $U \cap W$ es un subespacio de V.

I. ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRÁCTICA

1. Notación : U es subespacio de V $\leftrightarrow$ $U \leq V$

2. **ELD**

Demostrar : $U \cap W \leq V$

Traducción : 1) $u, w \in U \cap W \Rightarrow u + w \in U \cap W$

2) $u \in U \cap W \wedge c \in K \Rightarrow cu \in U \cap W$

3) $0 \in V \Rightarrow 0 \in U \cap W$

(1) $U \leq V$ P

	(2)	$W \leq V$	P
	(3)	$u, w \in U \cap W$	P
	(4)	$u,w \in U \wedge u,w \in W$	3
	(5)	$u + w \in U \wedge u + w \in W$	I 1,2,4
	(6)	$u + w \in U \cap W$	5
$\square_1$	(7)	$u, w \in U \cap W \Rightarrow u + w \in U \cap W$	CP 3,6
	(8)	$u \in U \cap W \wedge c \in K$	P
	(9)	$u \in U \wedge u \in W \wedge c \in K$	8
	(10)	$cu \in U \wedge cu \in W$	I 9,1,2
	(11)	$cu \in U \cap W$	10
$\square_2$	(12)	$u \in U \cap W \wedge c \in K \Rightarrow cu \in U \cap W$	CP 3,10
	(13)	$0 \in V \Rightarrow 0 \in U \wedge 0 \in W$	1,2
$\square_3$	(14)	$0 \in V \Rightarrow 0 \in U \cap W$	13

II. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMA CON LA AYUDA DEL ELD.

Vamos a demostrar que $U \cap W$ es un subespacio.

1.**(3)**Sean $u,w \in U \cap W$.**(4)**Entonces $u,w \in U$ y $u,w \in W$.**(5)**Por hipótesis $u + w \in U$ y $u + w \in W$; **(6)(7)**de donde $u + w \in U \cap W$.

2.**(8)**Sea $u \in U \cap W$ y $c \in K$. **(9)** Entonces $u \in U$ y $u \in W$. **(10)**Por hipótesis $cu \in U$ y $cu \in W$; **(11) (12)**por lo tanto $cu \in U \cap W$.

3. **(13) (14)** Como el cero de V está en U y en W (por hipótesis), entonces el cero de V ha de estar también en $U \cap W$.

III. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMA SIN LA AYUDA DEL ELD.

Vamos a demostrar que $U \cap W$ es un subespacio.

1.Sean u,w$\in$U$\cap$W. Entonces u,w$\in$U y u,w$\in$W. Por hipótesis, u + w$\in$U y u + w$\in$W; y por lo tanto u + w$\in$U$\cap$W.

2.Sea u$\in$U$\cap$W y c$\in$K. Entonces u$\in$U y u$\in$W. Por hipótesis, cu$\in$U y cu$\in$W; por lo tanto cu$\in$U$\cap$W.

3. Como el cero de V está en U y en W (por hipótesis), entonces el cero de V ha de estar también en U$\cap$W .

3. Demostrar que el conjunto de vectores $\{e^t, e^{2t}\}$ es linealmente independiente.

I. **ELD**

Demostrar :**$\{e^t, e^{2t}\}$ es linealmente independiente**.

Traducción: $ae^t + be^{2t} = 0 \Rightarrow a = b = 0$

(1)	$ae^t + be^{2t} = 0$	P
(2)	$ae^t + 2be^{2t} = 0$	Derivando 1
(3)	$be^{2t} = 0$	(2) − (1)
(4)	$e^{2t} \neq 0$	P
(5)	$b = 0$	3,4
(6)	$ae^t = 0$	I 1,5
(7)	$e^t \neq 0$	P
(8)	$a = 0$	6,7
(9)	$a = b = 0$	5,8
(10)	$ae^t + be^{2t} = 0 \Rightarrow a = b$	CP 1,9
□ (11)	$\{e^t, e^{2t}\}$ es linealmente independiente.	Traducción 10

II. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL CON LA AYUDA DEL ELD.

Vamos a demostrar que el conjunto $\{e^t, e^{2t}\}$ es linealmente independiente.

(1) Sea $ae^t + be^{2t} = 0$. **(2)** Derivando se obtiene $ae^t + 2be^{2t} = 0$. **(3)** Substrayendo la primera ecuación de la segunda, se obtiene $be^{2t} = 0$.**(4)(5)**Puesto que $e^{2t} \neq 0$, se tiene que $b = 0$. **(6)**Reemplazando este valor para b en la primera ecuación tenemos $ae^t = 0$, **(7) (8)**lo que implica que $a = 0$, por ser $e^t \neq 0$. **(9)**Así que $a = b = 0$. **(10)(11)**Por lo tanto, el conjunto$\{e^t, e^{2t}\}$ es linealmente independiente.

III. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL SIN LA AYUDA EL ELD.

Vamos a demostrar que el conjunto $\{e^t, e^{2t}\}$ es linealmente independiente.

Sea $ae^t + be^{2t} = 0$. Derivando se obtiene $ae^t + 2be^{2t} = 0$. Substrayendo la primera ecuación de la segunda, se obtiene $be^{2t} = 0$. Puesto que $e^{2t} \neq 0$ se tiene que $b = 0$. Reemplazando este valor para b en la primera ecuación tenemos $ae^t = 0$, lo que implica que $a = 0$, por ser $e^t \neq 0$. Así que $a = b = 0$. Por lo tanto, el conjunto$\{e^t, e^{2t}\}$ es linealmente independiente.

4. TEOREMA. Sea $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ un conjunto de generadores de un espacio vectorial V. Sea $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ un subconjunto maximal de elementos linealmente independientes. Entonces $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ es una base de V.

I. ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRÁCTICA

1. Definición de Base: $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base de V si y solo si

    1) G($\{v_1, v_2, ..., v_n\}$) = V y
    2) Los vectores $v_1, v_2, ..., v_n$ son linealmente independientes.

2. **ELD**

Demostrar : $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ es una base de V.

Traducción : 1) G($\{v_1, v_2, ..., v_r\}$) = V

2) $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ son L.I.

