RELACIONES ENTRE PROPOSICIONES

La igualdad, la equivalencia y la implicación son las relaciones entre proposiciones que básicamente se estudiarán en este capítulo.

Iniciamos con la relación de igualdad definiendo formalmente la idea intuitiva que tenemos de que dos entes u objetos son iguales, para luego, plantear la relación de igualdad entre proposiciones como un concepto matemático fundamental, sobre el cual se desarrolla todo el contenido del capítulo. Sobre este punto se destaca que dos proposiciones son iguales cuando sus respectivos recipientes y significados son iguales. Con base en este concepto se define relación de equivalencia.

De la relación de equivalencia entre proposiciones desarrollaremos los siguientes puntos: el hecho de que dos proposiciones tengan el mismo significado no quiere decir que sean iguales, dos proposiciones pueden ser diferentes pero equivalentes, el criterio para saber cuándo los significados de dos proposiciones son iguales. Mostraremos que trabajar con equivalencia ayuda a desarrollar nuestra capacidad de abstracción; que es imposible el estudio de los entes reales sin acudir al proceso de abstracción; que el concepto de equivalencia tiene una aplicación práctica muy importante en los discursos de la vida cotidiana. Veremos también los siguientes tópicos: la función comunicativa de los recipientes de una proposición, el concepto de relación de equivalencia como herramienta fundamental para el estudio de la matemática, las clases de equivalencia como los significados puros o abstractos de las proposiciones, las clases de equivalencia como los sinónimos que la humanidad ha inventado para expresar, denotar o comunicar ese significado puro o abstracto que nosotros hemos llamado significado de una proposición y, finalmente, veremos que la relación de equivalencia nos permite clasificar las proposiciones, según tengan o no el mismo significado.

El tema de la implicación lo desarrollaremos a partir de la idea primitiva de que una proposición p *tiene mayor significado que otra proposición q*. Este enfoque, por ser intuitivo y práctico, nos permitirá penetrar en el concepto y significado de la implicación, lograr claridad en la comprensión de su significado, y conocer el importante papel de este concepto en la actividad científica. Sobre este tópico, trataremos los siguientes cuestionamientos: ¿Cuándo una proposición p es "mayor" que otra proposición q? ¿Qué sentido puede tener el decir que una proposición sea mayor que otra?. ¿Qué relación hay entre la implicación y el desarrollo de la ciencia y la cultura humana?

Explicaremos por qué, en la implicación $p \Rightarrow q$, e*s* imposible que p sea verdadera y q sea falsa simultáneamente. En este caso, veremos que si p es una proposición verdadera, entonces todas las partes de p han de ser verdaderas, y que lo característico de la verdad es que todo aquello que sea parte de ella también es verdad; lo que equivale a decir que q es una parte de p si no es posible que p sea verdadera y simultáneamente q sea falsa. También se tratarán los interrogantes: ¿Cuándo dos proposiciones no son comparables?, ¿Qué se quiere decir con las expresiones: p implica q, q es implicada por p, o q está implícita en p?, que darán por resultado la definición formal de implicación. En esta sección veremos : reglas sencillas para facilitar la comprensión y el manejo tanto de la implicación como de otros conceptos, distintas expresiones equivalentes a la proposición $p \Rightarrow q$, propiedades de la implicación, la relación entre equivalencia e implicación, la relación de implicación y la relación de orden, distinción entre la relación de implicación y la conectiva condicional *sí...,entonces*, una condición equivalente para que las proposiciones p y q estén en la relación $p \Rightarrow q$, condiciones sobre dos proposiciones para que estas sean equivalentes, propósito fundamental de la relación de implicación y, finalmente, la relación de implicación como actividad fundamental en el desarrollo y elaboración de la ciencia.

El propósito con el estudio de las relaciones de equivalencia e implicación es lograr una mejor comprensión de la estructura general que forman entre sí las proposiciones, así como una mayor facilidad para su manejo.

►Relación de igualdad

Para iniciar el estudio de las relaciones entre proposiciones necesitamos, primero, considerar la relación de igualdad, para luego, definir formalmente la idea intuitiva que tenemos de que dos entes u objetos son iguales. Al hacerlo, nos estaremos iniciando simultáneamente en la práctica de la simbolización, y con ello, dando nuestros primeros pasos en los procesos de formalización de conceptos, y por ende, en los procesos de abstracción.

♦ ¿Cómo proceder para expresar formalmente el hecho de que dos entes u objetos cualesquiera A y B son iguales?

Supóngase que las letras A y B representan dos entes, objetos o ideas cualesquiera. Diremos que **A *es iguala* B,** lo cual denotaremos así: **A = B,** si toda propiedad que tenga el ente representado por A también la tiene el representado por B y, recíprocamente, toda propiedad que tenga el ente representado por B la tiene el representado por la letra A. Cuando sucede lo anterior también se suele decir que **A es lo mismo que B,** o que **A es idéntico a B.**

♦ ¿Cuándo A y B no son iguales?

En caso contrario, cuando A posee al menos una propiedad que no tiene B, o B una propiedad que no tiene A, escribimos A ≠ B, y decimos que **A es distinto de B,** que **A es diferente de B**, o que **A no es igual a B.**

Diremos que A y B no están relacionados bajo la relación de igualdad o que *no son iguales* **si uno de ellos tiene al menos una propiedad que no tiene el otro,** y esto se denotará

$$\mathbf{A \neq B}$$

Nos iniciamos aquí en el empleo de una forma generalmente aceptada para denotar a las relaciones que constituyen uno de los conceptos fundamentales de la matemática.

♦ ¿Qué es una relación?

En términos muy generales, una relación es **un criterio, una receta** o, si se quiere, **una norma**, que denotaremos con la letra R, ***la cual ha de tener la propiedad de*** **no permitir más de una alternativa para dos entes A y B**

cualesquiera y esta alternativa se ha de escoger entre dos casos posibles que llamamos si y no:

a) **A y B sí están en la relación $\Re$**, en cuyo caso escribiremos A $\Re$ B.
b) **A y B no están en la relación R**, en cuyo caso escribiremos A $\not\Re$ B.

Ilustremos el concepto de relación

Supongamos, por ejemplo:

$$\Re_1 = \text{es amigo de} \quad \text{y} \quad \Re_2 = \text{es el padre de}$$

Entonces escribiremos A $\Re_1$ B y X $\Re_2$ Y cuando *A* sí sea amigo de B, y cuando X sí sea el padre de Y; en caso contrario, cuando A no sea amigo de B, y cuando X no sea el padre de Y, escribiremos A $\not\Re_1$ B y X $\not\Re_2$ Y, respectivamente.

Se escribe:

$$A = B, \ A < B, \ A \neq B \ \text{y} \ A \geq B$$

para denotar que A y B sí están en relación de *igualdad;* que sí están en la relación *es menor que*; que no están en la relación de *igualdad*; y finalmente, que no están en la relación *mayor o igual que*.

♦ ¿Qué de especial tiene la relación de igualdad con respecto a las demás relaciones?

La relación de igualdad que acabamos de definir es, sin duda, la condición más severa que se le puede imponer a un ente para que esté relacionado con otro. De hecho, el único ente que está en relación de igualdad con un ente determinado A, es precisamente A; ningún otro puede ser igual a A más que A mismo. Por tanto, al escribir A = B no reconocemos que la letra A sea lo mismo que la letra B, desde luego, sino que las letras A y B están siendo usadas, en dos oportunidades diferentes, para denotar un mismo ente.

