EXHIBICIÓN DE CAPULLOS Y FLORES DE LAS PRIMERAS SEMILLAS DE PENSAMIENTO LÓGICO SEMBRADAS CON LA AYUDA DEL ELD EN EL TERRENO DE LA ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO.

En este capítulo se hace una exhibición del pensamiento lógico matemático de los niños Santiago y Daniela Rojas, en sus 13 y 11 años respectivamente, desarrollado con la ayuda del ELD. Todos los ejercicios de esta sección, sin excepción alguna, fueron expuestos de modo independiente por cada uno de los pequeños tal como aquí se presentan. Existen los videos de estas exposiciones como evidencia que soporta lo que se plantea en este capítulo.

El siguiente bosquejo muestra las semillas de pensamiento lógico que fueron sembradas en el cerebro computante de los pequeños Santiago y Daniela.

1. SIMBOLIZACIÓN DE PROPOSICIONES

1.1 Proposiciones
1.2 Términos de enlace
1.3 La forma de las proposiciones moleculares
1.4 Simbolización de proposiciones

2 INFERENCIA LÓGICA

2.1 Reglas de inferencia y demostración
2.2 Deducción proposicional

3. CERTEZA Y VALIDEZ

3.1 Valores de certeza y términos de enlace de certeza funcional
3.2 Diagrama de valores de certeza
3.3 Conclusiones no válidas
3.4 Demostración condicional
3.5 Consistencia

3.6 Demostración indirecta

4. TABLAS DE CERTEZA

4.1 Tautologías
4.2 Implicación tautológica y equivalencia tautológica

5. TÉRMINOS, PREDICADOS Y CUANTIFICADORES UNIVERSALES

6. ESPECIFICACIÓN UNIVERSAL Y LEYES DE IDENTIDAD

7. GENERALIZACIÓN UNIVERSAL

El bosquejo anterior es la base del curso de lógica que se da para el primer semestre en los programas de Matemáticas y Física, y de Ciencias Sociales de la Universidad de la Amazonia.

C A P I T U L O 6

EJERCICIO 1

Demostrar que los siguientes razonamientos son válidos:

2. Ningún presidente de los Estados Unidos fue un inmigrante.
   John Quincy Adams fue un presidente de los Estados Unidos.
   Por tanto, John Quincy Adams no fue un inmigrante.

   I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

   a) Funciones predicativas y términos
      Px : x fue un presidente de los Estados Unidos.
      Ix : x fue un inmigrante
      J = John Quincy Adams

   b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(Px \rightarrow \neg Ix)$	P
(2)	P_j	P
$\triangleright$	$\neg I_j$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $\neg I_j$

(1)	$(\forall x)(Px \rightarrow \neg Ix)$	P
(2)	P_j	P
(3)	$P_j \rightarrow \neg I_j$	j/x, 1
□ (4)	$\neg I_j$	PP 1,3

3. Cada número par es divisible por dos.
   Diez es un número par.
   Ocho es un número par.
   Por tanto, ocho y diez son divisibles por dos.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas
   Px : x es un número par.
   Dx : x es divisible por dos

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(Px \rightarrow Dx)$	P
(2)	P_{10}	P
(3)	P_8	P
$\triangleright$	$P_{10} \wedge P_8$	conclusión

II. ELD

Demostrar : $P_{10} \wedge P_8$

(1)	$(\forall x)(Px \rightarrow Dx)$	P
(2)	P_{10}	P
(3)	P_8	P
(4)	$P_{10} \rightarrow D_{10}$	10/x, 1
(5)	$P_8 \rightarrow D_8$	8/x, 1
(6)	D_{10}	PP2,4
(7)	D_8	PP 3,5
□ (8)	$P_{10} \wedge P_8$	A 6,7

Con esto se ha demostrado que $P_{10} \wedge P_8$ se deduce lógicamente de las premisas (1),(2) y (3); es decir que el razonamiento 3 es válido.

4. Ningún número es mayor que el mismo.
   Tres es un número
   Por tanto, tres no es mayor que tres.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas
   Nx : x es un número.
   Mxy : x es mayor que y . (Mxx : x es mayor que el mismo)

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(Nx \to \neg Mxx)$	P
(2)	N_3	P
$\triangleright$	$\neg M_{33}$	conclusión

II. ELD

Demostrar : $\neg M_{33}$

(1)	$(\forall x)(Nx \to \neg Mxx)$	P
(2)	N_3	P
(3)	$N_3 \to \neg M_{33}$	3/x, 1
□ (4)	$\neg M_{33}$	PP 3,2

6. Todos los loros son pájaros
   Todos los pájaros son vertebrados
   Polly es un loro
   Por tanto, Polly es un vertebrado

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas y términos

   Lx : x es un loro.
   Px: x es pájaro
   Vx: x es vertebrado
   p = Polly

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(Lx \rightarrow Px)$	P
(2)	$(\forall x)(Px \rightarrow Vx)$	P
(3)	Lp	P
$\triangleright$	Vp	conclusión

II. ELD

Demostrar : Vp

	(1)	$(\forall x)(Lx \rightarrow Px)$	P
	(2)	$(\forall x)(Px \rightarrow Vx)$	P
	(3)	Lp	P
	(4)	$Lp \rightarrow Pp$	p/x, 1
	(5)	$Pp \rightarrow Vp$	p/x, 2
	(6)	Pp	PP3,4
□	(7)	Vp	PP 5,6

9. Todo presidente es un jefe de Estado nombrado por elección.
Un jefe de Estado no nombrado por elección es un monarca.
El rey Balduino es un monarca.
Por tanto, el rey Balduino no es un presidente.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas y términos

Px : x es un presidente
Jx: x es jefe de Estado nombrado por elección
Mx: x es un monarca
b = el rey Balduino

b) Simbolización del razonamiento

(1) $(\forall x)(Px \rightarrow Jx)$ P

(2) Un monarca es un jefe de Estado no nombrado por elección
$(\forall x)(Mx \rightarrow \neg Jx)$ P

(3) Mb P

$\triangleright$ $\neg Pb$ Conclusión

II. ELD

Demostrar : $\neg Pb$

(1)	$(\forall x)(Px \to Jx)$	P
(2)	$(\forall x)(Mx \to \neg Jx)$	P
(3)	Mb	P
(4)	$Pb \to Jb$	b/x, 1
(5)	$Mb \to \neg Jb$	b/x, 2
(6)	$\neg Ib$	PP 3,5
(7)	$\neg Pb$	TT 4,6

10. Ningún número impar es divisible por dos
Seis es divisible por dos.
Ocho es divisible por dos.
Por tanto, ni seis ni ocho son números impares.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas y términos

Ix : x es un número impar
Dx: x es divisible por dos
Seis = 6
Ocho = 8

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(Ix \to \neg Dx)$	P
(2)	D_6	P
(3)	D_8	P
$\triangleright$	$\neg I_6 \wedge \neg I_8$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $\neg I_6 \wedge \neg I_8$

(1)	$(\forall x)(Ix \to \neg Dx)$	P
(2)	D_6	P
(3)	D_8	P
(4)	$I_6 \to \neg D_6$	6/x, 1
(5)	$I_8 \to \neg D_8$	8/x, 1
(6)	$\neg D_6$	PP 2,4

(7)	$\neg D_8$	PP 3,5
□ (8)	$\neg D_6 \wedge \neg D_8$	A 6,7

11. Todos los congresistas son profesores o miembros de la Academia. El señor López trabaja en Madrid, pero no es miembro de la cademia. Por tanto, si el señor López es congresista es un profesor.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas y términos

Cx : x es congresista
Px: x es profesor
Mx : x es miembro de la Academia
Tx : x trabaja en Madrid
El Sr. Lopez = l

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(Cx \rightarrow Px \vee Mx)$	P
(2)	$T_l \wedge \neg M_l$	P
$\triangleright$	$C_l \rightarrow P_l$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $C_l \rightarrow P_l$

(1)	$(\forall x)(Cx \rightarrow Px \vee Mx)$	P
(2)	$T_l \wedge \neg M_l$	P
(3)	C_l	P
(4)	$C_l \rightarrow P_l \vee M_l$	l/x, 1
(5)	$P_l \vee M_l$	PP 3,4
(6)	$\neg M_l$	S 5
(7)	P_l	TP 5.6
□ (8)	$C_l \rightarrow P_l$	CP 3,7

E J E R C I C I O 2

Dar una demostración formal para cada uno de los razonamientos siguientes:

1. Tres más siete es mayor que dos más cinco.
   Cada número mayor que dos más cinco no es igual a dos por tres.
   Por tanto, tres más siete no es igual a dos por tres.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Simbolización del razonamiento

(1) $3 + 7 > 2 + 5$ P
(2) $(\forall x)(\, x > 2 + 5 \rightarrow x \neq 2 \times 3$ P
$\triangleright\ 3 + 7 \neq 2 \times 3$ Conclusión

II. ELD

Demostrar : $3 + 7 \neq 2 \times 3$

(1) $3 + 7 > 2 + 5$ P
(2) $(\forall x)(\, x > 2 + 5 \rightarrow x \neq 2 \times 3)$ P
(3) $3 + 7 > 2 + 5 \rightarrow 3 + 7 \neq 2 \times 3)$ 3 + 7/x , 2
□ (4) $3 + 7 \neq 2 \times 3$ PP 1,3

2. Cada número que no es igual a cero es mayor que cero o menor que cero.
   Seis dividido por dos no es cero y seis dividido por dos no es menor que cero.
   Por tanto, seis dividido por dos es mayor que cero.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas y términos
x = número
Seis dividido por dos : $6 \div 2$

b) Simbolización del razonamiento
(1) $(\forall x)(\, x \neq 0 \rightarrow x > 0 \vee x < 0\,)$ P
(2) $6 \div 2 \neq 0 \wedge \neg(6 \div 2 < 0\,)$ P
$\triangleright\ 6 \div 2 > 2$ Conclusión

II. ELD

Demostrar : $6 \div 2 > 2$

(1)	$(\forall x)(\ x \neq 0 \ \rightarrow \ x > 0 \ \vee \ x < 0\ )$	P
(2)	$6 \div 2 \ \neq \ 0 \ \wedge \neg(6 \div 2 < 0\ )$	P
(3)	$6 \div 2 \ \neq \ 0 \ \rightarrow \ 6 \div 2 > 0 \ \vee \ 6 \div 2 < 0$	$6 \div 2$/x, 1
(4)	$6 \div 2 \ \neq \ 0$	S 2
(5)	$6 \div 2 > 0 \ \vee \ 6 \div 2 < 0$	PP 3,4
(6)	$\neg(6 \div 2 < 0\ )$	S 2
□ (7)	$6 \div 2 > 0$	TP 5,6

3. Un número es par si y solo si es divisible por dos.
Tres por cinco no es par, pero tres más cinco es par.
Por tanto, tres por cinco no es divisible por dos, pero tres más cinco es par.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas y términos

Px : x es un número par
Dx : x es divisible por dos
Términos : $3 \times 5,\ 3+5$

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(\ Px \leftrightarrow Dx\ )$	P
(2)	$\neg P_{3\times5} \wedge D_{3+5}$	P
▷	$\neg D_{3+5} \wedge P_{3+5}$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $\neg D_{3+5} \wedge P_{3+5}$