(1)	G($\{v_1, v_2, ..., v_n\}$) = V	P
(2)	$\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ es maximal L.I.	P
(3)	$v_i \in V$	P

(4) $v_1, v_2, ..., v_r, v_i$ son L.D. 2,3

(5) $\exists x_1, x_2, ..., x_r, y \in R$ no todos 0 tal que
$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_rv_r + yv_i = 0$, con $y \neq 0$. Porque,
de lo contrario los $v_1, v_2, ..., v_r$ serían L.D. 4,2

(6) $v_i = -\frac{x_1}{y}v_1 - \frac{x_2}{y}v_2 - ... - \frac{x_r}{y}v_r , \quad \forall v_i$ 5

(7) G({ $v_1, v_2, ..., v_r$ }) = V traducción 6

□ (8) { $v_1, v_2, ..., v_r$ } es una base de V 7, 2

II. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL CON LA AYUDA DEL ELD.

Vamos a demostrar que { $v_1, v_2, ..., v_r$ } es una base de V.
(3) Sea v_i un elemento arbitrario de V. **(4)** Por hipótesis, los elementos $v_1, v_2, ..., v_r, v_i$ son linealmente independientes. **(5)**Es decir, existen $x_1, x_2, ..., x_r, y$ números no todos 0 tal que

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_rv_r + yv_i = 0 .$$

Además $y \neq 0$, porque, de lo contrario $v_1, v_2, ..., v_r$ serían linealmente dependientes. **(6)** De donde, resolviendo para v_i , tenemos:

$$v_i = -\frac{x_1}{y}v_1 - \frac{x_2}{y}v_2 - ... - \frac{x_r}{y}v_r , \quad \forall v_i$$

demostrándose que v_i es una combinación lineal de $v_1, v_2, ..., v_r$; **(7)**lo que quiere decir que el conjunto { $v_1, v_2, ..., v_r$ } genera el espacio vectorial V. **(8)**Como, por hipótesis, los elementos $v_1, v_2, ..., v_r$ son linealmente independientes, entonces queda demostrado que { $v_1, v_2, ..., v_r$ } es una base de V.

III. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL SIN LA AYUDA DEL ELD.

Vamos a demostrar que { $v_1, v_2, ..., v_r$ } es una base de V.

Sea v_i un elemento arbitrario de V. Por hipótesis, los elementos $v_1, v_2, ..., v_r, v_i$ son linealmente independientes. Es decir, existen $x_1, x_2, ..., x_r, y$ números no todos 0 tal que

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_rv_r + yv_i = 0 .$$

Además $y \neq 0$, porque, de lo contrario $v_1, v_2, ..., v_r$ serían linealmente dependientes. De donde, resolviendo para v_i, tenemos:

$$v_i = -\frac{x_1}{y}v_1 - \frac{x_2}{y}v_2 - ... - \frac{x_r}{y}v_r , \quad \forall v_i$$

demostrándose que v_i es una combinación lineal de $v_1, v_2, ..., v_r$; lo que quiere decir que el conjunto $\{ v_1, v_2, ..., v_r \}$ genera el espacio vectorial V. Como, por hipótesis, los elementos $v_1, v_2, ..., v_r$ son linealmente independientes, entonces queda demostrado que $\{ v_1, v_2, ..., v_r \}$ es una base de V.

5. Sean *v,w* elementos de un espacio vectorial y suponga que $v \neq 0$. Si *v*,w son linealmente dependientes, demuestre que existe un número *a* tal que *w* = *av*.

I. ELD

Demostrar: *v,w* son L.D $\Rightarrow \exists a \in R : w = av$

(1)	***v,w*** $\in V$	**P**
(2)	$v \neq 0$	**P**
(3)	*v,w* son L.D	P
(4)	$\exists \lambda_1, \lambda_2$ no todos 0: $\lambda_1 v + \lambda_2 w = 0$	traducción 3
(5)	$\lambda_2 \neq 0$ (porque $\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 v = 0 \wedge \lambda_1 = 0$)	2,4
(6)	$\lambda_2 w = -\lambda_1 v$	4
(7)	$w = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} v$	6

(8)	$a = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$	P
(9)	$\exists a \in R : w = av$	7,8
□(10) v,w son L.D $\Rightarrow \exists a \in R : w = av$		CP 3,9

II. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL CON LA AYUDA DEL ELD.

Vamos a demostrar que si *v*,w son linealmente dependientes, entonces existe un número *a* tal que *w* = *av*.

(1)(2)(3) Sean *v,w* elementos de un espacio vectorial V con $v \neq 0$ y además linealmente dependientes. **(4)**Entonces existen λ_1, λ_2 no todos cero tal que $\lambda_1 v + \lambda_2 w = 0$. **(5)**En particular, $\lambda_2 \neq 0$. Si $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_1 \neq 0$, se tendría $\lambda_1 v + 0w = 0$, de donde *v* sería 0, contradiciendo la hipótesis de que $v \neq 0$. **(6)(7)**Entonces $w = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} v$. **(8) (9) (10)**Haciendo $a = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, nos queda *w* = *av*.

III. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL SIN LA AYUDA DEL ELD.

Vamos a demostrar que si *v*, w son linealmente dependientes, entonces existe un número *a* tal que *w* = *av*.

Sean *v,w* elementos de un espacio vectorial V con $v \neq 0$ y además linealmente dependientes. Entonces existen λ_1, λ_2 no todos cero tal que $\lambda_1 v + \lambda_2 w = 0$. En particular, $\lambda_2 \neq 0$. Si $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_1 \neq 0$, se tendría $\lambda_1 v + 0w = 0$, de donde *v* sería 0, contradiciendo la hipótesis de que $v \neq 0$. Entonces $w = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} v$. Haciendo $a = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, nos queda *w* = *av*.

6. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_r$ vectores en R^n y suponga que son mutuamente perpendiculares (es decir, dos cualquiera de ellos son perpendiculares) y ninguno de ellos es 0. Probar que son linealmente independientes.

I. **ELD**

Demostrar: $A_1, A_2, ..., A_r$ **vectores en** R^n **son L.I.**

Traducción: $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_r A_r = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0$

(1)	$A_i \perp A_j, i \neq j$	**P**
(2)	$A_i \neq 0 \quad i = 1, 2, ..., r$	**P**
(3)	$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_i A_i + ... + \alpha_r A_r = 0$	P
(4)	$\alpha_1 A_i A_1 + \alpha_2 A_i A_2 + ... + \alpha_i A_i A_i + ... + \alpha_r A_i A_r = 0$	2,3
(5)	$A_i \cdot A_j = 0, \; i \neq j$	traducción 1
(6)	$\alpha_i A_i \cdot A_i = 0$	4,5
(7)	$A \cdot A = \lVert A \rVert^2 > 0$	P
(8)	$\alpha_i = 0, \; i = 1, 2, ..., r$	6,7
(9)	$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_r A_r = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \; i = 1, 2, ..., r$	CP 3,8

II. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL CON LA AYUDA DEL ELD.