Veamos que la relación de igualdad tiene las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Resulta un ejercicio sencillo aplicar la definición que acabamos de dar para convencernos de que la relación de igualdad tiene las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva; esto es, que si A, B y C denotan tres entes cualesquiera, entonces las siguientes proposiciones son verdaderas:

1. A = A (reflexividad).
2. Si A = B, entonces B = A. (simetría).
3. Si A = B y B = C, entonces A = C (transitividad).

Tomemos, por ejemplo, la proposición 2 (la propiedad simétrica) y veamos que es verdadera: Como A = B significa que todas las propiedades que tiene B las tiene A, entonces es cierto que todas las propiedades que tiene B las tiene A y que todas las propiedades de A lo son también de B; lo cual, si aplicamos nuestra definición, significa que B = A. Análogamente, podemos ver que la propiedad reflexiva y la transitiva son verdaderas.

♦ Relación de igualdad entre proposiciones

En la relación de igualdad utilizamos las letras A y B como símbolos para representar dos objetos cualesquiera. Recordemos que **un símbolo** *consiste de un recipiente con una idea (significado) como su contenido.* También recordemos que las proposiciones son símbolos.

Supongamos ahora que las letras A y B denotan dos proposiciones; denotemos $\mathbf{R_A}$ **y** $\mathbf{R_B}$ a sus respectivos **recipientes** y por $\mathbf{S_A}$ **y** $\mathbf{S_B}$ a sus correspondientes **significados**. Tendremos entonces que

$$\mathbf{A = B} \text{ cuando } \mathbf{R_A = R_B \text{ y } S_A = S_B}.$$

*Esto es, **dos proposiciones son iguales si tienen las mismas propiedades;*** por tanto, han de tener el mismo recipiente y el mismo significado; de otra manera no tendrían las mismas propiedades y por consiguiente no serían iguales.

Por ejemplo, si A = "Hoy es Miércoles", entonces la única proposición que puede ser igual a A es "Hoy es Miércoles".

♦ Proposiciones que no son iguales aunque tienen el mismo significado.

Si nos permitimos ignorar aquellas diferencias que puedan surgir entre dos proposiciones como resultado de los recipientes que usemos para denotarlas, entonces encontraremos una gran cantidad de proposiciones que tienen el mismo significado que la proposición A = Hoy es Miércoles.

Por ejemplo:

A_1 = Hoy es la víspera del Jueves
A_2 = Mañana será Jueves
A_3 = Ayer fue Martes
A_4 = Hace dos días fue lunes
A_5 = De hoy en ocho días será Miércoles.
etc.

Esta posibilidad de concentrar nuestro interés sólo en el significado de dos proposiciones, nos conduce a definir una nueva relación entre proposiciones.

♦ Relación de equivalencia entre proposiciones

Sean **A y B** dos proposiciones; diremos que **son *equivalentes*** y escribiremos

$$\mathbf{A \Leftrightarrow B}$$

cuando

el significado de A sea igual al significado de B.

En caso contrario (cuando sus significados no sean iguales) escribiremos, siguiendo el convenio ya establecido : $\rceil$(A $\Leftrightarrow$ B) o A $\not\Leftrightarrow$ B

♦ Dos proposiciones pueden ser diferentes pero equivalentes.

De acuerdo con nuestras definiciones, tenemos que las proposiciones A_1 y A_2, anteriormente mencionadas, tienen las siguientes propiedades:

a) $A_1 \neq A_2$, ya que el recipiente A_1 es distinto del recipiente A_2, y consecuentemente, A_1 y A_2 no tienen las mismas propiedades.
b) $A_1 \Leftrightarrow A_2$, ya que sus significados sí son iguales.

♦ Criterio para saber cuándo los significados de dos proposiciones son iguales.

Es pertinente que nos formulemos la siguiente pregunta: ¿de qué criterio disponemos para saber cuando los significados de dos proposiciones son iguales? La posibilidad de disponer de **tal criterio**, y de que además éste sea sencillo y fácil de aplicar nos la ofrece, precisamente, la condición que impusimos a las proposiciones, y que **consiste en no tener más de una sola propiedad a escoger, entre dos que tienen la característica de excluirse mutuamente: verdad o falsedad.** Esto significa que si A es una proposición, entonces podemos construir una tabla en la que figuren todas las posibles propiedades de su significado:

A
V
F

Tabla de propiedades del significado de A

donde V denota *verdadera* y F**,** *falsa.* Esta tabla se llama la tabla de valores de la proposición A. De los dos valores que en ella figuran, *sabemos que sólo uno de ellos puede ser el que tome la proposición A,* y a éste llamaremos valor de A o valor de la tabla de valores de A.

Supongamos ahora que tenemos dos proposiciones: A y B. Nuevamente podemos construir una tabla en la que anotamos todos los valores que pueden tomar simultáneamente las proposiciones A y B, para obtener la tabla de valores de esas dos proposiciones:

A	B
V	V
F	F
V	F
F	V

Tabla de propiedades de los significados de A y B

Ahora resulta posible determinar si el significado de dos proposiciones A y B es igual (o sea, si A y B son equivalentes); para ello construimos la tabla de A y B, y observamos si el significado de una de ellas puede tener propiedades distintas de las del significado de la otra, lo cual sucederá cuando el valor de la tabla de A y B sea:

A	B
V	F

o bien

A	B
F	V

Es decir, cuando una puede tener la propiedad de ser falsa, y la otra, de ser verdadera. En este caso A $\not\Leftrightarrow$ B.

En caso contrario, cuando el valor de la tabla sea

A	B
V	V

o

A	B
F	F

y, en consecuencia, los significados de A y B tengan las mismas propiedades (ambas verdaderas o ambas falsas); entonces estos significados serán iguales y, por tanto, tendremos que A $\Leftrightarrow$ B.

Supongamos, por ejemplo, que:

A = Hoy es Miércoles
B = Mañana es Jueves
C = Hoy es 10 de Mayo.

Entonces podemos convencernos fácilmente de que los valores posibles para la tabla de A y B son:

A	B
V	V

o

A	B
F	F

y que los valores:

A	B
F	V

o

A	B
V	F

son imposibles; y por tanto:

$$A \Leftrightarrow B$$

En cambio, las proposiciones A y C son tales que cualquiera de los cuatro valores posibles de su tabla puede darse; consecuentemente, $A \not\Leftrightarrow C$.

Con este ejercicio hemos ejercitado nuestra capacidad de abstracción.

►¿Qué ganamos al desarrollar nuestra capacidad de abstracción?

Notemos ahora, que comenzamos a obtener beneficios de nuestra capacidad de abstraer. Al hacerlo, como en el caso de las proposiciones, evidentemente le quitamos al concepto mucho de su carácter real (en la realidad, nada tiene una y sólo una propiedad como las proposiciones); pero también, debido a ello, *nuestras abstracciones son susceptibles de ser manejadas con relativa sencillez*, y además, *se pueden hacer afirmaciones categóricas acerca de ellas, que de ninguna manera es lícito hacer cuando nos referimos a los fenómenos reales.*

♦ ¿Qué es lo que hace imposible el estudio de los entes reales sin acudir al proceso de abstracción?