(1)	$(\forall x)(\ Px \leftrightarrow Dx\ )$	P
(2)	$\neg P_{3\times5} \wedge D_{3+5}$	P
(3)	$P_{3\times5} \leftrightarrow D_{3\times5}$	3×5/x, 1
(4)	$\neg P_{3\times5}$	S 2
(5)	$D_{3\times5} \rightarrow P_{3\times5}$	LB 3
(6)	$\neg D_{3\times5}$	TT 4,5
(7)	$P_{3+5} \leftrightarrow D_{3+5}$	3+5/x, 1
(8)	$D_{3+5} \rightarrow P_{3+5}$	LB 7

(9)	D_{3+5}	S 2
(10)	P_{3+5}	PP 8,9
□ (11)	$\neg D_{3\times 5} \wedge D_{3+5}$	A 6,10

4. Para todo x, x más uno es par o x no es impar.
Si uno más tres no es par, entonces tres más uno no es par.
Por tanto, si tres es impar, entonces uno más tres es par.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRÁCTICA

a) Funciones predicativas y términos

P_{x+1} : x +1 es par
Ix : x es impar
Términos : 1+3, 3

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)\,(\,P_{x+1} \vee \neg Ix\,)$	P
(2)	$\neg P_{1+3} \rightarrow \neg P_{3+1}$	P
▹	$I_3 \rightarrow P_{1+3}$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $I_3 \rightarrow P_{1+3}$

(1)	$(\forall x)\,(\,P_{x+1} \vee \neg Ix\,)$	P
(2)	$\neg P_{1+3} \rightarrow \neg P_{3+1}$	P
(3)	$P_{3+1} \vee \neg I_3$	3/x, 1
(4)	I_3	P
(5)	P_{3+1}	TP 3,4
(6)	P_{1+3}	TT2,5
□ (7)	$I_3 \rightarrow P_{1+3}$	CP 4,6

5. Tres sumado a cualquier número impar da número par.
(Indicación: Si un número es impar, entonces este número más tres es par.)
Dos más tres es impar.
Si el resultado de sumar tres a dos más tres es par, entonces ocho es par. Por tanto, ocho es par.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas y términos

Ix : x es un número impar
Py : y es un número par

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(\ Ix \to P_{x+3})\ )$	P
(2)	I_{2+3}	P
(3)	$P_{((2+3)+3)} \to P_8$	P
$\triangleright$	P_8	Conclusión

II. ELD

Demostrar : P_8

(1)	$(\forall x)(\ Ix \to P_{x+3})\ )$	P
(2)	I_{2+3}	P
(3)	$P_{((2+3)+3)} \to P_8$	P
(4)	$I_{2+3} \to P_{((2+3)+3)}$	2+3/x, 1
(5)	$P_{((2+3)+3)}$	PP 4,2
□ (6)	P_8	PP 3,5

E J E R C I C I O 3

Dar una demostración formal de los siguientes razonamientos.

A 9. Para cada x, no ocurre que x sea a la vez un número positivo y x sea un número negativo.

Para cada x, si x es menor que 0, entonces x es un número negativo.
1+1 es un número positivo.
Por tanto, 1+1 no es menor que 0.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas

Nx : x es un número positivo
Px : x es un número negativo

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)\ \neg(Nx \wedge Px)$	P
(2)	$(\forall x)\ (x < 0 \rightarrow Px)$	P
(3)	N_{1+1}	P
$\triangleright$	$\neg\ (1+1 < 0)$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $\neg\ (1+1 < 0)$

(1)	$(\forall x)\ \neg(Nx \wedge Px)$	P
(2)	$(\forall x)\ (x < 0 \rightarrow Px)$	P
(3)	N_{1+1}	P
(4)	$\neg(N_{1+1} \wedge P_{1+1})$	1+1/x, 1
(5)	$1+1 < 0 \rightarrow P_{1+1}$	1+1/x, 2
(6)	$\neg N_{1+1} \vee \neg P_{1+1}$	DL 4
(7)	$\neg\ P_{1+1}$	TP 6,3
□ (8)	$\neg\ (1+1 < 0)$	TT 5,7

11. Todas las arañas son arácnidos.
Todos los arácnidos tienen ocho patas.
Charlotte es una araña.
Por tanto, Charlotte tiene ocho patas.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas

Ax : x es una araña
Sx : x es un arácnido
Tx : x tiene ocho patas
c : Charlotte

b) Simbolización del razonamiento

(1) $(\forall x)(Ax \rightarrow Sx)$ P
(2) $(\forall x)(Sx \rightarrow Tx)$ P
(3) Ac P
$\triangleright$ Tc Conclusión

II. ELD

Demostrar : Tc

(1)	$(\forall x)(Ax \rightarrow Sx)$	P
(2)	$(\forall x)(Sx \rightarrow Tx)$	P
(3)	Ac	P
(4)	$Ac \rightarrow Sc$	c/x, 1
(5)	$Sc \rightarrow Tc$	c/x, 2
(6)	Sc	PP3,4
□ (7)	Tc	PP 5,6

12. Ningún triángulo congruente a ABC es equilátero.
Sólo los triángulos congruentes a ABC son congruentes a DEF.
El triángulo GHI es equilátero.
Por tanto, el triángulo GHI no es congruente a DEF.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas y términos

X ≡ Δ ABC : X es triángulo congruente a ABC
X ≡ Δ DEF : X es triángulo congruente a DEF
Ex : X es triángulo equilátero
Término : Ghi = triángulo GHI

b) Simbolización del razonamiento

(1) $(\forall X)$ (X ≡ Δ ABC $\rightarrow \neg Ex$) P
(2) $(\forall X)$(X ≡ Δ DEF $\rightarrow$ X ≡ Δ ABC) P
(3) E_{GHI} P
$\triangleright$ $\neg$ (Δ GHI≡ ΔDEF) Conclusión

II. ELD

Demostrar : $\neg$ (Δ GHI$\equiv$ ΔDEF)

(1)	$(\forall X)$ (X $\equiv \Delta$ ABC $\rightarrow \neg Ex$)	P
(2)	$(\forall X)$ (X $\equiv \Delta$ DEF $\rightarrow$ X $\equiv \Delta$ ABC)	P
(3)	E_{GHI}	P
(4)	ΔGHI $\equiv \Delta$ ABC $\rightarrow \neg E_{GHI}$	GHI/X , 1
(5)	ΔGHI $\equiv \Delta$ DEF $\rightarrow$ ΔGHI $\equiv \Delta$ ABC	GHI/X ,2
(6)	$\neg$ (ΔGHI $\equiv \Delta$ ABC)	TT 3,4
□ (7)	$\neg$ (ΔGHI $\equiv \Delta$ DEF	TT 5,6

Probar las siguientes conclusiones presentando una deducción completa a partir de las premisas.

C6. **Demostrar : 5-5 = 0**

(1)	$(\forall x)\ (\neg Px \rightarrow (\neg Nx \rightarrow x = 0))$	**P**
(2)	$\neg N_{5-5}$	**P**
(3)	$(\forall x)$ **(x > 0 $\leftrightarrow$ Px)**	**P**
(4)	$\neg$**(5-5 > 0)**	**P**
(5)	$\neg P_{(5-5)} \rightarrow (\neg N_{5-5} \rightarrow 5-5 = 0)$	5-5/x, 1
(6)	5-5 > 0 $\leftrightarrow$ P_{5-5}	5-5/x,3
(7)	P_{5-5} $\rightarrow$ 5-5 > 0	LB 6
(8)	$\neg$ P_{5-5}	TT 4,7
(9)	$\neg N_{5-5} \rightarrow 5-5 = 0$	PP 5,8
□ (10)	5-5 = 0	PP 2,9

C7. **Demostrar 3 < 5**

(1)	$(\forall x)$ **(x < 4 $\wedge$ 4 < 5 $\rightarrow$ x < 5)**	**P**
(2)	$(\forall z)$ **(- 4 <- z $\leftrightarrow$ z < 4)**	**P**
(3)	**4 < 5**	**P**
(4)	**-4 < -3**	**P**
(5)	3 < 4 $\wedge$ 4 < 5 $\rightarrow$ 3 < 5	3/x, 1
(6)	- 4 <- 3 $\leftrightarrow$ 3 < 4	3/z, 2
(7)	- 4 <- 3 $\rightarrow$ 3 < 4	LB 6
(8)	3< 4	PP 4,7
(9)	3< 4 $\wedge$ 4 < 5	A 8,4
□ (10)	3 < 5	PP 5,9

C8. **Demostrar** $Sb \wedge Pb \rightarrow \neg Cb$

(1)	$(\forall u)(Su \wedge Ru \rightarrow \neg Cu)$	**P**
(2)	$(\forall u)(Pu \rightarrow Ru)$	**P**
(3)	$Sb \wedge Rb \rightarrow \neg Cb$	b/u, 1
(4)	$Pb \rightarrow Rb$	b/u, 2
(5)	$Sb \wedge Pb$	P
(6)	Pb	S 5
(7)	Rb	PP 4,6
(8)	Sb	S 5
(9)	$Sb \wedge Rb$	A 8,7
(10)	$\neg Cb$	PP 3,9
□ (11)	$Sb \wedge Pb \rightarrow \neg Cb$	CP 5,10

EJERCICIO 4

Simbolizar los razonamientos siguientes utilizando símbolos lógicos y los símbolos típicos de la Aritmética. Después escribir una deducción completa de la conclusión.

2. Para todo z, si z es mayor que tres más cuatro, entonces z es mayor que cero.
   Cada y es positivo si y solo si es mayor que cero.
   Tres más cinco es mayor que tres más cuatro.
   Por tanto, tres más cinco es positivo.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas y términos

Px : x es positivo
Tres más cinco : 3+5

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall z)(z > 3+4 \rightarrow z > 0)$	P
(2)	$(\forall y)(Py \leftrightarrow y > 0)$	P
(3)	$3+5 > 3+4$	P
$\triangleright$	$P_{(3+5)}$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : P_{3+5}

(1)	$(\forall z)(z > 3+4 \rightarrow z > 0)$	P
(2)	$(\forall y)(Py \leftrightarrow y > 0)$	P
(3)	$3+5 > 3+4$	P
(4)	$3+5 > 3+4 \rightarrow 3+5 > 0$	3+5/z, 1
(5)	$3+5 > 0$	PP3,4
(6)	$P_{3+5} \leftrightarrow 3+5 > 0$	3+5/y, 2
(7)	$3+5 > 0 \rightarrow P_{3+5}$	LB 6
□ (8)	P_{3+5}	PP 5,7

4. Cada alumno que ha hecho su trabajo entiende el problema.
   Juana es un alumno, pero no entiende el problema.
   Por tanto, Juan no ha hecho su trabajo.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas y términos

x = alumno
Hx : x ha hecho su trabajo
Ex : x entiende el problema
Juan = j

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(Hx \rightarrow Ex)$	P
(2)	$x = j \wedge \neg Ej$	P
▹	$\neg Hj$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $\neg Hj$

(1)	$(\forall x)(Hx \rightarrow Ex)$	P
(2)	$x = j \wedge \neg Ej$	P
(3)	$Hj \rightarrow Ej$	j/x, 1
(4)	$\neg Ej$	S 2
□ (5)	$\neg Hj$	TT 3,4

5. El que compuso la «Obertura 1812» murió en plena madurez.
   Scarlatti escribió para el clavicordio.
   Nadie a la vez fue buen músico y murió en plena madurez.
   Todos los que escribieron para el clavicordio fueron buenos músicos.
   Por tanto, Scarlatti no compuso la «Obertura 1812».