Vamos a demostrar que $A_1, A_2, ..., A_r$ vectores en R^n son linealmente independientes.

(3) Sea $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_i A_i + ... + \alpha_r A_r = 0$.

(4) Multiplicando ambas partes de esta ecuación por A_i con $i = 1, 2, ..., r$, se obtiene :

$$\alpha_1 A_i A_1 + \alpha_2 A_i A_2 + ... + \alpha_i A_i A_i + ... + \alpha_r A_i A_r = 0.$$

(5) Como $A_i \cdot A_j = 0$ para $i \neq j$, por hipótesis, **(6)** tenemos $\alpha_i A_i \cdot A_i = 0$**.** **(7)**
(8)(9) Teniendo en cuenta que $A \cdot A > 0$, se concluye que $\alpha_i = 0$ para $i = 1, 2, ..., r$**.**

III. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL SIN LA AYUDA DEL ELD.

Vamos a demostrar que $A_1, A_2, ..., A_r$ vectores en R^n son linealmente independientes.

Sea $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_i A_i + ... + \alpha_r A_r = 0$.

Multiplicando ambas partes de esta ecuación por A_i con $i = 1, 2, \ldots, r$, se obtiene :

$$\alpha_1 A_i A_1 + \alpha_2 A_i A_2 + \ldots + \alpha_i A_i A_i + \ldots + \alpha_r A_i A_r = 0.$$

Como $A_i \cdot A_j = 0$ para $i \neq j$, por hipótesis, tenemos $\alpha_i A_i \cdot A_i = 0$.
Teniendo en cuenta que $A \cdot A > 0$, se concluye que $\alpha_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, r$.

7. Sea F: V $\mapsto$ W una aplicación lineal. Las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(i) El Kernel de F es igual a $\{0\}$.

(ii) Si u,w son elementos tal que F(v) = F(w), entonces $v = w$. En otras palabras, F es inyectiva.

I. **ELD**

Demostrar: KerF = {0} $\Leftrightarrow$ F es inyectiva

(1)	**F: V $\mapsto$ W es lineal**	**P**
$\Rightarrow$)(2)	KerF = $\{0\}$	P
(3)	F(v) = F(w)	P
(4)	F(v) □ F(w) = 0	3
(5)	F(v - w) = 0	I 4,1
(6)	v - $w \in$ KerF	I 5, Def KerF
(7)	$v - w = 0$	6,2
(8)	$v = w$	7
(9)	F(v) = F(w) $\Rightarrow$ $v = w$	CP 3,8
(10)	F es inyectiva	traducción 9
□$_1$ (11)	KerF = $\{0\} \Rightarrow$ F es inyectiva	CP 2,10
$\Leftarrow$) (12)	F es inyectiva	P
(13)	$v \in$ KerF	P
(14)	F(v) = 0	13
(15)	F(0) = 0	1
(16)	F(v) = F(0)	I 14,15
(17)	F(v) = F(w) $\Rightarrow$ $v = w$	12
(18)	F(v) = F(0) $\Rightarrow$ $v = 0$	0/w, 12
(19)	$v = 0$	PP 16,18
(20)	KerF = $\{0\}$	13,19
□$_2$ (21)	F es inyectiva $\Rightarrow$ KerF = $\{0\}$	CP 12,20
□ (22)	KerF = $\{0\} \Leftrightarrow$ F es inyectiva	LB 11,21

II. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL CON LA AYUDA DEL ELD.

Vamos a demostrar KerF = $\{0\} \Leftrightarrow$ [F(v) = F(w) $\Rightarrow$ v = w] .
$\Rightarrow$) **(2)**Sea KerF = $\{0\}$. **(3)(4)**Vamos a probar que F es inyectiva: Supongamos que F(v) = F(w) o sea F(v) − F(w) = 0. **(5)**Entonces F(v - w) = 0, puesto que F es lineal. **(6)**Esto quiere decir que v - $w \in$ KerF **(7)**o sea v – w = 0 (por hipótesis); **(8)**de donde v = w, **(9)** **(10)** lo que quiere decir que F es inyectiva. **(11)**Por lo tanto se tiene la implicación

$$\text{KerF} = \{0\} \Rightarrow \text{ F es inyectiva} \qquad (*)$$

(12) Supongamos ahora que F es inyectiva y demostremos que KerF = $\{0\}$.**(13)** Sea $v \in$ KerF . **(14)**Entonces F(v) = 0. **(15)**Debido a que F es lineal, F(0) = 0, **(16)(17)(18)(19)**y como F es inyectiva, v = 0. **(20)**Por lo tanto KerF = $\{0\}$. **(21)**Así que se cumple la implicación

$$\text{F es inyectiva } \Rightarrow \text{ KerF} = \{0\} \qquad (**)$$

(22) De (*) y (**) se tiene la equivalencia KerF = $\{0\} \Leftrightarrow$ F es inyectiva, que era lo que queríamos demostrar.

III. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL SIN LA AYUDA DEL ELD.

Vamos a demostrar la equivalencia

$$\text{KerF} = \{0\} \Leftrightarrow [F(v) = F(w) \Rightarrow v = w] .$$

$\Rightarrow$) Sea KerF = $\{0\}$. Vamos a probar que F es inyectiva.

Supongamos que

$$F(v) = F(w) \text{ o sea } F(v) - F(w) = 0.$$

Por ser F lineal

$$F(v - w) = 0$$

Esto quiere decir que

$$v - w \in \text{KerF} \text{ o sea } v – w = 0 \text{ (por hipótesis);}$$

de donde v = w, lo que quiere decir que F es inyectiva. Por lo tanto se tiene la implicación

$$\text{KerF} = \{0\} \Rightarrow \text{ F es inyectiva} \qquad (*)$$

Supongamos ahora que F es inyectiva y demostremos que KerF = {0}.