Supongamos, por ejemplo, que se nos da una planta A, que está en un invernadero, y se nos permite hacer todas las observaciones que consideremos pertinentes, a condición de que después de ello, regresamos la planta, sin marcarla. Al día siguiente se nos da otra planta B de ese mismo invernadero, y se nos pide que demostremos, sin lugar a las más mínima duda, que A = B. Para ello sería preciso conocer todas las propiedades de cada planta y luego constatar que son las mismas. Esto, a los seres humanos no nos es posible efectuarlo, porque las plantas, como todos lo entes reales, tienen una infinidad de propiedades y nosotros sólo disponemos de un lapso finito de vida. Por ello, sólo podremos conjeturar que es muy probable que se trate de la misma planta si un gran número de propiedades observadas coinciden en A y en B; pero de ninguna manera podremos estar absolutamente seguros de que A = B.

♦ Lo que nos permite la abstracción

Desde luego, no nos sucederá lo mismo si A y B son dos proposiciones y se nos pide demostrar que sus significados son iguales, esto es, que A $\Leftrightarrow$ B. Para ello disponemos de cualquiera de los siguientes recursos:

Primero: A $\Leftrightarrow$ B si se cumplen simultáneamente las dos condiciones siguientes:

a) Siempre que el significado de A sea verdadero, forzosamente es verdadero el significado de B.
b) Siempre que el significado de B sea verdadero, forzosamente es verdadero el significado de A.

Esto es, A $\Leftrightarrow$ B cuando el valor de la tabla de A sea

A	B
V	V

lo cual quiere decir que los significados de A y B tienen la misma propiedad: ambos son verdaderos, y por ello son iguales.

Segundo: A $\Leftrightarrow$ B si se cumplen simultáneamente las dos condiciones siguientes:

a) Siempre que A sea falsa, forzosamente B es falsa.
b) Siempre que B sea falsa, forzosamente A es falsa.

Esto es, A $\Leftrightarrow$ B cuando el valor de la tabla de A y b sea

A	B
F	F

Ello quiere decir que los significados de A y B tienen la misma propiedad: ambos son falsos, y por ello son iguales.

Tercero: A $\Leftrightarrow$ B si se cumplen simultáneamente las dos condiciones siguientes:

a) Es imposible que A sea verdadera y B sea falsa.
b) Es imposible que A sea falsa y B sea verdadera.

Es decir, A $\Leftrightarrow$ B cuando la tabla de valores de A y B sea

A	B
V	V
F	F

en cuyo caso los únicos valores posibles de la tabla son:

A	B
V	V

y en este caso, el segundo recurso nos permite asegurar que A $\Leftrightarrow$ B, o

A	B
F	F

y en el presente caso, el segundo recurso nos permite asegurar que A $\Leftrightarrow$ B.

♦ ¿Con qué ejemplos ilustramos la equivalencia entre proposiciones?

Algunos ejemplos de proposiciones equivalentes son los siguientes:

1. a_1 = Juan es hijo de Manuel.
   a_2 = Manuel es el padre de Juan.

Entonces a_1 y a_2 son equivalentes (o sea, $a_1 \Leftrightarrow a_2$).

2. b_1 = Hoy es Martes.
   b_2 = Hoy es el día anterior al Miércoles
   b_3 = Hoy es la víspera del Miércoles
   b_4 = Hoy es el día que sigue al lunes.

En consecuencia, b_1 es equivalente a b_2; b_2 es equivalente a b_3 y b_3 es equivalente a b_4; esto es:

$$b_1 \Leftrightarrow b_2 \Leftrightarrow b_3 \Leftrightarrow b_4$$

3. c_1 = 8 es menor que 15.

   c_2 = existe un número mayor que cero, que sumado a 8 da 15.

   Por tanto, $c_1 \Leftrightarrow c_2$; es decir : c_1 es equivalente a c_2

4. d_1 = La edad de Juan es tres veces la de María.
   d_2 = La edad de María es un tercio de la de Juan.

   Entonces, $d_1 \Leftrightarrow d_2$

♦ ¿Cómo podemos aplicar el concepto de equivalencia entre proposiciones a nuestros discursos de la vida cotidiana?

El concepto de equivalencia entre posiciones, que acabamos de definir, puede parecer novedoso; sin embargo, no es así, ya que existen en nuestro lenguaje cotidiano varias expresiones que usamos con mucha frecuencia para indicar que dos proposiciones son equivalentes; decimos, por ejemplo:

...dicho en otras palabras...
...esto es...
...quiere decir...
...o, lo que es lo mismo...
...lo anterior significa que...
...dicho en buen romance...
...como se dice vulgarmente...
...es sinónimo de...,
etc.

Lo importante aquí es, por un lado, darnos cuenta de que todas estas formas de hablar tienen el mismo significado (es decir, que son equivalentes); y, por otro, que nos pongamos de acuerdo en que ese significado es el que le hemos dado en nuestra definición a la expresión: "La proposición p es equivalente a la proposición q".

Hay proposiciones acerca de las cuales es posible demostrar que son equivalentes entre sí; respecto de otras , únicamente nos queda aceptar o rechazar que lo sean, dado que sólo son formas idiomáticas, como sucede en el caso de las proposiciones anteriores. Esto, desde luego, no es nuevo, ya que aceptamos esta equivalencia entre proposiciones cuyas diferencias radican sólo en formas idiomáticas o coloquiales, las cuales reconocemos por nuestra propia experiencia

Más adelante, cuando tengamos la oportunidad de estudiar las reglas de indiferencia, podremos analizar con detalle esta posibilidad o mediante la consulta de un diccionario de sinónimos o de idiomas.

Es fácil observar que las proposiciones equivalentes hacen referencia a distintos recipientes de un mismo significado, de donde se deduce que *lo esencial de una proposición no lo es tanto su recipiente sino su significado.*

♦ ¿Qué función tiene el recipiente de una proposición?

En este momento es pertinente hacer una aclaración. Pudiera pensarse que estamos incurriendo en una exageración o en una pedantería al distinguir entre $p=q$ y $p \Leftrightarrow q$, dado que *el recipiente de una proposición* es, aparentemente, lo menos importante de ella. Sin embargo, hemos de reflexionar en el hecho de que es precisamente *el recipiente lo que nos permite comunicar el significado,* por lo cual reviste suma importancia. Además en los ejemplos que hemos dado resulta evidente que, aún siendo un tanto distintos los recipientes, sus significados son iguales; pero en otros casos los recipientes son totalmente diferentes y se requiere mucho ingenio y gran dedicación (a veces, es necesario crear toda una teoría) para demostrar que los significados de dos proposiciones son iguales.

►El concepto de relación de equivalencia como instrumento importante para el estudio de la matemática

En el estudio de la matemática, el lector encontrará que una buena parte de ella consiste precisamente en demostrar la equivalencia entre proposiciones, y hallará que en muchos casos alguna de las dos proposiciones lleva el nombre del matemático que descubrió su equivalencia con otra.

Sugerimos ahora que el lector, aplicando la definición de equivalencia, compruebe que las siguientes afirmaciones son verdaderas y descubra así el parentesco o similitud que existe entre la relación de igualdad y la relación de equivalencia entre proposiciones:

1. Toda proposición es equivalente a ella misma; es decir: si p es una proposición, entonces p es equivalente a p (esto es: p $\Leftrightarrow$ p); o sea,, la relación $\Leftrightarrow$ es reflexiva.
2. Si una proposición p es equivalente a una segunda, q, entonces la proposición q debe ser equivalente a la proposición p (es decir: si p $\Leftrightarrow$ q entonces q $\Leftrightarrow$ p). La relación es simétrica.
3. Si una proposición p es equivalente a una segunda q, y la proposición q es equivalente a una tercera, r, entonces por ese solo hecho, la proposición p es equivalente a la proposición r, o sea: si p $\Leftrightarrow$ q, y q $\Leftrightarrow$ r, entonces p $\Leftrightarrow$ r. La relación $\Leftrightarrow$ es transitiva.