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas y términos

Cx : x compuso la Obertura 1812
Mx: x murió en plena madurez
Ex : x escribió para el clavicordio
Bx : x fue buen músico

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(Cx \to Mx)$	P
(2)	Es	P
(3)	$(\forall x)\ \neg(Bx \wedge Mx)$	P
(4)	$(\forall x)(Ex \to Bx)$	P
$\triangleright$	$\neg Cs$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $\neg Cs$

(1)	$(\forall x)(Cx \to Mx)$	P
(2)	Es	P
(3)	$(\forall x)\ \neg(Bx \wedge Mx)$	P
(4)	$(\forall x)(Ex \to Bx)$	P
(5)	$Cs \to Ms$	*s/x*, 1
(6)	$\neg(Bs \wedge Ms)$	*s/x, 3*
(7)	$Es \to Bs$	s/x, 4
(8)	Bs	PP2,7
(9)	$\neg Bs \vee \neg Ms$	DL 6
(10)	$\neg Ms$	TP 8,9
□ (11)	$\neg Cs$	TT 5,10

7. Cada u que es igual a tres más cinco o es igual a diez más dos es divisible por cuatro.
   Cada x que es divisible por cuatro o divisible por seis es par.

Por tanto, si nueve menos uno es igual a tres más cinco, entonces nueve es par.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas

Px : x ha hecho su trabajo
$u \div v$: u es divisible por v

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall u)(u = 3+5 \vee u = 10+2 \rightarrow u \div 4)$	P
(2)	$(\forall x)(x \div 4 \vee x \div 6 \rightarrow Px)$	P
$\triangleright$	$9-1 = 3+5 \rightarrow P_{9-1}$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $9-1 = 3+5 \rightarrow P_{9-1}$

(1)	$(\forall u)(u = 3+5 \vee u = 10+2 \rightarrow u \div 4)$	P
(2)	$(\forall x)(x \div 4 \vee x \div 6 \rightarrow Px)$	P
(3)	$9-1 = 3+5$	P
(4)	$9-1 = 3+5 \vee 9-1 = 10+2 \rightarrow (9-1) \div 4$	9-1/u, 1
(5)	$(9-1) \div 4 \vee (9-1) \div 6 \rightarrow P_{9-1}$	9-1/x, 2
(6)	$9-1 = 3+5 \vee 9-1 = 10+2$	LA 3
(7)	$(9-1) \div 4$	PP 4,6
(8)	$(9-1) \div 4 \vee (9-1) \div 6$	LA 7
(9)	P_{9-1}	PP 5,8
□ (10)	$9-1 = 3+5 \rightarrow P_{9-1}$	CP 3,9

8. Cada x divisible por doce es divisible por cuatro.
Cada y divisible por cuatro es par.
O z es divisible por dos o no es par.
Quince no es divisible por dos.
Por tanto, quince no es divisible por doce

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas y términos
Px : x es par
$x \div 12$: x es divisible por doce

$x \div 4$: x es divisible por cuatro
$x \div 2$: x es divisible por dos
Términos : 15

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)\,(x \div 12 \rightarrow x \div 4)$	P
(2)	$(\forall x)\,(x \div 4 \rightarrow Px)$	P
(3)	$(\forall x)\,(x \div 2 \vee \neg Px)$	P
(4)	$\neg(15 \div 2)$	P
$\triangleright$	$\neg(15 \div 12)$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $\neg(15 \div 12)$

(1)	$(\forall x)\,(x \div 12 \rightarrow x \div 4)$	P
(2)	$(\forall x)\,(x \div 4 \rightarrow Px)$	P
(3)	$(\forall x)\,(x \div 2 \vee \neg Px)$	P
(4)	$\neg(15 \div 2)$	P
(5)	$15 \div 12 \rightarrow 15 \div 4$	15 /x, 1
(6)	$15 \div 4 \rightarrow P_{15}$	15 /x, 2
(7)	$15 \div 2 \vee \neg P_{15}$	15 /x, 3
(8)	$\neg P_{15}$	TP 7,4
(9)	$\neg(15 \div 4)$	TT 6,8
(10)	$\neg(15 \div 12)$	TT 5,9

9. Cada número o es menor que cinco o a la vez mayor que tres y positivo.
Si un número es mayor que cero, entonces si es menor que cinco es positivo.
Cuatro es un número mayor que cero.
Por tanto, cuatro es positivo.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas

Px : x es positivo

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)\,(x < 5 \vee (x > 3 \wedge Px))$	P
(2)	$(\forall x)\,(x > 0 \rightarrow (x < 5 \rightarrow Px)$	P
(3)	$4 > 0$	P
$\triangleright$	P_4	Conclusión

II. ELD

Demostrar : P_4

(1)	$(\forall x)\,(x < 5 \lor (x > 3 \land Px))$	P
(2)	$(\forall x)\,(x > 0 \to (x < 5 \to Px))$	P
(3)	$4 > 0$	P
(4)	$4 < 5 \lor (4 > 3 \land P_4)$	4/x, 1
(5)	$4 > 0 \to (4 < 5 \to P_4)$	4/x, 2
(6)	$4 < 5 \to P_4$	PP 3,5
(7)	$P \lor (Q \land R) \leftrightarrow (P \lor Q) \land (P \lor R)$	Tautología
(8)	$4<5 \lor (4>3 \land P_4) \leftrightarrow (4<5 \lor 4>3) \land (4<5 \lor P_4)$	$4 < 5$/ P,$4 > 3$/Q, P_4 / R
(9)	$4 < 5 \lor (4 > 3 \land P_4) \to (4 < 5 \lor 4 > 3) \land (4 < 5 \lor P_4)$	LB 8
(10)	$(4 < 5 \lor 4 > 3) \land (4 < 5 \lor P_4)$	PP 4,9
(11)	$4 < 5 \lor P_4$	S 10
(12)	$P_4 \to P_4$	L
(13)	$P_4 \lor P_4$	DS 11,6,12
□ (14)	P_4	DP 13

E J E R C I C I O 5.

Traducir los siguientes razonamientos en símbolos lógicos y dar una deducción de la conclusión a partir de las premisas.

B 1. Cada cosa en esta lección es una parte de la Lógica.
Cada persona que puede resolver problemas en una parte de la Lógica es un genio.
Carolina es una persona que puede resolver problemas sobre la primera deducción y está en esta lección.
Por tanto, Carolina es un genio.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas y términos

x = cosa
Lx : x está en esta lección
Mx : x es una parte de la Lógica
Px : x es una persona
Rxp : x puede resolver problemas en una parte de la lógica
Gx : x es un genio

Términos: Carolina = c, p = problemas sobre la primera deducción

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(Lx \rightarrow Mx)$	P
(2)	$(\forall x)\,(Px \wedge Rxp \wedge Mp \rightarrow Gx)$	P
(3)	$Pc \wedge Rcp \wedge Lp$	P
▹	Gc	Conclusión

II. ELD

Demostrar : Gc

(1)	$(\forall x)(Lx \rightarrow Mx)$	P
(2)	$(\forall x)\,(Px \wedge Rxp \wedge Mp \rightarrow Gx)$	P
(3)	$Pc \wedge Rcp \wedge Lp$	P
(4)	$Lp \rightarrow Mp$	p/x, 1
(5)	Lp	S 3
(6)	Mp	PP 4,5
(7)	$Pc \wedge Rcp \wedge Mp \rightarrow Gc$	c /x,2
(8)	Rcp	S 3
(9)	Pc	S 3
(10)	$Pc \wedge Rcp \wedge Mp$	A 9,8,6
□ (11)	Gc	PP 7,10

B2. Mangostas pueden matar a las cobras.
Montgomery no puede matar a Charli.
Por tanto, si Charli es una cobra entonces Motgomery no es una mangosta.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRÁCTICA

a) Funciones predicativas

Nx : x es una mangosta.
Cy : y es una cobra.
Mxy : x puede matar a y.
Términos: m = Montgomery
ch = Charli

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(\forall y)(Nx \wedge Cy \rightarrow Mxy)$	P
(2)	$\neg Mmch$	P
▹	Cch $\rightarrow \neg Nm$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $Cch \to \neg Nm$

(1)	$(\forall x)(\forall y)(Nx \wedge Cy \to Mxy)$	P
(2)	$\neg Mmch$	P
(3)	Cch	P
(4)	$Nm \wedge Cch \to Mmch$	$m/x, ch/y$,1
(5)	$\neg(Nm \wedge Cch)$	TT 4,2
(6)	$\neg Nm \vee \neg Cch$	DL 5
(7)	$\neg Nm$	TP 6,3
(8)	$Cch \to \neg Nm$	CP 3,7

B3. Todo aquel que quiera a Jorge escogerá a Pedro para su partido.
Pedro no es amigo de nadie que no sea amigo de Juan.
Luis no escogerá a nadie que no sea amigo de Carlos para su partido.
Por tanto, si Carlos es amigo de Juan, entonces Luis no quiere a Jorge.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas

Qxo : x quiere a Jorge para su partido.
Exp : x escogerá a Pedro
Axj : x es amigo de Juan.
Apx : x Pedro es amigo de *x*
Eex : Luis escogerá a *x*

Términos: p = Pedro
o = Jorge
j = Juan
e = Luis
c = carlos

b) Simbolización del razonamiento

(1) $(\forall x)(Qxo \to Exp)$ P

(2) $(\forall x)(Axj \to \neg Apx)$ (Si alguien es amigo de Juan entonces Pedro no es amigo de él). P

(3) $(\forall x)(\neg Axc \to \neg Eex)$ (Si alguien no es amigo de Carlos entonces Luis no lo escogerá para su partido. P

$\triangleright$ $Acj \to \neg Qeo$ Conclusión

II. ELD

Demostrar : $Acj \to \neg Qeo$

(1)	$(\forall x)(Qxo \to Exp)$	P
(2)	$(\forall x)(Axj \to \neg Apx)$	P
(3)	$(\forall x)(\neg Axc \to \neg Eex)$	P
(4)	Acj	P
(5)	$Acj \to \neg Apc$	c/x, 2
(6)	$\neg Apc$	PP 4,5
(7)	$\neg Apc \to \neg Eep$	p /x,3
(8)	$\neg Eep$	PP6,7
(9)	$Qeo \to Eep$	*e/x*, 1
(10)	$\neg Qeo$	TT 9,8
□ (11)	$Acj \to \neg Qeo$	PP 4,10

4. Sólo un tonto alimentaría a un oso salvaje.
Cristina alimenta a Nicolás, pero no es tonta.
Por tanto, Nicolás no es un oso salvaje.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas

$Tx : x$ es tonto.
$Axy : x$ limenta a y
$Oy : y$ es un oso salvaje.