Sea $v \in$ KerF . Entonces F(v) = 0. Debido a que F es lineal F(0) = 0 y como F es inyectiva, v = 0. Por lo tanto KerF = {0}. Así que se cumple la implicación

$$\text{F es inyectiva} \Rightarrow \text{KerF} = \{0\} \qquad (**)$$

De (*) y (**) se tiene la equivalencia KerF = {0} $\Leftrightarrow$ F es inyectiva, que era lo que queríamos demostrar.

8. Demostrar que (1,1) y (-3,2) son linealmente independientes.

I. **ELD**

Demostrar: (1,1) y (-3,2) son L.I.

Traducción: $\alpha_1(1,1) + \alpha_2(-3,2) = (0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

(1)	$\alpha_1(1,1) + \alpha_2(-3,2) = (0,0)$	P
(2)	$(\alpha_1 - 3\alpha_2,\ \alpha_1 + 2\alpha_2) = (0,0)$	1
(3)	$\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0$ (i)	
	$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$ (ii)	2
(4)	$5\alpha_2 = 0$	-(i) + (ii), 3
(5)	$\alpha_2 = 0$	4
(6)	$\alpha_1 - 3 \cdot 0 = 0$	$0/\alpha_2$, 3(i)
(7)	$\alpha_1 = 0$	6
(8)	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$	5,7
(9)	$\alpha_1(1,1) + \alpha_2(-3,2) = (0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$	CP 1,8
□ (10)	(1,1) y (-3,2) son linealmente independientes	trad. 9

II. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL CON LA AYUDA DEL ELD.

Vamos a demostrar que (1,1) y (-3,2) son linealmente independientes.

(1)(2) Sea $\alpha_1(1,1) + \alpha_2(-3,2) = (0,0)$ o sea $(\alpha_1 - 3\alpha_2,\ \alpha_1 + 2\alpha_2) = (0,0)$.

(3) Entonces $\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0$ (i)

$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$ (ii)

(4)(5) Substrayendo de (ii) la ecuación (i) se obtiene $5\alpha_2 = 0$ o sea $\alpha_2 = 0$.**(6)(7)(8)**Sustituyendo este valor en (i), se obtiene $\alpha_1 = 0$. **(9)(10)**Por lo tanto (1,1) y (-3,2) son linealmente independientes.

III. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL SIN LA AYUDA DEL ELD.

Vamos a demostrar que (1,1) y (-3,2) son linealmente independientes.
Sea $\alpha_1(1,1) + \alpha_2(-3,2) = (0,0)$ o sea $(\alpha_1 - 3\alpha_2,\ \alpha_1 + 2\alpha_2) = (0,0)$.

Entonces $\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0$ (i)
$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$ (ii)

Substrayendo de (ii) la ecuación (i), se obtiene

$$5\alpha_2 = 0 \text{ o sea } \alpha_2 = 0.$$

Sustituyendo este valor de α_2 en (i), se obtiene $\alpha_1 = 0$. Por lo tanto (1,1) y (-3,2) son linealmente independientes.

9. Sean (a,b) y (c,d) dos vectores en el plano. Si $ad - bc = 0$, demuestre que son linealmente dependientes. Si $ad - bc \neq 0$, demuestre que son linealmente independientes.

I. **ELD** $_{a)}$

Demostrar : $ad - bc = 0 \Rightarrow$ (a,b) **y** (c,d) **son L.D.**

(1)	$ad - bc = 0$	P
(2)	$x(a,b) + y(c,d) = (0,0)$	P
(3)	$(xa, xb) + (yc, yd) = (0,0)$	
(4)	$(xa + yc,\ xb + yd) = (0,0)$	
(5)	$xa + yc = 0$ (i)	
	$xb + yd = 0$ (ii)	4
(6)	$xad + ycd = 0$ (iii)	
	$xbc + ydc = 0$ (iv	d(i), c(ii), 5
(7)	$xad - xbc = 0$	(iii) –(iv),6
(8)	$x(ad - bc) = 0$	7
(9)	Puede ocurrir $x \neq 0$	1,8

(10)	$\exists x, y$ no todos 0: $x(a,b)+y(c,d)$ = (0,0)	2,9
(11)	(a,b) y (c,d) son L.D.	traducción 10
(12)	$ad-bc=0 \Rightarrow$ (a,b) y (c,d) son L.D.	CP 1,11

DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL CON LA AYUDA DEL ELD

Vamos a demostrar que (a,b) y (c,d) son vectores linealmente independiente en el caso de que $ad-bc=0$.

(2) Sea $x(a,b)+$ $y(c,d)$ = (0,0). **(3)(4)(**Entonces $(xa+yc,\ xb+yd)$ = (0,0).

(5) Es decir

$$xa+yc=0 \qquad \text{(i)}$$
$$xb+yd=0 \qquad \text{(ii)}$$

(6) Multiplicando la primera ecuación por *d* y la segunda por *c*, se obtiene:

$$xad+ycd=0 \qquad \text{(iii)}$$
$$xbc+ydc=0 \qquad \text{(iv)}$$

(7) Ahora de (iii) restando (iv), queda :

$$xad-xbc=0$$

(8) y

$$x(ad-bc)=0$$

(9) Debido a que, por hipótesis, $ad-bc=0$, es posible $x\neq 0$. **(10)**Por lo tanto se puede afirmar que existen *x, y* no todos 0 tales que $x(a,b)+$ $y(c,d)$ = (0,0). **(11)** **(12)**Pero esto quiere decir que los vectores (a,b) y (c,d) son linealmente dependientes., que era lo que queríamos demostrar.

DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL SIN LA AYUDA DEL ELD

Vamos a demostrar que (a,b) y (c,d) son vectores linealmente independiente en el caso de que $ad-bc=0$.

Sea $x(a,b)+y(c,d)$ = (0,0). Entonces $(xa+yc,\ xb+yd)$ = (0,0).
Es decir

$$xa + yc = 0 \qquad \text{(i)}$$
$$xb + yd = 0 \qquad \text{(ii)}$$

De donde, multiplicando la primera ecuación por d y la segunda por c, se obtiene:

$$xad + ycd = 0 \qquad \text{(iii)}$$
$$xbc + ydc = 0 \qquad \text{(iv)}$$

Ahora, de (iii) restando (iv), tenemos :

$$xad - xbc = 0$$

y

$$x(ad - bc) = 0$$

Debido a que, por hipótesis, $ad - bc = 0$, es posible $x \neq 0$. Por lo tanto se puede afirmar que existen x, y no todos 0 tales que $x(a,b) + y(c,d) = (0,0)$. Pero esto quiere decir que los vectores (a,b) y (c,d) son linealmente dependientes., que era lo que queríamos demostrar.