►¿Qué son clases de equivalencia?

Antes de continuar deseamos hacer un convenio, con el objeto de simplificar un poco nuestra escritura y evitar una monótona y desagradable repetición de palabras. Como las consideraciones que haremos en lo sucesivo se referirán a cualquier proposición y no a una en particular, entonces pongámonos de acuerdo en usar letras minúsculas como p, q, r, etc., para denotar proposiciones: por ejemplo, siempre que digamos: "Supóngase que p es equivalente a q" o "Supóngase que p $\Leftrightarrow$ q", entenderemos que las letras p y q son una especie de taquigrafía para denotar a dos proposiciones cualesquiera.

Supongamos ahora que denotamos con la letra P a la colección de todas las proposiciones. Podemos observar que la relación de equivalencia $\Leftrightarrow$ nos permite *clasificar o dividir* la colección P en **clases o partes, constituidas por todas aquellas proposiciones que sean equivalentes entre sí.** A tales clases o divisiones de P las llamaremos *clases de equivalencia.*

Por ejemplo, el llamado lema de Zorn lleva el nombre del matemático Max Zorn, quien descubrió que su lema y el axioma de elección de la teoría de conjuntos, son equivalentes.

Por ejemplo, si p = Hoy es Martes, podemos formar la clase de equivalencia de esta proposición p, la cual estará integrada por todas las proposiciones que sean equivalentes a p, esto es, aquellas que tengan el mismo significado que ella.

Algunas de estas proposiciones, que se encuentran contenidas en la clase de equivalencia de p, son las siguientes:

q = Hoy es víspera de Miércoles
r = Hace dos días fue Domingo
s = Dentro de dos días será Jueves.
t = Mañana es Miércoles

Evidentemente, $p \Leftrightarrow q$, $p \Leftrightarrow r$, $p \Leftrightarrow s$ y $p \Leftrightarrow t$

Después de todo, la clase de equivalencia de una proposición dada no es más que la colección de todas aquellas proposiciones que significan lo mismo que la proposición en cuestión; sólo que para expresar este significado se utilizan diferentes recipientes, distintas formas de expresarlo.

♦ Las clases de equivalencia en las proposiciones, los significados puros o abstractos y los sinónimos de esas proposicione

Veamos cómo el estudio de las proposiciones en el aspecto de sus clases de equivalencia nos introduce en los procesos de abstracción.

Las clases de equivalencia en que podemos dividir la colección P de todas las proposiciones, por medio de la relación $\Leftrightarrow$, pueden ser interpretadas, cada una de ellas, como *significados puros*; y a las diferentes proposiciones que las integran, como la infinidad de formas equivalentes, *sinónimos* que la humanidad ha inventado para expresar, denotar o comunicar ese significado puro o abstracto, que nosotros hemos llamado significado de una proposición.

♦ Clase de equivalencia de una proposición dada p

Supongamos ahora que p denota una proposición, entonces [p] denota su clase de equivalencia: esto es [p] denota la colección formada por todas aquellas proposiciones que sean equivalentes a p. Por ejemplo, si

$$p = \text{Hoy es Martes}$$

entonces [p] es la colección de todas las proposiciones que de una manera u otra expresen o signifiquen lo mismo que p.

Podemos notar ahora algunas propiedades importantes de estas clases de equivalencia:

a) Si $p \Leftrightarrow q$, entonces $[p] = [q]$
b) Si $p \not\Leftrightarrow q$, entonces $[p] \neq [q]$.
c) Si $p \not\Leftrightarrow q$, entonces [p] y [q] no tienen proposiciones en común; es decir, son clases o colecciones de proposiciones ajenas.
d) Toda clase de equivalencia [p] contiene al menos una proposición: p misma, ya que $p \Leftrightarrow p$.

♦ ¿Cómo verificar que las anteriores propiedades son verdaderas?

Para cerciorarnos de que estas propiedades son verdaderas basta con efectuar unas cuantas observaciones, que por lo demás, son casi evidentes:

1. Notemos que si $p \Leftrightarrow q$, entonces p y q tienen el mismo significado y por ello, precisamente, sus clases de equivalencia son iguales.

2. Si $p \not\Leftrightarrow q$, entonces p y q tienen diferentes significados, los cuales, como hemos dicho anteriormente, son sus clases de equivalencia; y por ello ha de cumplirse que $[p] \neq [q]$.

3. Supongamos que $p \not\Leftrightarrow q$, pero que es posible encontrar una tercera proposición r que perteneciera simultáneamente, a [p] y [q]. Recordemos que la condición necesaria para que cierta proposición pertenezca a la clase de equivalencia de otra proposición consiste en que la primera sea equivalente a la segunda; por tanto, si r pertenece a [p], entonces $p \Leftrightarrow r$; y si r pertenece a [q], entonces $q \Leftrightarrow r$. Así pues, al afirmar que r pertenece a [p] y a [q], simultáneamente, estamos afirmando que $p \Leftrightarrow r$ y que $q \Leftrightarrow r$.

Recordemos ahora que la relación de equivalencia $\Leftrightarrow$ es simétrica y transitiva; y como q $\Leftrightarrow$ r, entonces r $\Leftrightarrow$ q. Tenemos, entonces, que p $\Leftrightarrow$ r y r $\Leftrightarrow$ q; en consecuencia, p $\Leftrightarrow$ q y sabíamos desde un principio que esto no era cierto, es decir, que sabemos que p $\not\Leftrightarrow$ q. Por tanto, no podemos suponer que existe una proposición r común a las clases p y q, ya que sabemos que p $\not\Leftrightarrow$ q. En este caso, las clases de equivalencia p y q son ajenas, es decir, no tienen elementos en común.

4. La cuarta propiedad es una trivialidad, ya que si [p] es una clase de equivalencia entonces, p será una proposición, y como la relación $\Leftrightarrow$ es reflexiva, entonces p $\Leftrightarrow$ p, lo cual significa que pertenece a la clase [p].

Supongamos ahora, que en vez de dividir la colección P, de todas las proposiciones, por medio de la relación $\Leftrightarrow$, lo hacemos por medio de la relación de igualdad =. Esto es, supongamos que para cada proposición p nos quedamos con la colección P, formada por todas aquellas proposiciones que sean iguales a p. Resultará ahora que la colección P no contiene mas elemento que la misma proposición p, ya que no puede existir otra proposición que no sea p y que, a su vez, sea igual. Fue precisamente en este sentido que dijimos, al definir la relación de igualdad, que era ésta la condición más severa que se le podía imponer a un ente para que estuviera relacionado con otro.

La clase de equivalencia que determina una proposición bajo la relación de igualdad, no contiene más que a esa proposición. En cambio, la clase de equivalencia de esa misma proposición, bajo la relación de equivalencia $\Leftrightarrow$, contiene una gran cantidad de proposiciones equivalentes a la proposición original.