Términos: c = Cristina
n = Nicolás

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(\forall y)(Oy \wedge Axy \to Tx)$	P
(2)	$Acn \wedge \neg Tc$	P
▹	$\neg On$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $\neg On$

(1)	$(\forall x)(\forall y)(Oy \wedge Axy \to Tx)$	P
(2)	$Acn \wedge \neg Tc$	P
(3)	$On \wedge Acn \to Tc$	*n/y*, *c/x*, 1

(4)	$\neg Tc$	S 2
(5)	$\neg(On \wedge Acn)$	TT 3,4
(6)	$\neg On \vee \neg Acn$	DL 5
(7)	Acn	S 2
□ (8)	$\neg On$	TP 6,7

C. Deducir las conclusiones requeridas de las premisas dadas. Se define: $Ex \leftrightarrow x$ es par, $Ox \leftrightarrow x$ es impar, $Px \leftrightarrow x$ es positivo, $Nx \leftrightarrow x$ es negativo, $Dx \leftrightarrow x$ es divisible por dos.

7. **Demostrar E(5+7)**

(1)	$(\forall y)(\forall z)(Oy \wedge Oz \rightarrow E(y+z))$	**P**
(2)	$(\forall x)(Ox \leftrightarrow \neg Dx)$	**P**
(3)	$(\forall w)(Ow \vee Ew)$	**P**
(4)	$\neg D_7 \wedge \neg E_5$	**P**
(5)	$O_5 \wedge O_7 \rightarrow E_{(5+7)}$	5/y,7/z, 1
(6)	$O_7 \leftrightarrow \neg D_7$	*7/x, 2*
(7)	$O_5 \vee E_5$	5/w, 3
(8)	$\neg D_7 \rightarrow O_7$	LB 6
(9)	$\neg D_7$	S 4
(10)	O_7	PP 8,9
(11)	$\neg E_5$	S 4
(12)	O_5	TP 7,11
(13)	$O_5 \wedge O_7$	A 12,10
□ (14)	$E_{(5+7)}$	PP 5,13

8. **Demostrar 5** + ¼ > 5

(1)	$(\forall x)(\forall y)(Px \wedge Py \wedge \mathbf{x < 1} \rightarrow \mathbf{y + x > y})$	**P**
(2)	$(\forall x)(\forall y)((Py \wedge Px)) \vee \neg\, (\mathbf{y + x > x} \vee \mathbf{y + x > y}))$	**P**
(3)	¼ < 1	**P**
(4)	**¼ + 5 > 5**	**P**
(5)	P¼ $\wedge P_5 \wedge$ ¼ < 1 $\rightarrow$ 5 + ¼ > 5	5/*y*, ¼/*x*, 1
(6)	(P¼ $\wedge P_5$) $\vee \neg$ (¼ + 5 > 5 $\vee$ ¼ + 5 > ¼)	¼/*y*, 5/*x*,2
(7)	¼ + 5 > 5 $\vee$ ¼ + 5 > ¼	LA 4
(8)	P¼ $\wedge P_5$	TP 6,7

(9) P¼ $\wedge P_5 \wedge$ ¼ < 1 A 8,3

□ (10) 5 + ¼ > 5 PP 5,9

9. **Demostrar** $P_5 \rightarrow (P_{(-3)} \leftrightarrow P_{(5\cdot-3)})$

(1) $(\forall z)(\forall y)(Pz \wedge Py \rightarrow P(z \cdot y))$ **P**

(2) $(\forall y)(\forall w)(Py \wedge \neg Pw \rightarrow P(y \cdot w))$ **P**

(3) $P_5 \wedge P_{-3} \rightarrow P_{(5\cdot-3)}$ 5/z,-3/y, 1

(4) $P_5 \wedge \neg P_{-3} \rightarrow \neg P_{(5\cdot-3)}$ 5/y,-3/w, 2

(5) P_5 P

(6) P_{-3} P

(7) $P_5 \wedge P_{-3}$ A 5,6

(8) $P_{(5\cdot-3)}$ PP 3,7

(9) $P_{-3} \rightarrow P_{(5\cdot-3)}$ CP 6,8

(10) $P_{(5\cdot-3)}$ P

(11) $\neg(P_5 \wedge \neg P_{-3})$ TT 4,10

(12) $\neg P_5 \vee P_{-3}$ DL 11

(13) P_{-3} TP 12, 5

(14) $P_{(5\cdot-3)} \rightarrow P_{-3}$ CP 10,13

(15) $P_{-3} \leftrightarrow P_{(5\cdot-3)}$ LB 9,14

□ (16) $P_5 \rightarrow (P_{-3} \leftrightarrow P_{(5\cdot-3)})$ CP 5,15

E J E R C I C I O 6.

A. Traducir Los siguientes razonamientos a símbolos lógicos y dar una deducción de la conclusión a partir de las premisas.

1. La hermana de la madre de cada muchacho es su tía.
   Juan es un muchacho y Marta es la hermana de Helena.
   Todos los tíos de Juan le mandan regalo de cumpleaños.
   Por tanto, si Helena es la madre de Juan, Martha le manda regalo de cumpleaños.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas

Hxy : x es la hermana de y.
Myz :y es la madre de *z*
Nz : z es un muchacho.
Txz : x es tío de z
Exj: *x* le manda regalo de cumpleaños a Juan.

Términos: j = Juan, *m* = Marta, *h* = Helena

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Hxy \wedge Myz \wedge Nz \rightarrow Txz)$	P
(2)	$Nj \wedge Hmh$	P
(3)	$(\forall x)(Txj \rightarrow Exj)$	P
▹	$Mhj \rightarrow Emj$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $Mhj \rightarrow Emj$

(1)	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Hxy \wedge Myz \wedge Nz \rightarrow Txz)$	P
(2)	$Nj \wedge Hmh$	P
(3)	$(\forall x)(Txj \rightarrow Exj)$	P
(4)	Mhj	P
(5)	$Hmh \wedge Mhj \wedge Nj \rightarrow Tmj$	*m/x, h/y, j/z,* 1
(6)	$Tmj \rightarrow Emj$	*m/x,* 3
(7)	$(Nj \wedge Hmh) \wedge Mhj$	A 2,4
(8)	$Nj \wedge (Hmh \wedge Mhj)$	I 7, Asoc. Ax.
(9)	$(Hmh \wedge Mhj) \wedge Nj$	CL 8
(10)	Tmj	PP 5,9
(11)	Emj	PP6,10
□ (12)	$Mhj \rightarrow Emj$	CP 4,11

Los coroneles tienen graduación superior a la de los sargentos y los sargentos tienen mayor graduación que los soldados.
Todo aquel que tiene menos graduación que otro tiene que recibir órdenes de él.
Todo aquel que tiene más graduación que otro que a su vez tiene más graduación que un tercero, tiene más graduación que el tercero.
López es un coronel. Pérez es un sargento y Gómez es un soldado.
Por tanto, Gómez ha de recibir órdenes de López.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas

Cx : x es un coronel
Sy :y es un sargento
Rz : z es un soldado.
Gxy : x tiene graduación superior a y.
Myx : *y* tiene menos graduación que *x*.

$$Gxy \leftrightarrow Myx$$

Ayx : *y* recibe órdenes de *x*

Términos: e = López, p = Pérez, g = Gómez

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Cx \wedge Sy \wedge Rz \rightarrow Gxy \wedge Gyz)$	P
(2)	$(\forall w)(\forall u)(Mwu \rightarrow Awu)$	P
(3)	$(\forall w)(\forall u)(\forall v)(Guw \wedge Gwv \rightarrow Guv)$	P
(4)	$Cl \wedge Sp \wedge Rg$	P
$\triangleright$	Agl	Conclusión

II. ELD

Demostrar : Agl

(1)	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Cx \wedge Sy \wedge Rz \rightarrow Gxy \wedge Gyz)$	P
(2)	$(\forall w)(\forall u)(Mwu \rightarrow Awu)$	P
(3)	$(\forall w)(\forall u)(\forall v)(Guw \wedge Gwv \rightarrow Guv)$	P
(4)	$Cl \wedge Sp \wedge Rg$	P
(5)	$Cl \wedge Sp \wedge Rg \rightarrow Glp \wedge Gpg$	l/x, p/y, g/z, 1
(6)	$Glp \wedge Gpg$	PP 4,5
(7)	$Glp \wedge Gpg \rightarrow G\lg$	$l/u,p/w,g/v$, 3
(8)	Glg	PP 6,7
(9)	$Gxy \leftrightarrow Myx$	P
(10)	$Glg \leftrightarrow Mgl$	l/x, g/y, 9
(11)	$Glg \rightarrow Mgl$	LB 10
(12)	Mgl	PP 11,8
(13)	$Mgl \rightarrow Agl$	$g/w,l/u$, 2
□ (14)	Agl	PP 13,12

3. Para cada x e y si x es mayor que y, y no es mayor que x.
   Por tanto uno no es mayor que uno.
   (Indicación: Intentar una demostración indirecta.)

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Simbolización del razonamiento

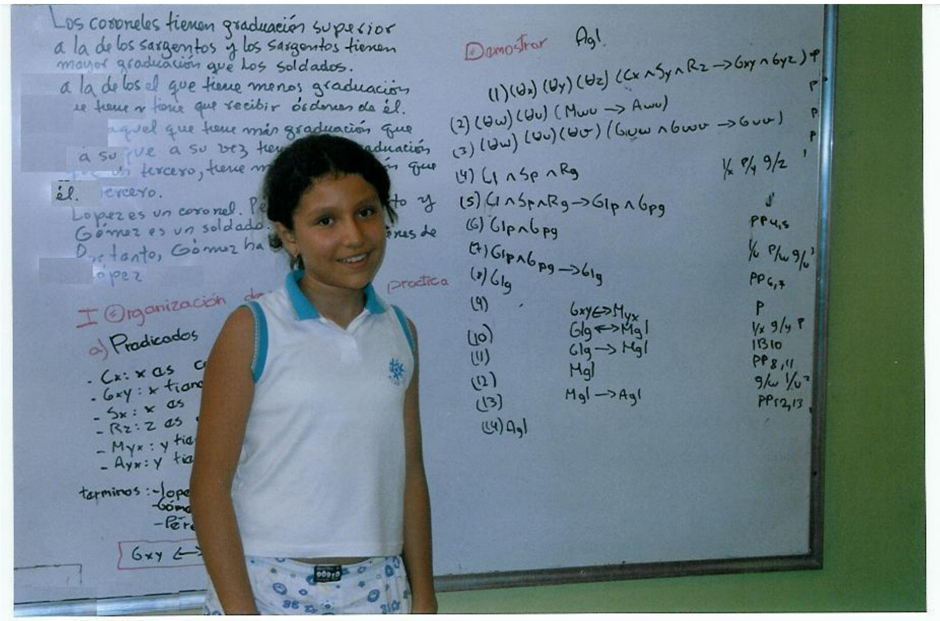
(1)	$(\forall x)(\forall y)\,(x > y \rightarrow \neg(y > x))$	P
$\triangleright$	$\neg\,(1 > 1)$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $\neg$ (1 > 1)

Por RAA

(1)	$(\forall x)(\forall y)\,(x > y \rightarrow \rightarrow \neg(y > x))$	P
(2)	$1 > 1$	P
(3)	$1 > 1 \rightarrow \neg(1 > 1)$	1/x,1/y,1
(4)	$\neg(1 > 1)$	PP 3,2
(5)	$1 > 1 \wedge \neg(1 > 1)$	A 2,4
□ (6)	$\neg$ (1 > 1)	RAA 2,5



4. Para cada *x* e *y*, *x* es igual o mayor que *y* o *y* es igual o mayor que *x*. Por tanto, uno es igual o mayor que uno .