I. **ELD** $_{b)}$

Demostrar : $ad - bc \neq 0 \Rightarrow (a,b)$ **y** (c,d) **son L.I.**

(1)	$ad - bc \neq 0$	P
(2)	$x(a,b) + y(c,d) = (0,0)$	P
(3)	$(xa, xb) + (yc, yd) = (0,0)$	2
(4)	$(xa + yc,\ xb + yd) = (0,0)$	3
(5)	$xa + yc = 0$ (i)	
	$xb + yd = 0$ (ii)	4
(6)	$xad + ycd = 0$ (iii)	
	$xbc + ydc = 0$ (iv)	d(i), c(ii), 5
(7)	$xad - xbc = 0$	(iii) –(iv),6
(8)	$x(ad - bc) = 0$	7
(9)	$x = 0$	1,8
(10)	$yc = 0$	0/x, 5(i)
(11)	$y = 0$	10
(12)	$ad - bc \neq 0 \Rightarrow (a,b)$ y (c,d) son L.I.	CP 1,11

DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL CON LA AYUDA DEL ELD

Vamos a demostrar que (a,b) y (c,d) son linealmente independientes si $ad-bc\neq 0$.

(2) Sea $x(a,b)+y(c,d)=(0,0)$. **(3)(4)**Entonces $(xa+yc,\ xb+yd)=(0,0)$. **(5)**Es decir

$$xa+yc=0 \qquad \text{(i)}$$
$$xb+yd=0 \qquad \text{(ii)}$$

(6) Multiplicando (i) por d y (ii) por c, obtenemos:

$$xad+ycd=0 \qquad \text{(iii)}$$
$$xbc+ydc=0 \qquad \text{(iv)}$$

(7) Restando (iv) de (iii), se tiene:

$$xad-xbc=0.$$

(8)O sea

$$x(ad-bc)=0.$$

(9) Debido a que, por hipótesis, $ad-bc\neq 0$, se deduce $x = 0$. **(10)(11)(12)**Reemplazando este valor para x en 5(i), se obtiene $y = 0$, demostrándose que los vectores (a,b) y (c,d) son linealmente independientes.

DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL SIN LA AYUDA DEL ELD

Vamos a demostrar que (a,b) y (c,d) son linealmente independientes si $ad-bc\neq 0$.

Sea $x(a,b)+y(c,d)=(0,0)$. Entonces $(xa+yc,\ xb+yd)=(0,0)$. Es decir

$$xa+yc=0 \qquad \text{(i)}$$
$$xb+yd=0 \qquad \text{(ii)}$$

Multiplicando (i) por d y (ii) por c, obtenemos:

$$xad + ycd = 0 \quad \text{(iii)}$$
$$xbc + ydc = 0 \quad \text{(iv)}$$

Restando (iv) de (iii), se tiene:

$$xad - xbc = 0.$$

O sea

$$x(ad - bc) = 0.$$

Debido a que, por hipótesis, $ad - bc \neq 0$, se deduce $x = 0$. Reemplazando este valor para x en 5(i), se obtiene $y = 0$, demostrándose que los vectores (a,b) y (c,d) son linealmente independientes.

10. Sean A,B dos vectores en R^2**,** y asuma que ninguno de ellos es 0. Si no existe un c tal que cA = B, demuestre que A,B forman una base de R^2, y que R^2 es la suma directa de los subespacios generados por A y B respectivamente.

I. **ELD**

Demostrar: $\neg(\exists c)(cA = B) \Rightarrow$ **{A,B} es base de** R^2 **y** R^2 **= G{A}** $\oplus$ **G{B}**

(1)	A, B $\in R^2 \wedge$ A $\neq 0 \wedge$ B $\neq$ 0	P
(2)	$\neg(\exists c)(cA = B)$	P
(3)	$\neg(\exists c)(cA - B = 0)$	2
(4)	A, B no son L. D.	traducción 3
(5)	A, B son L. I.	traducción 4
(6)	{A, B}es máximo L .I.	5,1
(7)	{A, B} es una base de R^2	6,1
(8)	$\forall X \in R^2 \exists \alpha, \beta \in R : X = \alpha A + \beta B$	7
(9)	G{A} = { $\alpha A / \alpha \in R$ }	1
(10)	G{B } = { $\beta B / \beta \in R$ }	1
(11)	G{A} $\cap$ G{B } = {0} ya que $0 \cdot A = 0 \wedge 0 \cdot B = 0$	9,10
(12)	R^2 = G{A} $\oplus$ G{B}	8,9,10,11
(13)	{A, B}es una base de $R^2 \wedge R^2$ = G{A} $\oplus$ G{B}	A 7,12

DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL CON LA AYUDA DEL ELD

Vamos a demostrar que A,B forman una base de R^2, y que R^2 es la suma directa de los subespacios generados por A y B respectivamente si no existe un c tal que
cA = B.

(2)(3) Supongamos que no existe un c tal que cA = B, o sea tal que $cA - B = 0$.**(4)** Esto quiere decir que A, B no son linealmente dependientes, pues siendo, por hipótesis $A \neq 0$ y $B \neq 0$, $c \neq 0$. **(5)**Pero esto significa que son linealmente independientes. **(6) (7) (8)**Como A y B son elementos de R^2, entonces {A, B}es un conjunto máximo linealmente independiente, lo que indica que {A, B} es una base de R^2, es decir que para todo X de R^2 existen $\alpha, \beta \in R$ tal que $X = \alpha A + \beta B$. **(9)(10)(11)**Construyendo G{A} = { $\alpha A / \alpha \in R$ } y G{B } = { $\beta B / \beta \in R$ }, se tiene G{A} $\cap$G{B } = {0} ya que $0 \cdot A = 0$ y $0 \cdot B = 0$. **(12)** **(13)**Finalmente, por teorema 7, se tiene R^2 = G{A} $\oplus$ G{B}.

DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL SIN LA AYUDA DEL ELD

Vamos a demostrar que los vectores A y B forman una base de R^2, y que R^2 es la suma directa de los subespacios generados por A y B respectivamente si no existe un c tal que cA = B.