► Relación de implicación

Podríamos decir que la relación de equivalencia nos permite clasificar las proposiciones, según tengan o no el mismo significado, en lo que hemos llamado clases de equivalencia o significado. La relación de implicación, que trataremos de precisar ahora, tiene como propósito fundamental el permitir *ordenar* las proposiciones de acuerdo con el mayor o menor significado que éstas tengan; es decir, nos proponemos aclarar qué significado podemos dar a la afirmación de que una proposición p tiene mayor significado que otra proposición q.

♦ ¿Cómo determinar que una proposición p es "mayor" que otra proposición q?

Si logramos aclarar lo anterior habremos encontrado un criterio que nos permite ordenar las proposiciones; o sea, una norma por medio de la cual podemos saber cuándo una proposición p es "mayor" que otra proposición q. Una vez que dispongamos de esta norma o criterio, será posible ordenar nuestras proposiciones, disponiéndolas de mayor a menor, por ejemplo. Lograremos así una mejor comprensión de la estructura general que forman entre sí las proposiciones, así como una mayor facilidad para su manejo, ya que, por razones que escapan a nuestra comprensión, los seres humanos conseguimos entender y manejar los conceptos y los objetos después de haberlos ordenado. Por ejemplo, si tomamos una caja de zapatos llena de timbres de correo, difícilmente podremos apreciar la calidad de esa colección. En cambio, si introducimos un orden en esas mismas estampillas de correo – por ejemplo: separándolas por países, luego por series, y finalmente, por valores dentro de cada serie – terminaríamos comprendiendo y apreciando cabalmente dicha colección. Notemos que el criterio que hemos mencionado, para poner en orden las estampillas, no siempre nos permite comparar dos timbres cualesquiera, ya que – como todos sabemos- un timbre p será mayor que otro timbre q si p y q son timbres de un mismo país, de una misma serie, y el valor marcado en p es mayor que el de q; por consiguiente, los timbres de diferentes países o de diferentes series no son comparables.

Asimismo, no hay que olvidar que cuando ordenamos estampillas de correo prestamos poca o ninguna atención a sus recipientes – no tomamos en cuenta su tamaño, por ejemplo -, nos interesa su procedencia, la serie a que pertenecen y su valor. Con las proposiciones nos sucede algo semejante; prescindiremos de sus recipientes y tomaremos en cuenta solamente sus significados para intentar ordenarlas.

♦ ¿Qué sentido puede tener el decir que una proposición sea mayor que otra?.

Procederemos ahora a la búsqueda de un criterio que nos permita ordenar las proposiciones, las cuales hasta este momento tenemos revueltas en la "caja de zapatos" que a veces es nuestra mente. Para ello tratemos de determinar qué sentido puede tener el decir que una proposición sea mayor que otra.

Supongamos, pues, que tenemos dos proposiciones p y q, y nos preguntamos qué significado puede dársele a la frase: "El significado de p es mayor que el de q". Evidentemente – si recordamos que nuestro interés se concentra en el significado o la información que contienen las proposiciones- la respuesta será que **toda la información que pueda contener q la contenga también la proposición p,** esto es, que el significado o la información contenida en la proposición q sea una parte de la correspondiente a la proposición p, como sucede, por ejemplo, con las proposiciones siguientes:

p = Amo a los niños
q = No golpeo a los niños

es decir, en la mente de todos nosotros está claro que la proposición Amo a los niños está formada, a su vez, por otras muchas proposiciones como Protejo a los niños, Educo a los niños, Procuro alimentar a los niños, No abuso de los niños, etc., cuya reunión o síntesis es, precisamente, la proposición *Amo a los niños,* del cual solemos decir que contiene implícitamente a las otras proposiciones que hemos mencionado. En otras palabras, **si acepto como verdadera esta proposición, convengo** –aunque lo haga no de manera explícita- **en aceptar como verdaderas las proposiciones que la forman,** de las cuales decimos que están *implícitas* en ella; que son las que ella *implica*; que son *consecuencias necesarias* de ella o *condiciones necesarias* para ella.

♦ La implicación y una de las actividades más importantes de la ciencia y, en general, de la cultura humana

Nótese que no estamos cayendo en lo que suele llamarse una discusión bizantina; por lo contrario, la tarea de hacer explícitas las más de las proposiciones implícitas en una dada, ha sido una de las actividades más importantes de la ciencia y, en general, de la cultura humana.

La proposición:

Existe un corrimiento del color rojo en el espectro de la luz emitida por las galaxias que nos rodean,

se supone que implica la proposición:

El universo que habitamos se encuentra en expansión.

Asimismo, la proposición:

La tasa de crecimiento de población en Colombia es de 5%

implica la proposición:

A comienzos del siglo XXI, la población de Colombia excederá de 42 millones de habitantes

que, como todos sabemos, implica una enormidad de proposiciones relativas a nuestra vida social, su estructura, su dinámica y los recursos y técnicas necesarios para enfrentarse a tal crecimiento.

Notemos también que las proposiciones p y q, mencionadas con anterioridad están relacionadas, evidentemente, por el siguiente hecho importante:

Es imposible que p sea verdadera
y q sea falsa simultáneamente.

Es decir, si q es una parte de p, y p es una proposición verdadera, entonces todas las partes de p han de ser verdaderas; y, en consecuencia, si q es una parte de p, forzosamente q tiene que ser verdadera. En otras palabras, estamos negando la validez de la afirmación que hizo un criminal tristemente célebre, en el sentido de que muchas mentiras hacen una verdad. Nosotros insistimos en que muchas o pocas mentiras no dejan de ser mentiras, y que **lo característico de la verdad es que *todo aquello que sea parte de ella, también es verdad.***

En otras palabras, estamos afirmando que *si p es una proposición y está formada por partes, que a su vez son proposiciones, entonces la veracidad de p dependerá de que sean verdaderas todas las proposiciones que forman parte de ella.* Bastará, pues, con que una de las partes de p sea falsa, para que p lo sea también; y recíprocamente, si p es una proposición verdadera, entonces, necesariamente, son verdaderas todas sus partes. Notemos que el criterio

q es una parte de p si no es posible que p sea verdadera y simultáneamente q sea falsa

nos permite ordenar las proposiciones, si aceptamos que p sea mayor que q cuando q sea – de acuerdo con este criterio- una parte de la proposición p.

♦ ¿Cuándo dos proposiciones no son comparables?

De acuerdo con tal criterio, dos proposiciones no tienen porqué ser comparables entre sí (recordemos que lo mismo sucedió con el criterio que usamos para ordenar los timbres de correo); por ejemplo: la proposición *Tengo frío* no es comparable con la proposición *Hoy es Martes*, ya que una de ellas puede ser verdadera y la otra falsa. Por tanto, ninguna de ellas es mayor que la otra. Ahora bien, si recordamos las proposiciones Amo a los niños y No golpeo a los niños, notaremos que, de cuerdo con nuestro criterio, la primera es mayor que la segunda, ya que si es verdad la primera, no podemos aceptar que la segunda sea falsa; esto es, si amo al niño, entonces necesariamente no lo golpeo; lo educo, y lo protejo... Así pues, no golpear al niño, educarlo, protegerlo, etc., son proposiciones que forman parte de la proposición Amo al niño. En otras palabras, esta proposición contiene, como parte de su significado, al significado de las otras proposiciones, por lo cual diremos que es *mayor* que ellas.Tenemos, pues, un criterio que nos permite relacionar dos proposiciones cualesquiera.

♦ ¿Qué se quiere decir con las expresiones: p implica q, q es implicada por p, o q está implícita en p?