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(\forall y)\,(x \geq y \vee y \geq x)$	P
$\triangleright$	$1 \geq 1$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $1 \geq 1$

Por RAA

(1)	$(\forall x)(\forall y)(\ x \geq y \vee y \geq x\ )$	P
(2)	$\neg(1 \geq 1)$	P
(3)	$1 \geq 1 \vee 1 \geq 1$	1/x,1/y,1
(4)	$1 \geq 1$	TP 3,2
(5)	$1 \geq 1 \wedge \neg(1 \geq 1)$	A 2,4
$\therefore$ (6)	$1 \geq 1$	RAA 2,5

B. Deducir la conclusión de las premisas dadas presentando una demostración completa en la forma típica.

3. **Demostrar 2 = 1+1**

(1)	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y + 1 \vee (x = y \wedge y = z + 1))$	**P**
(2)	$2 \neq 1 \vee 1 \neq 0 + 1$	**P**
(3)	$2 = 1 + 1 \vee (2 = 1 \wedge 1 = 0 + 1))$	x,1/y,0/z,1
(4)	$\neg(2 = 1 \wedge 1 = 0 + 1))$	DL 2
$\therefore$ (5)	2 = 1+1	TP 3,4

E J E R C I C I O 8.

A. Simbolizar los siguientes razonamientos y demostrar que la inferencia es válida deduciendo las conclusiones.

Ejemplo.

El agente que encontró la carta estaba en el apartamento.
Ahora si alguien estaba en el apartamento estaba en la ciudad.
Si alguien estaba en Méjico no estaba en la ciudad.
En efecto, Higinio estaba en Méjico. Por tanto, Higinio no es el agente que encontró la carta.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas
   A*x : x* estaba en el apartamento.
   Cx :x estaba en la ciudad.
   Mx : x estaba en Méjico.

Términos:

c = el agente que encontró la carta
h = Higinio

b) Simbolización del razonamiento

(1)	Ac	P
(2)	$(\forall x)(Ax \rightarrow Cx)$	P
(3)	$(\forall x)(Mx \rightarrow \neg Cx)$	P
(4)	Mh	P
$\triangleright$	$h \neq c$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $h \neq c$

(1)	Ac	P
(2)	$(\forall x)(Ax \rightarrow Cx)$	P
(3)	$(\forall x)(Mx \rightarrow \neg Cx)$	P
(4)	Mh	P
(5)	$Mh \rightarrow \neg Ch$	h/x, 3
(6)	$\neg Ch$	PP 4,5
(7)	$Ah \rightarrow Ch$	h/x,2
(8)	$\neg Ah$	TT 7,6
(9)	$h = c$	P
(10)	$\neg Ac$	I 8,9
(11)	$Ac \wedge \neg Ac$	A 1,10
(12)	$h \neq c$	RAA 9,11

1. Todos los números positivos son mayores que cero.
   Tres es un número positivo.
   Tres es igual a dos más uno.
   Por tanto, dos más uno es mayor que cero.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas

Px : x es positivo

Términos: tres : 3
dos más cinco : 2 + 5

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(Px \rightarrow x > 0)$	P
(2)	P_3	P
(3)	$3 = 2 + 1$	P
$\triangleright$	$2 + 1 > 0$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $2 + 1 > 0$

(1)	$(\forall x)(Px \rightarrow x > 0)$	P
(2)	P_3	P
(3)	$3 = 2 + 1$	P
(4)	$P_3 \rightarrow 3 > 0$	3/x, 1
(5)	$3 > 0$	PP 2,4
□ (6)	$2 + 1 > 0$	I 3,5

2. Todos los miembros del comité viven en esta ciudad.
El presidente de la sociedad es un miembro del comité.
La Srta. López es la presidente de la sociedad.
Por tanto, La Srta. López vive en esta ciudad.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas
M*x : x* es un miembro del comité
V*x* : *x* vive en esta ciudad

Términos: El presidente de la sociedad = *p*
La Srta. López = *e*

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(Mx \rightarrow Vx)$	P
(2)	Mp	P
(3)	$e = p$	P
$\triangleright$	Ve	Conclusión

II. ELD

Demostrar : Ve

	(1) $(\forall x)(Mx \rightarrow Vx)$	P
	(2) Mp	P
	(3) $e = p$	P
	(4) $Mp \rightarrow Vp$	p/x, 1
	(5) Vp	PP 2,4
□	(6) Ve	I 3,5

3. Eduardo podía haber visto el coche del asesino.
Ramsey fue el primer testigo de la defensa.
O Eduardo estaba en la fiesta o Ramsey dio testimonio falso.
En efecto, nadie en la fiesta pudo haber visto el coche del asesino.
Por tanto, el primer testigo de la defensa dio testimonio falso.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas

Hx : x podía haber visto el coche del asesino.
Fx :x estaba en la fiesta.
Dx : x dio testimonio falso.

Términos: Eduardo = e, Ramsey = r
El primer testigo de la defensa = t

b) Simbolización del razonamiento

(1) He	P
(2) $r = t$	P
(3) $Fe \vee Dr$	P
(4) $(\forall x)(Fx \rightarrow \neg Hx)$	P
▹ Dt	Conclusión

II. ELD

Demostrar : Dt

(1) He	P
(2) $r = t$	P
(3) $Fe \vee Dr$	P
(4) $(\forall x)(Fx \rightarrow \neg Hx)$	P

(5)	$Fe \to \neg He$	e/x,4
(6)	$\neg Fe$	TT 1,5
(7)	Dr	TP 3,6
(8)	Dt	I 2,7

4. Samuel Clemens era capitán de barco fluvial.
Ningún capitán de barco fluvial ignora ninguna señal de peligro.
Marc Twain escribió sobre las cosas que él no ignoraba.
Marc Twain era Samuel Clemens.
Por tanto, si las luces en los puentes son señales de peligro, entonces Mark Twain escribió sobre ellas.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas

Cx : x era capitán de barco fluvial.
Ixy :x ignora a y
Exy : x escribe sobre y

Términos:

s = Samuel Clemens
p = Señal de peligro
l = las luces en los puentes
m = Marc Twain

b) Simbolización del razonamiento

(1)	Cs	P
(2)	$(\forall x)(Cx \to \neg Ixp)$	P
(3)	$(\forall y)(\neg \mathrm{Im}\, y \to Emy)$	P
(4)	$m = s$	P
$\triangleright$	$l = p \to Eml$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $l = p \to Eml$

(1)	Cs	P
(2)	$(\forall x)(Cx \to \neg Ixp)$	P
(3)	$(\forall y)(\neg \mathrm{Im}\, y \to Emy)$	P

(4) $m = s$		P
(5)	$l = p$	P
(6)	$Cs \to \neg Isp$	*s/x*, 2
(7)	$\neg Isp$	PP 1,6
(8)	$\neg \mathrm{Im}\, p$	I 4,7
(9)	$\neg \mathrm{Im}\, p \to Emp$	*p/y*, 3
(10)	Emp	PP 8,9
(11)	Eml	I 5,10
□ (12) $l = p \to Eml$		CP 5, 10

B. Deducir las siguientes conclusiones de las premisas dadas, dando una demostración formal completa en la forma típica.

1. **Deducir :** $a \neq b$

(1) $(\forall x)(Tx \to Bx)$		**P**
(2) $\neg Ba$		**P**
(3) ***Tb***		**P**
(4)	$a = b$	P
(5)	$Ta \to Ba$	*a/x*, 1
(6)	$\neg Ta$	TT 5,2
(7)	Ta	I 3,4
(8)	$Ta \wedge \neg Ta$	A 7,6
□ (9) $a \neq b$		RAA 4,8

2. **Deducir :** $2^2 + 1 > 2^2$

(1) 4 = 2^2		**P**
(2) 4 = 4		**P**
(3) $(\forall x)(\forall y)(x = y \to x + 1 > \boldsymbol{y})$		**P**
(4) $2^2 = 4 \to 2^2 + 1 > 4$		2^2/*x*, 4/*y*,3
(5) $4 = 4 \to 2^2 + 1 > 2^2$		I 1,4
□ (6) $2^2 + 1 > 2^2$		PP 2,5

4. **Deducir :** $3^2 \neq 6$

(1) $(\forall x)$ $\boldsymbol{(x < 7 \to x < 8)}$		**P**
(2) $\neg(3^2 \boldsymbol{<8})$		**P**
(3) 6 < 7		**P**
(4)	$3^2 = 6$	P
(5)	$3^2 < 7 \to 3^2 < 8$	3^2/*x*, 1

(6)	$\neg\ (3^2 < 7)$	TT 5,2
(7)	$\neg\ (6 < 7)$	I 4,6
(8)	$6 < 7 \ \wedge \neg\ (6 < 7)$	A 3,7
□ (9) $3^2 \neq 6$		RAA 4,8

5. **Deducir :** $\neg\ (3^2 = 6)$

(1) $(\forall x)\ (x > 7 \rightarrow \neg(x = 6))$		**P**
(2) $3^2 = 9$		**P**
(3) $9 > 7$		**P**
(4)	$3^2 = 6$	P
(5)	$9 > 7 \rightarrow \neg(9 = 6)$	$9/x$,1
(6)	$\neg(9 = 6)$	PP 3,5
(7)	$\neg\ (3^2 = 6)$	I 2,6
(8)	$3^2 = 6 \ \wedge\ \neg\ (3^2 = 6)$	A 4,7
□ (9) $\neg\ (3^2 = 6)$		RAA 4,8

7. **Deducir :** $4+3 \neq 3 \cdot 2$

Por RAA

(1) $(\forall x)(\forall y)(x+3 = y+2 \rightarrow x+1 = y)$		**P**
(2) $4+1 \neq 4$		**P**
(3) $3 \cdot 2 = 4+2$		**P**
(4)	$4+3 = 3 \cdot 2$	P
(5)	$4+3 = 4+2 \rightarrow 4+1 = 4$	4/x,4/y, 1
(6)	$4+3 \neq 4+2$	TT 5,2
(7)	$4+3 \neq 3 \cdot 2$	I 3,6
(8)	$4+3 = 3 \cdot 2 \ \wedge\ 4+3 \neq 3 \cdot 2$	A 4,6
□ (9) $4+3 \neq 3 \cdot 2$		RAA 4,8

11. **Deducir :** O_{25}

(1) $(\forall u)(\forall v)(\forall w)(u+v = u+w \rightarrow v = w)$	**P**
(2) $4+5^2 = 29$	**P**
(3) $(\forall x)(\forall y)(x^2 = y \rightarrow (Ox \rightarrow Oy))$	**P**
(4) $4+25 = 29$	**P**
(5) O5	**P**
(6) $4+5^2 = 4+25 \rightarrow 5^2 = 25$	$4/u, 5^2/v$, 25/w, 1
(7) $4+5^2 = 4+25$	I 2,4
(8) $5^2 = 25$	PP 6,7
(9) $5^2 = 25 \rightarrow (O_5 \rightarrow O_{25})$	5/,25/y, 3

(10) $O_5 \rightarrow O_{25}$ PP 9,8

 (11) O_{25} PP 10,5

11. **Deducir :** $\mathbf{4} > -4$

(1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\,(x > y \;\wedge\; y > z \;\rightarrow\; x > z)$ **P**