Supongamos que no existe un c tal que cA = B, o sea tal que $cA - B = 0$. Esto quiere decir que A, B no son linealmente dependientes, pues por hipótesis $A \neq 0$ y $B \neq 0$, $c \neq 0$. Pero esto significa que son linealmente independientes. Como A y B son elementos de R^2, entonces {A, B}es un conjunto máximo linealmente independiente, lo que indica que {A, B} es una base de R^2, es decir que para todo X de R^2 existen $\alpha, \beta \in R$ tal que $X = \alpha A + \beta B$.

Construyendo

$$G\{A\} = \{ \alpha A / \alpha \in R \} \text{ y } G\{B\} = \{ \beta B / \beta \in R \},$$

se tiene

$$G\{A\} \cap G\{B\} = \{0\} \text{ ya que } 0 \cdot A = 0 \text{ y } 0 \cdot B = 0.$$

Finalmente, por teorema 7, se tiene R^2 = G{A} $\oplus$ G{B}.

15. Sean V, W dos espacios vectoriales y F: V $\mapsto$ W una aplicación lineal. Sean $w_1, w_2, \ldots, w_n$ elementos de W linealmente independiente, y sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tal que F(v_i) = w_i para i = 1, 2, . . . , n. Demuestre que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente independientes.

I. **ELD**

Demostrar : $v_1, v_2, \ldots, v_n$ **son linealmente independientes.**

Traducción : $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \;\; i = 1, 2, \ldots, n$

(1)	**V, W espacios vectoriales**	**P**
(2)	**F: V $\mapsto$ W una aplicación lineal**	**P**
(3)	$w_1, w_2, \ldots, w_n$ **L.I.**	**P**
(4)	$v_1, v_2, \ldots, v_n \in$ **V: F** $(v_i) = w_i$**, i = 1, 2, . . . , n**	**P**
(5)	$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$	P
(6)	F$(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n)$ = F(0)	5
(7)	$F(\alpha_1 v_1) + F(\alpha_2 v_2) + \ldots + F(\alpha_n v_n)$ = F(0)	I 6,2
(8)	$\alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) + \ldots + \alpha_n F(v_n)$ = F(0)	I 7,2
(9)	F(0) = 0	2
(10)	$\alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) + \ldots + \alpha_n F(v_n) = 0$	I 8,9
(11)	$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n w_n = 0$	I 10,4
(12)	$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$	I 3,10
(13)	$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \;\; i = 1, 2, \ldots, n$	CP 5,12

II. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL CON LA AYUDA DEL ELD

Vamos a demostrar que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son vectores linealmente independientes.

(5) Sea $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$. **(6)**Entonces F$(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n)$ = F(0). **(7)(8)(9)**Por ser F lineal, $\alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) + \ldots + \alpha_n F(v_n)$ = F(0) y F(0) = 0 . **(10)**De donde $\alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) + \ldots + \alpha_n F(v_n) = 0$ **(11)** o sea $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n w_n = 0$ ya que F(v_i) = w_i, para i = 1, 2, . . . , n .

(12) Como los $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son linealmente independientes entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. **(13)**Por lo tanto, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son vectores linealmente independientes.

III. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL SIN LA AYUDA DEL ELD

Vamos a demostrar que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son vectores linealmente independientes.

Sea

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 .$$

Entonces

$$F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) = F(0).$$

Por ser F lineal,

$$\alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) + \ldots + \alpha_n F(v_n) = F(0) \text{ y } F(0) = 0 .$$

De donde

$$\alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) + \ldots + \alpha_n F(v_n) = 0$$

o sea

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n w_n = 0 \text{ ya que } F(v_i) = w_i, \text{ para } i = 1,2,..,n$$

Como los $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son linealmente independientes entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Por lo tanto, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son vectores linealmente independientes.

11. Sea F una aplicación lineal, cuyo Kernel es $\{0\}$. Suponga que V y W tienen ambos la misma dimensión n. Demuestre que la imagen F es todo W.

I. **ELD**

Demostrar : **ImF = W**

Traducción : $u \in \operatorname{Im} F \Leftrightarrow u \in W$

(1)	**F: V $\mapsto$ W una aplicación lineal**	**P**
(2)	**KerF = {0}**	**P**
(3)	**dimV = dimW**	**P**
$\Rightarrow$) (4)	$u \in \operatorname{Im} F$	P
(5)	$\exists v \in V : F(v) = u$	I 4, Def.ImF
(6)	$F(v) \in W$	1

	(7)	$u \in W$	I 5,6
$\square_1$	(8)	$u \in \operatorname{Im} F \Rightarrow u \in W$	CP 4,7
$\Leftarrow)$	(9)	$u \in W$	P
	(10)	F es inyectiva y sobreyectiva	2,3
	(11)	$\exists v \in V : F(v) = u$	9,10
	(12)	$u \in \operatorname{Im} F$	11
$\square_2$	(13)	$u \in W \Rightarrow u \in \operatorname{Im} F$	CP 9,12
	(14)	$u \in \operatorname{Im} F \Leftrightarrow u \in W$	LB 8,13
□	(15)	ImF = W	traducción 14

II. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL CON LA AYUDA DEL ELD

Vamos a demostrar que ImF = W.

(4) Sea $u \in \operatorname{Im} F$. **(5)** Entonces existe un $v \in V : F(v) = u$.**(6)(7)**Como F es una aplicación de V en W, entonces F(v)$\in W$ y por lo tanto $u \in W$. **(8)**Por lo tanto se tiene la implicación

$$u \in \operatorname{Im} F \Rightarrow u \in W \qquad (*)$$

(9) Sea ahora $u \in W$. **(10)**Como KerF = $\{0\}$ y dimV = dimW, F es inyectiva y sobreyectiva. **(11)** **(12)**Por lo tanto existe un $v \in V : F(v) = u$, con lo que F(v)$\in W$ ya que F es una aplicación de V en W. **(13)**Así que se tiene la implicación

$$u \in W \Rightarrow u \in \operatorname{Im} F \qquad (**)$$

(14) De (*) y (**) se tiene la equivalencia $u \in \operatorname{Im} F \Leftrightarrow u \in W$ **(15)** o sea ImF = W.

III. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL SIN LA AYUDA DEL ELD

Vamos a demostrar que ImF = W.