Cuando las proposiciones p y q estén en esa relación, podremos decir que p es mayor que q, o que es una parte de p; sin embargo, en lugar de estos términos, se acostumbra decir que *p implica q*, que *q es implicada por p*, o que *q está implícita en p.*

Para formalizar lo que acabamos de señalar, demos la siguiente definición formal de implicación: Sean p y q dos proposiciones;

diremos que p *esta en relación de implicación con* q
o, más brevemente, que p *implica a* q,
en cuyo caso escribiremos p $\Rightarrow$ q,

cuando el significado de las proposiciones consideradas sea de tal naturaleza que resulte imposible que p *pueda ser verdadera y* q *falsa simultáneamente.*

Esto significa que p $\Rightarrow$q cuando el valor

p	**q**
V	F

sea incompatible o imposible de ser cumplido por p y q simultáneamente.

Por ejemplo, si

p = Hoy es Martes 15 de mayo
q = Hoy es Martes, y
r = Hoy es día de pago, entonces:

a) p$\Rightarrow$q, es decir, p y q están en relación de implicación, ya que es imposible que hoy sea Martes 15 de Mayo y simultáneamente sea falso que hoy sea Martes.

Notemos que en este caso la tabla de valores de p y q es

p	**q**
V	V
F	V
F	F

ya que puede ser verdadero que hoy sea Martes 15 de Mayo y que hoy sea martes; puede ser falso que hoy sea Martes 15 de Mayo, pero verdadero que hoy sea Martes; y finalmente, puede ser falso que hoy sea Martes 15 de Mayo y falso que hoy sea Martes. Todo ello es perfectamente compatible con los significados de las proposiciones p y q. Lo único que no es compatible es que p sea verdadero y q sea falso; por ello podemos afirmar que p$\Rightarrow$q es verdad.

b) p $\not\Rightarrow$ r, es decir, p y r no están en relación de implicación, ya que no existe contradicción alguna en el hecho de que sea verdad el que hoy es Martes 15 de Mayo y (desgraciadamente) falso que hoy sea día de pago; notemos que en este caso la tabla de valores posible para p y q es:

p	**q**
V	V
V	F
F	V
F	F

y, en consecuencia, las proposiciones p y q no están en relación de implicación (tampoco de equivalencia). De lo anterior podemos concluir, como veremos más adelante, que afirmar que p⇒q es lo mismo que afirmar que q es un corolario de p.

♦ Regla de oro para facilitar la comprensión y el manejo tanto de la implicación como de otros conceptos

Antes de ahondar un poco más en esta nueva relación entre proposiciones, es conveniente hacer un aclaración por medio de la cual esperamos facilitar la comprensión y el manejo de algunos conceptos. Dicha aclaración podemos sintetizarla en la siguiente regla, que afecta en general a todo el juego que intentemos desarrollar en este capítulo:

Todo aquello que no se prohíba explícitamente es válido.

Si aplicamos esta regla, quedará claro que un buen recurso para saber si una proposición p implica a otra q, consiste en determinar si la tabla de valores de esta proposición es:

p	**q**
V	V
F	F
F	V

en cuyo caso, seguramente p⇒q, ya que esta tabla nos informa que no es compatible para las proposiciones p y q tomar simultáneamente los valores p: verdadera y q: falsa y esto significa, justamente, que p⇒q. Esto es, p⇒q cuando p puede ser verdadera y q verdadera; o p puede ser falsa y q falsa; o p puede ser falsa y q verdadera (todo esto no lo prohíbe la relación de implicación y, por tanto, es factible); pero no puede suceder que p sea verdadera y que q sea falsa (esto sí lo prohíbe la relación de implicación).

Aunque parezca repetitivo, quizá valga la pena insistir en que, de acuerdo con lo dicho, dos proposiciones cualesquiera, p y q, pueden tomar su valor de un conjunto de cuatro valores, al que llamamos tabla de verdad de las proposiciones p y q , en este caso.

p	q
V	V
F	F
V	F
F	V

Ahora bien, si la proposición p implica la proposición q, es decir, si p⇒q, entonces podemos reconocer esta relación entre p y q por el hecho de que su tabla de valores excluye el valor

p	q
V	F

y se reduce únicamente a los tres posibles valores restantes:

p	q
V	V
F	F
F	V

♦ Distintas expresiones equivalentes a la proposición $p \Rightarrow q$

También sucede, como en el caso de la relación de equivalencia entre proposiciones, que se acepta el uso de distintas expresiones equivalentes a la proposición $p \Rightarrow q$, algunas de las cuales mencionamos a continuación:

a) $p \Rightarrow q$.
b) p implica q
c) q es condición necesaria para p.
d) q, siempre y cuando p.
e) p, por lo tanto q.
f) $p \therefore q$.
g) q es verdadera siempre que p sea verdadera.
h) p, sólo cuando q.
i) q es una consecuencia de p.

♦ Propiedades de la implicación

Veamos ahora que, por lo que se refiere a la relación de implicación entre proposiciones, se cumplen también dos de las propiedades que son válidas en el caso de la equivalencia:

a) Toda proposición p se implica a sí misma, es decir: si p es una proposición, entonces $p \Rightarrow p$; o sea: la relación $\Rightarrow$ es reflexiva

Para convencernos de que lo anterior es cierto basta recordar que, de acuerdo con el principio del tercero excluido, si p es una proposición no puede ser verdadera y falsa simultáneamente; por lo tanto $p \Rightarrow p$.

b) Si una proposición p implica a otra q, y q implica a una tercera r, entonces la primera implica la tercera; es decir si $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow r$, entonces $p \Rightarrow r$, o sea: la relación $\Rightarrow$ es transitiva

¿Cómo demostrar estas propiedades? En este caso el lector ha de observar lo siguiente:

1. Estamos formulando dos hipótesis: pedimos que se suponga que es verdad que p implica q, y que q implica r. En realidad, de acuerdo con la

definición, lo que estamos pidiendo es que se acepte como verdadero que:

a) Siempre que p sea verdadera, q también es verdadera.
b) Siempre que q sea verdadera, r también es verdadera.

2. Ahora tenemos que encontrar un argumento razonable para convencer a cualquier persona (también razonable) de que si acepta que a) y b) son ciertas, entonces forzosamente se cumple que p implica r, esto es, siempre que p es verdadera, r también lo es. Notemos ahora que el razonamiento que tenemos es trivial: supongamos que p es verdadera, entonces (por la hipótesis a) q también es verdadera y (por la hipótesis b) r es verdadera. Por tanto, hemos visto que, en virtud de las hipótesis a) y b), siempre que p sea verdadera, necesariamente r es verdadera; y por ello, hemos demostrado que p implica r.

Por último estudiaremos una tercera propiedad que tiene la relación de implicación, que se conoce con el nombre de *antisimetría:*

Teorema Si las proposiciones p y q satisfacen simultáneamente las siguientes propiedades:

$$p \Rightarrow q \ \ y \ \ q \Rightarrow p$$

entonces, necesariamente,

$$p \Leftrightarrow q.$$

Recíprocamente, si las proposiciones p y q son equivalentes; esto es, si $p \Leftrightarrow q$, entonces podemos afirmar con certeza que se implican la una a la otra; o sea, $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$.

Demostración:

Para convencernos de lo anterior, supongamos primero que efectivamente $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$; entonces, siempre que p sea verdadera, q ha de ser verdadera; y siempre que q sea verdadera, p ha de serlo también; en otras palabras: p es equivalente a q, ya que sus respectivos significados son iguales.