(2) $4 > 2+1$ **P**

(3) $(\forall w)(\forall z)(Pw \wedge Nz \rightarrow w > z)$ **P**

(4) $P3 \wedge N(-4)$ **P**

(5) $2 + 1 = 3$ **P**

(6) $P3 \wedge N(-4) \rightarrow 3 > -4$ 3/w, -4/z, 3

(7) $3 > -4$ PP 6,4

(8) $4 > 3$ I 2,5

(9) $4 > 3 \;\wedge\; 3 > -4 \rightarrow 4 > -4$ 4/x,3/y, -4/z

(10) $4 > 3 \;\wedge\; 3 > -4$ A 8,7

 (11) $4 > -4$ PP 9,10

B. Deducir las siguientes conclusiones de las premisas dadas, dando una demostración formal completa en la forma típica.

1. **Deducir :** $a \neq b$

(1) $(\forall x)(Tx \rightarrow Bx)$ **P**

(2) $\neg Ba$ **P**

(3) $\boldsymbol{Tb}$ **P**

(4) $a = b$ P

(5) $Ta \rightarrow Ba$ *a/x*, 1

(6) $\neg Ta$ TT 5,2

(7) Ta I 3,4

(8) $Ta \wedge \neg Ta$ A 7,6

 (9) $a \neq b$ RAA 4,8

2. **Deducir :** $2^2 + 1 > 2^2$

(1) $\mathbf{4} = 2^2$ **P**

(2) $\mathbf{4 = 4}$ **P**

(3) $(\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow x + 1 > \boldsymbol{y})$ **P**

(4) $2^2 = 4 \rightarrow 2^2 + 1 > 4$ 2^2/*x*, 4/*y*,3

(5) $4 = 4 \rightarrow 2^2 + 1 > 2^2$ I 1,4

 (6) $2^2 + 1 > 2^2$ PP 2,5

4. **Deducir :** $3^2 \neq 6$

(1)	$(\forall x)\,(x < 7 \rightarrow x < 8)$	**P**
(2)	$\neg(3^2 < 8)$	**P**
(3)	$6 < 7$	**P**
(4)	$3^2 = 6$	P
(5)	$3^2 < 7 \rightarrow 3^2 < 8$	$3^2/x$, 1
(6)	$\neg\,(3^2 < 7)$	TT 5,2
(7)	$\neg\,(6 < 7)$	I 4,6
(8)	$6 < 7 \wedge \neg\,(6 < 7)$	A 3,7
□ (9)	$3^2 \neq 6$	RAA 4,8

5. **Deducir :** $\neg\,(3^2 = 6)$

(1)	$(\forall x)\,(x > 7 \rightarrow \neg(x = 6))$	**P**
(2)	$3^2 = 9$	**P**
(3)	$9 > 7$	**P**
(4)	$3^2 = 6$	P
(5)	$9 > 7 \rightarrow \neg(9 = 6)$	$9/x$,1
(6)	$\neg(9 = 6)$	PP 3,5
(7)	$\neg\,(3^2 = 6)$	I 2,6
(8)	$3^2 = 6 \wedge \neg\,(3^2 = 6)$	A 4,7
□ (9)	$\neg\,(3^2 = 6)$	RAA 4,8

7. **Deducir :** $4 + 3 \neq 3 \cdot 2$

Por RAA

(1)	$(\forall x)(\forall y)(x + 3 = y + 2 \rightarrow x + 1 = y)$	**P**
(2)	$4 + 1 \neq 4$	**P**
(3)	$3 \cdot 2 = 4 + 2$	**P**
(4)	$4 + 3 = 3 \cdot 2$	**P**
(5)	$4 + 3 = 4 + 2 \rightarrow 4 + 1 = 4$	4/x,4/y, 1
(6)	$4 + 3 \neq 4 + 2$	TT 5,2
(7)	$4 + 3 \neq 3 \cdot 2$	I 3,6
(8)	$4 + 3 = 3 \cdot 2 \wedge 4 + 3 \neq 3 \cdot 2$	A 4,6
□ (9)	$4 + 3 \neq 3 \cdot 2$	RAA 4,8

11. **Deducir :** O_{25}

(1)	$(\forall u)(\forall v)(\forall w)(u + v = u + w \rightarrow v = w)$	**P**
(2)	$4 + 5^2 = 29$	**P**

(3) $(\forall x)(\forall y)(x^2 = y \rightarrow (Ox \rightarrow Oy))$ **P**
(4) $4 + 25 = 29$ **P**
(5) **O5** **P**
(6) $4 + 5^2 = 4 + 25 \rightarrow 5^2 = 25$ 4/u, 5^2 / v, 25/w, 1
(7) $4 + 5^2 = 4 + 25$ I 2,4
(8) $5^2 = 25$ PP 6,7
(9) $5^2 = 25 \rightarrow (O_5 \rightarrow O_{25})$ 5/,25/y, 3
(10) $O_5 \rightarrow O_{25}$ PP 9,8
□ (11) O_{25} PP 10,5

11. **Deducir : 4** $> - 4$
(1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)$ **($x > y \wedge y > z \rightarrow x >$ z)** **P**
(2) 4 > 2+1 **P**

(3) $(\forall w)(\forall z)(Pw \wedge N$z $\rightarrow$ w > z) P
(4) P3 $\wedge$ N$(- 4)$ P
(5) 2 + 1 = 3 P
(6) $P3 \wedge N(-4) \rightarrow 3 > - 4$ 3/w, $- 4$/z, 3
(7) $3 > - 4$ PP 6,4
(8) $4 > 3$ I 2,5
(9) $4 > 3 \wedge 3 > - 4 \rightarrow 4 > - 4$ 4/x,3/y, $- 4$/z
(10) $4 > 3 \wedge 3 > - 4$ A 8,7
□ (11) $4 > - 4$ PP 9,10

E J E R C I C I O 9

A. Deducir cada conclusión de las premisas dadas.

5. **Deducir :** $2 \cdot (3 + 4) = (2 \cdot 3) + (2 \cdot 4)$
(1) 3 + 4 = 7 **P**
(2) $2 \cdot 7 = 14$ **P**
(3) 6 + 8 = 14 **P**
(4) $2 \cdot 3 = 6$ **P**
(5) $2 \cdot 4 = 8$ **P**
(6) 14 = 14 L
(7) $2 \cdot (3 + 4) = 14$ I 1,2
(8) 14 = 6 + 8 I 6,3
(9) 14 = $(2 \cdot 3) + (2 \cdot 4)$ I 4,5,8

□ (10) $2\cdot(3+4)=(2\cdot 3)+(2\cdot 4)$ I 7,9

6. **Deducir :** $8+(5-2)=(2\cdot 3)+5$

(1)	$(\forall w)(\forall z)(w+z=z+w)$	**P**
(2)	**3 + 8 = 11**	**P**
(3)	$5-2=3$	**P**
(4)	$2\cdot 3=6$	**P**
(5)	**5 + 6 = 11**	**P**
(6)	11 = 11	L
(7)	$5+6=6+5$	5/w,6/z,1
(8)	$3+8=8+3$	8/w,3/z,1
(9)	11 = 6 + 5	I 7,5
(10)	11 = 8 + 3	I 8,2
(11)	11 = 8 + (5-2)	I 3,10
(12)	11 = $(2\cdot 3)$ + 5	I 4,9
□ (13)	$8+(5-2)=(2\cdot 3)+5$	I 11,12

10. Deducir : $13-(1+2)=2\cdot 5\rightarrow 10=4+6$

(1)	$13-3=10$	P
(2)	$2\cdot(2+3)=4+6$	P
(3)	1 + 2 = 3	P
(4)	2 + 3 = 5	P
(5)	$13-(1+2)=2\cdot 5$	P
(6)	$13-3=2\cdot 5$	I 3,5
(7)	$10=2\cdot 5$	I 1,6
(8)	$10=2\cdot(2+3)$	I 7,4
(9)	10 = 4 + 6	I 2,8
□ (10)	$13-(1+2)=2\cdot 5\rightarrow 10=4+6$	CP 5,10

EXAMEN DE REPASO

III. Traducir los siguientes razonamientos en símbolos lógicos. Después deducir las conclusiones de las premisas.

a. Cada miembro de nuestra clase o trabaja en la función o en la preparación de ésta.
Los que trabajan en la función están ensayando.
Los que trabajan en la preparación de ésta están pintando las decoraciones.

Por tanto, si Pablo es un miembro de nuestra clase, entonces Pablo o está ensayando o está pintando las decoraciones.

a) Funciones predicativas

M*x* : *x* es un miembro de nuestra clase
Tx :*x* trabaja en la función
Px : *x* trabaja en la preparación de ésta
Ex : *x* está ensayando
Dx : *x* está pintando las decoraciones

Términos: Pablo = *p*

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(Mx \to Tx \vee Px)$	P
(2)	$(\forall y)(Ty \to Ey)$	P
(3)	$(\forall w)(Tw \to Ew)$	P
▹	$Mp \to Ep \vee Dp$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $Mp \to Ep \vee Dp$

(1)	$(\forall x)(Mx \to Tx \vee Px)$	P
(2)	$(\forall y)(Ty \to Ey)$	P
(3)	$(\forall w)(Pw \to Dw)$	P
(4)	$Mp \to Tp \vee Pp$	p/x ,1
(5)	$Tp \to Ep$	p/y, 2
(6)	$Pp \to Dp$	p/*w*, 3
(7)	Mp	P
(8)	$Tp \vee Pp$	PP 4,7
(9)	$Ep \vee Dp$	DS 8,5,6
(10)	$Mp \to Ep \vee Dp$	CP 7,9

b) Cada chico es más joven que su padre.
Carlos es un chico que no es más joven que Francisco.
Todo el que esté casado con Virginia es el padre de Carlos.
Por tanto, Francisco no está casado con Virginia.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRÁCTICA

a) Funciones predicativas

Ch*x* : *x* es un chico
Jxy :*x* es más joven que *y*
Pxy : *x* es el padre de *y*
Kxy : *x* está casado con *y*

Términos: Pablo = *p*   Francisco = *f*
Virginia = *v*

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(Chx \wedge Pyx \rightarrow Jxy)$	P
(2)	$Chc \wedge \neg Jcf$	P
(3)	$(\forall x)(Kxv \rightarrow Pxc)$	P
▹	$\neg Kfv$	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $\neg Kfv$

(1)	$(\forall x)(Chx \wedge Pyx \rightarrow Jxy)$	P
(2)	$Chc \wedge \neg Jcf$	P
(3)	$(\forall x)(Kxv \rightarrow Pxc)$	P
(4)	$Chc \wedge Pfc \rightarrow Jcf$	*c/x,f/y*, 1
(5)	$\neg Jcf$	S 2
(6)	$\neg(Chc \wedge Pfc)$	TT 4,5
(7)	$\neg Chc \vee \neg Pfc$	DL 6
(8)	Chc	S 2
(9)	$\neg Pfc$	TP 7,8
(10)	$Kfv \rightarrow Pfc$	*f/x*, 3
□ (11)	$\neg Kfv$	TT 10,9

c. Cada niña de la familia Ron está en el cuadro de honor.
Luisa es una niña de la familia Ron.
El que recibió el premio de poesía no estaba en el cuadro de honor.
Por tanto, Luisa no recibió el premio de poesía.

I . ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRACTICA

a) Funciones predicativas

$Nx : x$ es una niña de la familia Ron
$Cx : x$ está en el cuadro de honor
$Rx : x$ recibió el premio de poesía

Términos: Luisa = e

b)

b) Simbolización del razonamiento

(1)	$(\forall x)(Nx \rightarrow Cx)$	P
(2)	Ne	P
(3)	$(\forall x)(Rx \rightarrow \neg Cx)$	P
$\triangleright$	$\neg$Re	Conclusión

II. ELD

Demostrar : $\neg$Re

(1)	$(\forall x)(Nx \rightarrow Cx)$	P
(2)	Ne	P
(3)	$(\forall x)(Rx \rightarrow \neg Cx)$	P
(4)	$Ne \rightarrow Ce$	e/x, 1
(5)	Ce	PP 2,4
(6)	Re $\rightarrow \neg Ce$	e/x, 3
□ (7)	$\neg$Re	TT 5,6

CAPITULO 7

UN SISTEMA MATEMATICO SIMPLE: AXIOMAS DE LA ADICIÓN

Teorema 1. 3 = 1 + 2

Demostración

(1)	3 = 2 + 1	Def. de 3
(2)	2 + 1 = 1 + 2	2/x,1/y, Comm. Ax
□ (3)	3 = 1 + 2	I 1,2

Teorema 2. 4 = 1 + (1 + 2)

Demostración

	(1) 4 = 3 + 1	Def. de 4
	(2) 3 + 1 = 1 + 3	3/x,1/y, Comm. Ax
	(3) 4 = 1 + 3	I 1,2
□	(4) 4 = 1 + (1 + 2)	I 3, T.1

Teorema 3. (1 + 1) + (1 + 2) = 2 + 3

Demostración

	(1) (1 + 1) + (1 + 2) = (1 + 1) + (1 + 2)	L
	(2) 2 = 1 + 1	Def. 2
	(3) (1 + 1) + (1 + 2) = 2 + (1 + 2)	I 1,2
	(4) 1 + 2 = 2 + 1	1/x,2/y, Comm. Ax.
	(5) 1 + 2 = 3	I 4, Def.3
□	(6) (1 + 1) + (1 + 2) = 2 + 3	I 3,5

Teorema 4. 3 = 1 + (1 + 1)

Demostración

	(1) 3 = 3	L
	(2) 3 = 2 + 1	Def. 3
	(3) 2 + 1 = 1 + 2	2/x,1/y, Comm. Ax.
	(4) 3 = 1 + 2	I 2,3
	(5) 2 = 1 + 1	Def.2
□	(6) 3 = 1 + (1 + 1)	I 4,5

Teorema 5. 5 = 1 + (1 + (1 + 2))

Demostración

	(1) 1 + (1 + (1 + 2)) = 1 + (1 + (1 + 2))	L
	(2) 1 + 4 = 1 + (1 + (1 + 2))	I 1, T.2
	(3) 1 + 4 = 4 + 1	1/x,4 /y, Comm. Ax.
	(4) 4 + 1 = 1 + (1 + (1 + 2))	I3,2
□	(5) 5 = 1 + (1 + (1 + 2))	I 4, Def.5

Teorema 6. $4 = (1 + 2) + 1$

Demostración

(1)	$4 = 3 + 1$	Def.4
(2)	$4 = (1 + 2) + 1$	I 1, T.1 .

Teorema 7. $5 = 1 + ((2 + 1) + 1)$

Demostración

(1)	$1 + ((2 + 1) + 1) = 1 + ((2 + 1) + 1)$	L
(2)	$1 + ((2 + 1) + 1) = 1 + (3 + 1)$	I 1,Def.3
(3)	$1 + ((2 + 1) + 1) = 1 + 4$	I 2, Def.4
(4)	$1 + 4 = 4 + 1$	1/x,4/y, Comm. Ax
(5)	$1 + 4 = 5$	I 4, Def.5
(6)	$1 + ((2 + 1) + 1) = 5$	I 3,5
(7)	$5 = 1 + ((2 + 1) + 1)$	Idem 6

Teorema 8. $2 + (1 + 3) = 4 + 2$

Demostración

(1)	$2 + (1 + 3) = 2 + (1 + 3)$	L
(2)	$1 + 3 = 3 + 1$	1/x,3/y, Comm. Ax.
(3)	$1 + 3 = 4$	I 2, Def.4
(4)	$2 + (1 + 3) = 2 + (3 + 1)$	I 1,2
(5)	$2 + (1 + 3) = 2 + 4$	I 4,3
(6)	$2 + 4 = 4 + 2$	2/x,4/y, Comm. Ax
(7)	$2 + (1 + 3) = 4 + 2$	I 5,6

Teorema 9. $((1 + 2) + 1) + 2 = (1 + 1) + 4$
Teorema 10. $4 = 2 + 2$

B. Los axiomas, definiciones y teoremas para la adición pueden también ser utilizados para demostrar conclusiones deducidas de premisas particulares dadas.

1. Demostrar : $4 > 3$

(1)	$(1 + 2) + 1 > (1 + 2)$	P
(2)	$4 > (1 + 2)$	I 1,T.6
(3)	$1 + 2 = 2 + 1$	1/x,2/y, Comm. Ax

(4) $4 > (2 + 1)$	I 3, 2
(5) $4 > 3$	I 4,Def.3

2. Demostrar $x \ngtr 1 + 1$

(1) $x > 2 \rightarrow x = (1 + 2) + 1$	P
(2) $x \neq 4$	P
(3) $x > 2 \rightarrow x = 4$	I 1, T.6
(4) $x \ngtr 2$	TT 2,3
(5) $x \ngtr 1 + 1$	I 4, Def.2

3. Demostrar : $x > (1 + 2) + 1$

(1) $x = 5$	P
(2) $x > 4 \wedge x < 6 \leftrightarrow x = 1 + (1 + (1 + 2))$	P
(3) $x > 4 \wedge x < 6 \leftrightarrow x = 5$	I 2, T.5
(4) $x = 5 \rightarrow x > 4 \wedge x < 6$	LB 3
(5) $x > 4 \wedge x < 6$	PP 4,1
(6) $x > 4$	S 5
□ (7) $x > (1 + 2) + 1$	I 6,T.6

4. Demostrar : $3 > 2$

(1) $(\forall x) (x + 1 > x)$	P
(2) $2 + 1 > 2$	2/x, 1
□ (3) $3 > 2$	I 2,Def.3

5. Demostrar : $5 > 2$

(1) $(\forall x)(\forall y) (y > 0 \rightarrow x + y > x)$	P
(2) $3 > 0$	P
(3) $3 + 2 = 4 + 1$	P
(4) $3 > 0 \rightarrow 2 + 3 > 2$	2/x,3 /y, 1
(5) $2 + 3 > 2$	PP 4,2
(6) $3 + 2 = 5$	I 3,Def.5
(7) $2 + 3 = 3 + 2$	2/x,3 /y, Comm. Ax
(8) $3 + 2 > 2$	I 5,7
□ (9) $5 > 2$	I 6,8

EJERCICIO 2

C. Demostrar los siguientes teoremas.

Teorema 11. 5 = 3 + 2

Demostración

(1)	5 = (3 + 1) + 1	I Def.4,Def.5
(2)	(3 + 1) + 1 = 3 + (1+ 1)	3/x,1 /y, 1/z Asoc. Ax.
(3)	5 = 3 + (1+ 1)	I 1,2
□ (4)	5 = 3 + 2	I 3, Def.2

Teorema 12. 3 = (1 + 1) + 1

Demostración

(1)	3 = (1 + 1) + 1	I Def.2,Def.3

Teorema 13. 4 = ((1 + 1) + 1) + 1

Teorema 14. 4 = (1 + (1 + 1)) + 1

Demostración

(1)	(1 + (1 + 1)) + 1 = (1 + (1 + 1)) + 1	L
(2)	1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1	1/x,1 /y, 1/z Asoc. Ax.
(3)	((1 + 1) + 1) + 1= (1 + (1 + 1)) + 1	I 1,2
□ (4)	4 = (1 + (1 + 1)) + 1	I 3, T.13

Teorema 15. 5 = 2 + (1 + 2)

Demostración

(1)	2 + (1 + 2) = 2 + (1 + 2)	L
(2)	1 + 2 = 2 + 1	1/x,2/y, Comm. Ax.
(3)	2 + (2 + 1) = 2 + (1 + 2)	I 1, 2
(4)	(2 + 2) + 1 = 2 + (1 + 2)	I 3, Asoc. Ax.
(5)	4 + 1 = 2 + (1 + 2)	I 4,T.10
□ (6)	5 = 2 + (1 + 2)	I 5,Def.5

Teorema 16. 2 + 5 = 3 + 4

Demostración

(1)	2 + 5 = 5 + 2	2/x,5 /y, Comm. Ax.
(2)	2 + 5 = (3 + 2) + 2	I 1, T.11
(3)	(3 + 2) + 2 = 3 + (2 + 2)	3/x,2/y, 2/z Asoc. Ax.
(4)	2 + 5 = 3 + (2 + 2)	I 2,3
□ (5)	2 + 5 = 3 + 4	I 4,T.10

Teorema 17. 5 + 3 = (4 + 2) + 2

Demostración

(1)	(4 + 2) + 2 = (4 + 2) + 2	L
(2)	(2 + (1 + 3)) + 2 = (4 + 2) + 2	I 1,T.8
(3)	2 + (1 + 3) = (2 + 1) + 3	2/x,1/y, 3/z Asoc. Ax
(4)	((2 + 1) + 3) + 2 = (4 + 2) + 2	I 2,3
(5)	(3 + 3) + 2 = (4 + 2) + 2	I 4,Def.3
(6)	3 + (3 + 2) = (4 + 2) + 2	I 5, 3/x,3 /y, 2/z Asoc. Ax
(7)	3 + (2 + 3) = (4 + 2) + 2	I 6, 2/x,3 /y, Comm. Ax
(8)	(3 + 2) + 3 = (4 + 2) + 2	I 7, 3/x,2/y, 3/z Asoc. Ax.
(9)	5 + 3 = (4 + 2) + 2	I 8,T.11

EJERCICIO 3.

Dar demostraciones formales de los siguientes razonamientos.