Sea $u \in \operatorname{Im} F$. Entonces existe un $v \in V : F(v) = u$ .Como F es una aplicación de V en W, entonces F(v)$\in W$ y por lo tanto $u \in W$. Por lo tanto se tiene la implicación

$$u \in \operatorname{Im} F \Rightarrow u \in W \qquad (*)$$

Sea ahora $u \in W$. Como KerF = $\{0\}$ y dimV = dimW, F es inyectiva y sobreyectiva. Por lo tanto existe un $v \in V : F(v) = u$, con lo que F(v)$\in W$ ya que F es una aplicación de V en W. Así que se tiene la implicación

$$u \in W \Rightarrow u \in \operatorname{Im} F \qquad (**)$$

De (*) y (**) se tiene la equivalencia $u \in \operatorname{Im} F \Leftrightarrow u \in W$ o sea ImF = W.

12. Sea F : V$\mapsto$W una aplicación lineal y suponga que la imagen de F es todo W. Suponga que V y W tienen la misma dimensión n. Demuestre que el Kernel de F es $\{0\}$.

I. **ELD**

Demostrar : **KerF = {0}**

(1)	**F: V $\mapsto$ W una aplicación lineal**	**P**
(2)	**ImF = W**	**P**
(3)	**dimV = dimW = n**	**P**
(4)	dimV = dimKerF + dimImF	Teorema 3
(5)	dimV = dimKerF + dimW	I 4,2
(6)	dimV = dimKerF + dimV	I 3,5
(7)	dimKerF = 0	6
□ (8)	KerF = $\{0\}$	traducción 7

II. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL CON LA AYUDA DEL ELD

Vamos a demostrar que el Kernel de F es $\{0\}$.
(4) Por Teorema 3, se tiene que dimV = dimKerF + dimImF. **(5)**Debido a que, por la segunda hipótesis, ImF = W, entonces dimV = dimKerF + dimW. **(6)**Como dimV = dimW = n (tercera hipótesis), entonces dimV = dimKerF + dimV, **(7)**o sea dimKerF = 0. **(8)**Pero esto quiere decir que KerF = $\{0\}$.

III. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL SIN LA AYUDA DEL ELD

Vamos a demostrar que el Kernel de F es $\{0\}$.

Por Teorema 3, se tiene que

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} F + \dim \operatorname{Im} F.$$

Por la segunda hipótesis,

$$\mathrm{ImF} = W.$$

Entonces

$$\mathrm{dimV} = \mathrm{dimKerF} + \mathrm{dimW}.$$

Como

$$\mathrm{dimV} = \mathrm{dimW} = n \text{ (tercera hipótesis)},$$

entonces

$$\mathrm{dimV} = \mathrm{dimKerF} + \mathrm{dimV},$$

o sea

dimKerF = 0. Pero esto quiere decir que KerF = $\{0\}$.

13. Sea L : V $\mapsto$ W una aplicación lineal. Sea w un elemento de W. Sea v_0 un elemento de V tal que $L(v_0)$ = w. Demuestre que cualquier solución de la ecuación L(x) = w es del tipo $v_0 + u$, donde u es un elemento del Kernel de L.

I. **ELD**

Demostrar : $L(x) = w \Rightarrow x = v_0 + u,\ u \in KerL$

(1)	**F: V $\mapsto$ W una aplicación lineal**	**P**
(2)	$w \in W$	**P**
(3)	$v_0 \in V$: L(v_0) = w	**P**
(4)	L(x) = w	P
(5)	L(x) = L(v_0)	I 3,4
(6)	L(x) - L(v_0) = 0	5
(7)	L(x - v_0) = 0	6,1
(8)	x - $v_0 \in KerL$	I 7,Def.KerL
(9)	u = x - v_0	P
(10)	u $\in KerL$	I 8,9
(11)	x = v_0 + u, u $\in KerL$	9,10
(12)	$L(x) = w \Rightarrow x = v_0 + u,\ u \in KerL$	CP 4,11

□ (13) Cualquier solución de la ecuación L(x) = w es del tipo x = v_0 + u, donde u es un elemento del Kernel de L trad. 12

II. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL CON LA AYUDA DEL ELD

Vamos a demostrar que cualquier solución de la ecuación L(x) = w es del tipo $v_0 + u$, donde u es un elemento del Kernel de L.

(4) Sea L(x) = w.**(5) (6)**Por la tercera hipótesis, L(x) = L(v_0), es decir, L(x) - L(v_0) = 0. **(7)**Como L es una aplicación lineal, entonces L(x - v_0) = 0. **(8)** Pero esto significa que x - $v_0 \in KerL$. **(9)**Sea u = x - v_0 .**(10) (11)** De donde x = v_0 + u y u$\in KerL$, **(12) (13)** que era lo que queríamos demostrar.

III. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL SIN LA AYUDA DEL ELD

Vamos a demostrar que cualquier solución de la ecuación L(x) = w es del tipo $v_0 + u$, donde u es un elemento del Kernel de L.

Sea

$$L(x) = w.$$

Entonces

$$L(x) = L(v_0),$$

es decir,

$$L(x) - L(v_0) = 0, \text{ por la tercera hipótesis.}$$

Como L es lineal,

$$L(x - v_0) = 0.$$

Pero esto significa que

$$x - v_0 \in KerL.$$

Sea

$$u = x - v_0.$$

De donde

$$x = v_0 + u \text{ y } u \in KerL,$$

que era lo que queríamos demostrar.

14. Sea L : $R^2 \mapsto R^2$ una aplicación lineal tal que L$\neq 0$ pero $L^2 = L \circ L = 0$. Demuestre que existe una base {A, B} de R^2 tal que L(A) = B y L(B) = 0.

I. **ELD**

Demostrar : $\exists$ {A, B} base de R^2 : L(A) = B y L(B) = 0.