Recíprocamente, si suponemos ahora que $p \Leftrightarrow q$, es decir, si ambas proposiciones tienen el mismo significado, entonces no es posible que p sea verdadera y q falsa, o que q sea verdadera y p sea falsa, lo cual, como recordaremos, significa que p implica q y que q implica p, simultáneamente.

Así pues, es lo mismo afirmar que las proposiciones p y q son equivalentes, que afirmar que dichas proposiciones se impliquen la una a la otra simultáneamente.

● *Demostración del teorema por medio de las tablas de verdad*

Si los argumentos usados anteriormente le parecen un tanto confusos al lector, quizá encuentre más claro el siguiente razonamiento, que nos permite demostrar el mismo teorema, pero esta vez recurriendo al auxilio que nos ofrecen las tablas de verdad de las proposiciones p y q:

a) Hemos de suponer verdadero el que $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$; con base en ello confirmar que $p \Leftrightarrow q$.

Supongamos entonces que $p \Rightarrow q$ *y* $q \Rightarrow p$; en tal caso, la tabla de verdad de las proposiciones p y q ha de excluir los valores

p	q
V	F

por implicar p a q, y

p	q
F	V

por implicar q a p. Consecuentemente, los valores compatibles con las proposiciones p y q son las dos restantes; esto es, la tabla de valores de estas proposiciones es la siguiente:

p	q
V	V
F	F

con el cual queda de manifiesto que $p \Leftrightarrow q$.

b) *Tenemos ahora que demostrar que p⇒q y q⇒p, a partir del supuesto de que p⇔q.*

Supongamos, pues, que *p⇔q;* entonces sabemos que la tabla de valores de estas proposiciones ha de ser la siguiente:

p	q
V	V
F	F

Es decir, si p ⇔q, entonces los valores

p	q
V	F

p	q
F	V

quedan excluidos de la tabla de estas proposiciones y, consecuentemente, hemos de aceptar que en tal caso p⇒q y q⇒p son verdaderas simultáneamente.

Quede claro, pues, que un recurso más para conocer la equivalencia entre dos proposiciones consiste en demostrar que ambas se implican la una a la otra, y recíprocamente, si dos proposiciones, se implican entre sí, son equivalentes.

● *Diferencia entre las expresiones p es equivalente a q y p implica q.*

Es de suma importancia que el lector note la diferencia que existe entre p es equivalente a q (p⇔q) y p implica q (p⇒q). Recordemos que p es equivalente a q (p⇔q) cuando, al ser verdadera alguna de las dos proposiciones, la otra lo es necesariamente; no así en el caso en que p implica q (p⇒q), el cual, para que se cumpla, sólo exige que al ser verdadera p, necesariamente también q sea verdadera.

Así, pues, puede suceder que p implique q sin que p sea equivalente a q. Esto es, puede ocurrir que q sea verdadera y p resulte falsa.

Por ejemplo:

p = Amo a los niños.
q = No golpeo a los niños.

son proposiciones en las que, evidentemente, puede suceder que yo no golpee a los niños porque no soy un troglodita, a pesar de que me caigan muy mal y no los ame; *o sea,* q *puede ser verdadera y simultáneamente* p *falsa, dando como consecuencia que* q $\not\Rightarrow$ p, *aunque* p$\Rightarrow$ q.

Lo mismo sucede si las proposiciones p y q son las siguientes:

p = Juan es colombiano y menor de edad.
q = Juan es colombiano

Es claro que p implica q, ya que siempre que p sea verdadera, necesariamente q es verdadera. Asimismo, **también es claro que q no implica p**, es decir, puede ser verdad que Juan sea colombiano pero falso el que sea colombiano y menor de edad; por ejemplo, si el Juan al que se refieren las proposiciones p y q es colombiano y tiene 45 años. *En este caso p$\Rightarrow$q es verdadera y p$\Leftrightarrow$q es falsa.*

Podemos sintetizar lo anterior diciendo que la *relación de implicación no es simétrica,* o sea, puede suceder que p$\Rightarrow$q sea verdadera y, sin embargo, q$\Rightarrow$p resulta falsa.

● *De cómo estas tres cualidades de la relación de implicación la convierten en un concepto de suma importancia para la matemática: una relación de orden*

Las relaciones de orden son criterios que nos permiten relacionar a los elementos de un conjunto dado, de tal forma que nos resulta posible ordenarlos.

Por ejemplo, supongamos que el conjunto en cuestión es el conjunto H, de los seres humanos, y tenemos las relaciones que a continuación definiremos denotándolas con las letras r_1 y r_2:

r_1 = un ser humano h_1 está en la relación con otro ser humano h_2, si la edad de h_1 es menor o igual que la de h_2; cuando h_1 sea mayor que h_2, entonces h_1 no estará en relación r_1 con h_2.

r_2 = un ser humano h_1 está en la relación r_2 con otro h_2, cuando h_1 asista a la misma escuela que h_2; en caso contrario, h_1 no estará en la relación r_2 con h_2.

Notemos en primer lugar, que:

a) h está en la relación r_1 con h, cualquiera que sea el ser humano h. Análogamente, todo ser humano h esta en relación r_2 consigo mismo. Esto es, ambas relaciones r_1 y r_2, son reflexivas (como la relación $\Rightarrow$).

b) Si h_1 está en relación r_1 con h_2, y h_2, a su vez esta en esa misma relación r_1 con otro ser humano h_3, entonces es evidente que h_1 está en esa misma relación r_1 con h_3. Sin embargo, h_1 puede estar en la relación r_2 con h_2; a su vez, h_2 puede estar en esa misma relación con h_3 y, a pesar de ello, h_1 puede no estar en relación r_2 con h_3. Esto significa que nuestra relación r_1 si es transitiva, mientras que la r_2 no lo es.

c) Finalmente, observemos que si h_1 está en relación r_1 con h_2, y h_2 también está en esa relación r_1 con h_1, entonces lo que sucede es que h_1 y h_2 tienen igual edad o sea, que r_1 es antisimétrica. *Esto es:* r_1 es una relación reflexiva, transitiva y antisimétrica ; y en virtud de que tiene estas cualidades, nos permite ordenar a los seres humanos por edades, de mayor a menor, por ejemplo. Notemos que, en cambio, la relación r_2, que no es transitiva ni antisimétrica (dos seres humanos pueden asistir a varias escuelas, una de ellas común y no por ello todas comunes) no nos suministra un criterio para ordenar a los seres humanos. A las relaciones que tienen estas propiedades las llamaremos relaciones de orden; así por tanto, *nuestra relación de implicación* ($\Rightarrow$) *entre proposiciones es una relación de orden, ya que es reflexiva, transitiva y antisimétrica.* La relación $A \subset B$ (A es subconjunto de B) y la relación $x \leq y$ (x es menor o igual que y), muy conocidas desde la escuela primaria, son relaciones de orden entre los conjuntos y los números reales, respectivamente, ya que también son reflexivas, transitivas y antisimétricas.

● *Distinción entre la relación de implicación y la conectiva condicional sí...,entonces.*

Finalmente, deseamos hacer una advertencia al lector: frecuentemente confundimos la relación de implicación que acabamos de definir con otro concepto –bastante relacionado con ella- que es muy distinto: la conectiva condicional *si..., entonces.* La relación de implicación $\Rightarrow$ es una relación de orden; el condicional, que denotaremos $\rightarrow$, tiene carácter exclusivamente algebraico: se construye a partir de las operaciones $\wedge$ y $\vee$, así como de la negación de proposiciones $\rceil$, y no es una relación de orden.