4. Demostrar : $x \neq 2+2 \wedge x = 1+((2+1)+1)$

(1)	$x = 4 \rightarrow x+y = 1+(1+(1+2))$	P
(2)	$x = (2+y)+1 \rightarrow x = 2+(1+2)$	P
(3)	$\neg(x+y = 2+3 \vee x \neq 3+y)$	P

Demostrar : $x \neq 2+2 \wedge x = 1+((2+1)+1)$

(1)	$x = 4 \rightarrow x+y = 1+(1+(1+2))$	P
(2)	$x = (2+y)+1 \rightarrow x = 2+(1+2)$	P
(3)	$\neg(x+y = 2+3 \vee x \neq 3+y)$	P
(4)	$x+y \neq 2+3 \wedge x = 3+y$	DL3

(5)	$x = 3 + y$	S4
(6)	$x = (2+1) + y$	I 5,Def.3
(7)	$x = 2 + (1 + y)$	I 6, 2/x,1/y, y/z Asoc. Ax.
(8)	$x = 2 + (y + 1)$	I 7, 1/x,y /y, Comm. Ax.
(9)	$x = (2 + y) + 1$	I 8, 2/x,y/y, 1/z Asoc. Ax.
(10)	$x = 2 + (1 + 2)$	PP 2,9
(11)	$x = (1+1) + (1+2)$	I 10,Def.2
(12)	$x = (1+1) + (2+1)$	I 11, 1/x,2 /y, Comm. Ax
(13)	$x = 1 + (1 + (2+1))$	I 12, 1/x,1/y, 2+1/z Asoc. Ax
(14)	$x = 1 + ((2+1) + 1)$	I 13, 1/x,2 +1/y, Comm. Ax.
(15)	$2 + 3 = 2 + 3$	L
(16)	$2 + 3 = (1+1) + 3$	I 15, Def.2
(17)	$2+3 = 1+(1+3)$	I 16, 1/x,1/y, 3/z Asoc. Ax
(18)	$2 + 3 = 1 + (1 + (2+1))$	I 17, Def.3
(19)	$2 + 3 = 1 + (1 + (1+2))$	I 18, 2/x,1/y, Comm. Ax.
(20)	$x + y \neq 2 + 3$	S 4
(21)	$x + y \neq 1 + (1 + (1+2))$	I 19,21
(22)	$x \neq 4$	I 1,21
(23)	$x \neq 2+2$	I 22,T.10
□ (24)	$x \neq 2+2 \ \wedge \ x = 1 + ((2+1) + 1)$	A 23,14

UN EJERCICIO DE LÓGICA DE LA VIDA COTIDIANA

El profesor estaba frente a cuatro estudiantes (de otra universidad), uno de los cuales había hecho trampa en la convocatoria. Cuando el profesor los interrogó esto fue lo que aseguraron:

Antonio: Fue Braulio.
Braulio: Fue Darío.
Camilo: Yo no fui.
Darío: Braulio miente al acusarme.

Si una de estas confesiones es cierta ¿quién hizo trampa en la convocatoria?.

I. ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD PRÁCTICA:

1. Simbolización de cada una de las confesiones:
   A: Antonio dice: Fue Braulio
   B: Braulio dice: Fue Darío.
   C: Camilo dice: Yo no fui.
   D: Darío dice: Braulio miente al acusarme.

2. Traducciones básicas
   H_X : x hizo trampa.
   V_X : la confesión de x es cierta o x dice la verdad

3. **E.L.D**

Contestar: Si una de estas confesiones es cierta, entonces quien hizo trampa en la convocatoria?.

Traducción: $Va \vee Vb \vee Vc \vee Vd \rightarrow H_X$, x = ?

(1)	$\mathbf{A \wedge B \wedge C \wedge D}$		**P**
(2)	$Va \vee Vb \vee Vc \vee Vd$		P
(3)	$Vc \vee \neg Vc$		L
(4)	$\neg Vc \rightarrow Hc$	(resuelto el problema)	L
(5)	$Vc \rightarrow Va \vee Vb \vee Vd$		P
(6)	I o II o III		

I	II	III
Va	Vb	Vd
$\neg Vb$	$\neg Va$	$\neg Vb$
$\neg Vd$	$\neg Vd$	$\neg Va$

Traducción de esta parte del ELD al lenguaje ordinario:

Como lo que se va a demostrar es un condicional, entonces se supone cierto el antecedente, y eso es lo que se hace en la línea (2) en donde se afirma que una de las confesiones es cierta. (3) Una verdad lògica es que cada confesión es cierta o no es cierta. La línea (4) dice si la confesión de Camilo no es cierta, entonces él fue el que hizo trampa, ya que él dijo; yo no fui. Por lo tanto, si este es el caso, el problema está resuelto.(5) ¿Qué ocurre si la confesión de Camilo es cierta? Camilo dice que él no fue, por lo tanto, sólo una de las restantes confesiones es cierta, y esto es lo que se dice en esta línea. Entonces se presentan tres posibilidades, a saber, que Antonio diga la verdad y en este caso las confesiones de Braulio y Darío sean falsas o que la confesión de Braulio sea la verdadera y las de Antonio y Darío falsas, o que Darío esté diciendo la verdad y los otros dos estén mintiendo. Esto es lo que se plantea en la línea (6).

Vamos a demostrar que las posibilidades (I) y (III) no pueden darse, demostrando que sus correspondientes conjuntos de premisas son inconsistentes.

ELD I
DEMOSTRAR: El conjunto $\{Va, \neg Vb, \neg Vd\}$ es inconsistente

(1)	$\boldsymbol{Va}$	**P**
(2)	$\boldsymbol{\neg Vb}$	**P**
(3)	$\boldsymbol{\neg Vd}$	**P**
(4)	$Va \rightarrow Hb$	P
(5)	$\neg Vd \rightarrow Vb$	P
(6)	$Vb \rightarrow \neg Hb$	P
(7)	Hb	PP. 1,4
(8)	$\neg Vd \rightarrow \neg Hb$	Hs 5,6
(9)	$\neg Hb$	PP 3,8
(10)	$Hb \wedge \neg Hb$	A 7,9

Traducción del ELDI al lenguaje ordinario:

La línea (4) afirma que si Antonio dice la verdad entonces Braulio fue el que hizo trampa, afirmación que es lógicamente cierta puesto que lo que dice Antonio es precisamente eso que Braulio fue el que hizo Trampa. La línea (5) dice: si Darío no dice la verdad, entonces la confesión de Braulio es cierta. Esta afirmación también es lógicamente verdadera puesto que Darío dice: Braulio miente al acusarme. La línea (6) dice: si Braulio dice la verdad, entonces Braulio no hizo trampa, afirmación que también es lógicamente verdadera ya que Braulio dice: Fue Darío. La línea (7) dice que Braulio fue el que hizo trampa. Esta es una conclusión que se deduce lógicamente de las líneas (1) y (4), que el lector puede verificar. La línea (8) dice que si Darío no está diciendo la verdad, entonces Braulio no fue el que hizo trampa. Esta es una conclusión que se deduce lógicamente de las líneas (5) y (6) aplicando el silogismo hipotético. La línea (9), que dice que Braulio no hizo trampa y que, además, es una conclusión que se deduce lógicamente de las líneas (3) y (8) aplicando la regla de inferencia modus ponendo ponens (afirmando el antecedente se afirma el consecuente), contradice la conclusión (7), a la que ya se había llegado, de que Braulio era el que había hecho trampa. Esta contradicción es la que se plantea en la línea (10) y es la que demuestra que este conjunto de premisas es inconsistente.

ELDIII

DEMOSTRAR: el conjunto $\{Vd, \neg Vb, \neg Va\}$ es inconsistente

(1)	$\boldsymbol{Vd}$	**P**
(2)	$\boldsymbol{\neg Vb}$	**P**
(3)	$\boldsymbol{\neg Va}$	**P**
(4)	$\neg Vb \to Va$	P
(5)	Va	PP 2,4
(6)	$Va \wedge \neg Va$	A 5,3
□ (7)	$\{Vd, \neg Vb, \neg Va\}$ es inconsistente	6

Se empieza la demostración en la línea (4) afirmando la condicional $\neg Vb \to Va$. Veamos que esta es una proposición verdadera, demostrando que no es posible la condicional $\neg Vb \to \neg Va$. En efecto, no es posible tener la condicional $\neg Vb \to \neg Va$ porque si $\neg Va$ (Antonio no dijera la verdad, él dice: fue Braulio), entonces Vb (Braulio estaría diciendo la verdad, él dice: fue Darío) y esto estaría contradiciendo nuestro supuesto $\neg Vb$ (de que Braulio no está diciendo la verdad). La línea (5) se obtiene de (2) y (4) por medio de la regla poniendo ponens. La línea (6) se obtiene de (5) y (3). Esta contradicción es lo que demuestra que el conjunto de premisas $\{Vd, \neg Vb, \neg Va\}$ es inconsistente, en la línea (7).

Ahora veamos que el conjunto de premisas de la posibilidad (II), esto es, $\{\mathrm{Vb}, \neg \mathrm{Va}, \neg \mathrm{Vd}\}$, sí es consistente; es decir que las premisas pueden ser simultáneamente verdaderas.

Para determinar la consistencia de estas premisas utilizaremos el método de asignación de certeza. Para esto, consideremos primero las equivalencias :

$$Vd \leftrightarrow \neg Vb$$
$$\neg Vd \leftrightarrow Vb.$$

Cada equivalencia plantea dos formas de decir lo mismo. Según la primera, decir que Darío dice la verdad es lo mismo que decir que Braulio no dice la verdad. De acuerdo a la segunda equivalencia, decir que Darío no dice la verdad es lo mismo que decir que Braulio dice la verdad.

La importancia de plantear estas dos equivalencias es para mostrar que las tres premisas de la posibilidad II pueden ser simultáneamente verdaderas, con lo cual estaríamos probando su consistencia.

METODO DE ASIGNACIÓN DE CERTEZA:

Veamos que las tres premisas de la posibilidad II pueden ser simultáneamente verdaderas, es decir que se cumple la siguiente tabla de verdad:

$\neg Vd$	Vb	$\neg Va$
V	V	V

Puesto que $\neg Vd \leftrightarrow Vb$ es una equivalencia, $\neg Vd$ y Vb tienen el mismo valor de verdad. Entonces se les puede asignar el valor de certeza V. Como $\neg Va$ no tiene ninguna relación con Vb ni con $\neg Vd$, puede tomar cualquier valor de certeza independientemente de los valores que puedan tener estas dos proposiciones. Por lo tanto se le puede asignar el valor de certeza V. De esta manera se ha demostrado que estas tres premisas pueden ser simultáneamente verdaderas, o sea que son consistentes. Observando la forma de estas premisas se puede ver que el único que dice la verdad es Braulio. Y ¿qué dice Braulio?, que Darío fue el que hizo trampa.

BIBLIOGRAFIA

ALLENDOERFER/OAKLEY. Principles of Mathematics. Mcgraw-Hill Book Company, Inc. 1963.

APOSTOL, Tom M. Calculus Vol. I. Waltham, Massachusetts, Toronto: Second Edition Xerox College Publishing, 1969.

ARISMENDI, Iñaqui de Olaizola; WENZELBURGER G. Elfriede. Algunas Reflexiones sobre las Metáforas en la educación matemática. Lecturas matemáticas Vol. 15. Santa Fe de Bogotá: Sociedad colombiana de matemáticas, 1994.

FERMIN, Alexander; VERA, Juan Carlos. Problemas Modelo. Olimpiadas Colombianas de matemáticas Universitarias: Universidad Antonio Nariño, 1997

FLEENOR, SHANKS BRUMFIEL. The Elementary Functions. Philipines: Second Edition ADDISON WESLEY PUBLISHING COMPANY, Inc, 1973

GUARIN, Vasquez Hugo. Introducción al simbolismo Lógico: ISBN, 958-604-2278.

HEINRICH,Shirley.LevVygotski.
http://coehp.idbsu.edu/FACHTMLS/cohort3/vygotski.htm

ROJAS, Cardozo Moisés. Aprendiendo Directamente de Vygotski el Concepto de Zona de Desarrollo Próximo. (Sin publicar)

SILVESTRE, Oramas Margarita. Aprendizaje, educación y desarrollo: Editorial pueblo y Educación, 1999.

SUPPES, P. HILL, S. Introducción a la Lógica matemática: Editorial Reverté,S.A, 1988.

VYGOTSKY. L.S. El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Crítica. Grijalbo Mondadori. Barcelona. 1979