(1)	**L: $R^2 \mapsto R^2$ una aplicación lineal**	**P**
(2)	**$L^2 = L \circ L = 0$.**	**P**
(3)	{A, B} $\subseteq R^2$: L(A) = B y L(B) = 0	P
(4)	$\alpha A + \beta B = 0$	P

(5)	L $(\alpha A+\beta B)=L(0)$	4
(6)	$\alpha L(A)+\beta L(B)=L(0)$	I 5,1
(7)	L(0) = 0	1
(8)	$\alpha L(A)+\beta L(B)=0$	I 6,7
(9)	α B + $B\cdot 0$= 0	I 8,3
(10)	α B = 0	9
(11)	α = 0	10,3
(12)	$\beta B=0$	I 11,4
(13)	$\beta=0$	12, 3
(14)	α = $\beta=0$	11,13
(15)	$\alpha A+\beta B=0\Rightarrow \alpha=\beta=0$	CP 4,14
(16)	{A,B} es L.I.	traducción 15
(17)	{A, B} $\subset R^2$	P
(18)	{A,B}es una base de R^2 tal que L(A) =B y L(B) = 0	3,16,17

II. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL CON LA AYUDA DEL ELD

Vamos a demostrar que existe una base {A, B} de R^2 tal que L(A) = B y L(B) = 0.

(4) Sea $\alpha A+\beta B=0$. (*)

(5) Entonces L $(\alpha A+\beta B)=L(0)$, **(6)**de donde $\alpha L(A)+\beta L(B)=L(0)$ (F es lineal). **(7) (8)**Como L(0) = 0, entonces $\alpha L(A)+\beta L(B)=0$. **(9)**Debido a que L(A) = B y L(B) = 0 (tercera hipótesis), la anterior igualdad resulta en α B + $B\cdot 0$= 0**(10)**o sea en α B = 0 , **(11)**de donde α = 0 ya que B $\neq 0$. **(12)**Reemplazando este valor de α en (*), se tiene $\beta B=0$. **(13)**De donde $\beta=0$, **(14)(15)(16)**comprobándose que el conjunto {A, B} es linealmente independiente. **(17) (18)**Como {A, B} es subconjunto de R^2 , entonces es una base y satisface que L(A) = B y L(B) = 0, que era lo que queríamos demostrar.

III. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL SIN LA AYUDA DEL ELD

Vamos a demostrar que existe una base {A, B} de R^2 tal que L(A) = B y L(B) = 0.

Sea $\alpha A+\beta B=0$. (*)

Entonces

$$L(\alpha A+\beta B)=L(0),$$

de donde

$$\alpha L(A)+\beta L(B)=L(0) \text{ (F es lineal).}$$

Como

$$L(0) = 0,$$

Entonces

$$\alpha L(A)+\beta L(B)=0. \qquad (**)$$

Por tercera hipótesis

$$L(A) = B \text{ y } L(B) = 0. \qquad (***)$$

De (**) y (***)

$$\alpha B + B\cdot 0 = 0 \text{ o sea en } \alpha B = 0,$$

de donde

$$\alpha = 0 \text{ ya que } B \neq 0.$$

Reemplazando este valor de α en (*), se tiene $\beta B=0$. De donde $\beta=0$, comprobándose que el conjunto $\{A, B\}$ es linealmente independiente. Como $\{A, B\}$ es subconjunto de R^2, entonces es una base y satisface que L(A) = B y L(B) = 0, que era lo que queríamos demostrar.

15. Sea L : $R^2 \mapsto R^2$ una aplicación lineal definida por
L(x, y) = (2x + y, 3x - 5y). Demuestre que L es invertible.

I. **ELD**

Demostrar : L tal que L(x,y) = (2x+y,3x-5y) es invertible.

Traducción : (i) KerL = $\{0\}$
(ii) L es sobreyectiva

(1)	**L : $R^2 \mapsto R^2$ lineal : L(x, y) = (2x + y, 3x-5y)**	**P**
(2)	(x, y) $\in$ KerL	P
(3)	(2x + y, 3x-5y) = (0,0)	I 2,Def.KerL
(4)	2x + y = 0 (i) 3x - 5y = 0 (ii)	3
(5)	13x = 0	5(i) + (ii), 4
(6)	x = 0	5
(7)	y = 0	I 6,4(i)
(8)	x = y = 0	6,7
(9)	(x, y) $\in$ KerL $\Rightarrow$ x = y = 0	CP 2,8
$\square_1$(10)	KerL = $\{0\}$	traducción 9
(11)	dimV = dimKerL + dimImL	Teorema 3
(12)	dimKerL = 0	10
(13)	dimV = dimImL	11,12

□$_2$ (14) L es sobreyectiva 14
□ (15) L es invertible 10,13

II. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL CON LA AYUDA DEL ELD

Vamos a demostrar que la aplicación lineal L definida por
L(x, y) = (2x + y, 3x - 5y) es invertible.

Tenemos que demostrar : (i) KerL = $\{0\}$ y (ii) L es sobreyectiva.

(2) Sea (x, y) $\in$ KerL **(3)** Entonces (2x + y, 3x-5y) = (0,0).

(4)O sea

$$2x + y = 0 \quad (i)$$
$$3x - 5y = 0 \quad (ii)$$

(5) Multiplicando (i) por 5 y adicionándole (ii), se obtiene:

$$13x = 0.$$

(6) De donde

$$x = 0.$$

(7) Reemplazando este valor de x en (i), se obtiene :

$$y = 0.$$

(8)(9)(10) Lo que quiere decir que KerL = $\{0\}$. **(11)(12)**Esto a su vez significa que dimKerL = 0; **(13)**de donde, por el Teorema 3, se deduce que la dimensión de V es igual a la dimensión de la imagen de L, **(14)**comprobándose que L es sobreyectiva. **(15)**Y con esto se completa la demostración de que L es invertible.

III. DEMOSTRACIÓN EN LENGUAJE FORMAL SIN LA AYUDA DEL ELD

Vamos a demostrar que la aplicación lineal L definida por
L(x, y) = (2x + y, 3x - 5y) es invertible.

Tenemos que demostrar : (i) KerL = $\{0\}$ y (ii) L es sobreyectiva.

Sea (x, y) $\in$ KerL Entonces (2x + y, 3x-5y) = (0,0).

O sea
$$2x + y = 0 \qquad (i)$$
$$3x - 5y = 0 \qquad (ii)$$

Multiplicando (i) por 5 y adicionándole (ii), se obtiene:

$$13x = 0.$$

De donde

$$x = 0.$$

Reemplazando este valor de x en (i), se obtiene :

$$y = 0.$$

Es decir

$$KerL = \{0\}.$$

Esto implica que dimKerL = 0; de donde, por el Teorema 3, se deduce que la dimensión de V es igual a la dimensión de la imagen de L, comprobándose de esta manera que L es sobreyectiva. Y con esto se completa la demostración de que L es invertible.