● *Una condición equivalente para que las proposiciones p y q estén en la relación p⇒q.*

Para terminar esta exposición, estudiemos el siguiente teorema, en el cual se analiza una condición equivalente para que las proposiciones p y q estén en la relación $p \Rightarrow q$. Tal condición es simétrica a la anteriormente dada: $p \Rightarrow q$, cuando no es posible que p sea falsa y q verdadera (ya que q es parte de p, o menor que p), y nos dice ahora que

$p \Rightarrow q$ cuando no es posible que q sea falsa y p sea verdadera;

esto es, cuando q sea falsa, p ha se serlo también (ya que q es parte de p, y si una parte del todo es falsa, el todo no puede ser verdadero).

Teorema *Sean p y q dos proposiciones; entonces, las proposiciones siguientes son equivalentes:*

A: $p \Rightarrow q$
B: Siempre que q sea falsa, p será falsa

¿Cómo demostrar este teorema?

Tenemos que demostrar que $A \Leftrightarrow B$; para ello, demostraremos que $A \Rightarrow B$, que $B \Rightarrow A$, aplicaremos el teorema anterior.

Un camino para demostrar que $A \Rightarrow B$ consistirá en probar que si A es verdadera, entonces B tiene que ser verdadera.

Supondremos, pues, que A es verdadera, es decir, que efectivamente $p \Rightarrow q$. Supongamos ahora que q es falsa, entonces p ha de ser falsa, ya que si p fuera verdadera, q seria verdadera, pues q es una proposición y no una paradoja; en consecuencia por el hecho de aceptar que $p \Rightarrow q$ es verdadera, tenemos que aceptar que siempre que q sea falsa, p también lo será y, por tanto, hemos demostrado que siempre que A sea verdadera, B será también verdadera, o sea, $A \Rightarrow B$.

Demostraremos ahora que $B \Rightarrow A$. para ello, *supongamos que B es verdadera,* o sea, que efectivamente se cumple que siempre que q es falsa, p también es falsa. Supongamos ahora que p es verdadera, entonces q tiene que ser verdadera; porque si q fuera falsa, entonces p será falsa (ya que B es verdadera), y en este caso tendríamos otra vez que p es una paradoja, lo cual no es cierto, ya que es una proposición. Así, al aceptar que B es verdadera estamos forzados a reconocer que A también es verdadera. Vemos, pues, que siempre que p sea verdadera, q lo es también, o sea, $p \Rightarrow q$ es verdadera. De este modo, hemos demostrado que $B \Rightarrow A$; y como sabemos que $A \Rightarrow B$ entonces, por el teorema anterior, podremos concluir que $A \Leftrightarrow B$.

A modo de conclusión

El estudio del concepto de relación de igualdad es importante no sólo porque nos capacita para emprender un estudio formal y riguroso de las proposiciones sino también porque constituye un ejercicio práctico que nos introduce en la actividad importante de la simbolización, en el desarrollo de lenguaje formal y por ende en los procesos de abstracción.
Proposiciones equivalentes no quiere decir que son proposiciones iguales; son distintas formas de expresar el significado de una proposición determinada, o sea, formas de hablar que tienen un mismo significado, o distintas representaciones para significar una misma realidad.

Sabemos que estamos hablando proposiciones equivalentes en nuestro lenguaje cotidiano, cuando en nuestros discursos estas aparecen ligadas por expresiones como: ...dicho en otras palabras..., ...esto es...,...quiere decir...,...lo anterior significa que..., ...como se dice vulgarmente...etc.

Debido a que las proposiciones equivalentes hacen referencia a distintos recipientes de un mismo significado, es importante tener en cuenta que lo esencial de una proposición no lo es tanto su recipiente sino su significado. La importancia del recipiente está en que es precisamente éste lo que nos permite comunicar el significado de la proposición.

El concepto de relación de equivalencia es un instrumento indispensable para el estudio de la matemática porque una buena parte de ella consiste precisamente en demostrar la equivalencia entre proposiciones.

Manejar el concepto de relación de equivalencia es importante porque nos permite *clasificar o dividir cualquier colección de proposiciones* en clases o partes.

La clase de equivalencia de una proposición determinada es la colección de todas aquellas formas que expresan el significado de la proposición en cuestión; las clases de equivalencia son significados puros o abstractos. La clase de equivalencia de una proposición determinada es el conjunto de los sinónimos que la humanidad ha inventado para expresar, denotar o comunicar el significado de esa proposición.

Trabajar con clases de equivalencia desarrolla la capacidad de abstracción. Es muy importante tener claridad y un buen dominio del concepto de implicación, porque esto nos permite *ordenar* las proposiciones en nuestras materias de estudio y también en nuestros discursos en el lenguaje cotidiano, l*ogrando así una mejor comprensión de la estructura general de las proposiciones y facilidad para su manejo*.

El manejo del concepto de implicación nos permite comparar proposiciones, y por lo tanto determinar las relaciones entre ellas.

Síntesis

A es lo mismo que B, o A es idéntico a B, lo cual denotaremos así: A = B, si toda propiedad que tenga el ente representado por A también la tiene el representado por B y, recíprocamente, toda propiedad que tenga el ente representado por B la tiene el representado por la letra A. De acuerdo a esta definición, al escribir A = B no reconocemos que la letra A sea lo mismo que la letra B, sino que las letras A y B están siendo usadas, en dos oportunidades diferentes, para denotar un mismo ente.

Con respecto a la relación de igualdad entre proposiciones, debido a que una proposición consiste de un recipiente con un significado como contenido, entonces dos proposiciones son iguales si han de tener el mismo recipiente y el mismo significado; de otra manera no tendrían las mismas propiedades y por consiguiente no serían iguales. Dos proposiciones son equivalentes cuando tienen el mismo significado. Existen en nuestro lenguaje cotidiano varias expresiones que usamos con mucha frecuencia para indicar que dos proposiciones son equivalentes; decimos, por ejemplo: ...dicho en otras palabras..., ...esto es..., ...quiere decir..., ...o, lo que es lo mismo..., esto significa..., etc. Hay proposiciones acerca de las cuales es posible demostrar que son equivalentes entre sí; respecto de otras , únicamente nos queda aceptar o rechazar que lo sean, dado que sólo son formas idiomáticas.

Es fácil observar que las proposiciones equivalentes hacen referencia a distintos recipientes de un mismo significado, de donde se deduce que lo esencial de una proposición no lo es tanto su recipiente sino su significado. El recipiente de una proposición tiene como función comunicar el significado de dicha proposición.

El concepto de relación de equivalencia juega un papel muy importante en el estudio de la matemática, porque buena parte de ella consiste precisamente en demostrar la equivalencia entre proposiciones. La clase de equivalencia de una proposición dada está constituida por todas aquellas proposiciones que tienen el mismo significado que dicha proposición, y por lo tanto, son equivalentes entre sí.

La clase de equivalencia de una proposición hace referencia al significado puro o abstracto de un grupo de proposiciones. La relación de equivalencia nos permite clasificar las proposiciones, según tengan o no el mismo significado, en lo que hemos llamado clases de equivalencia o significado. La relación de implicación nos permite *ordenar* las proposiciones de acuerdo con el mayor o menor significado que éstas tengan.

El significado de p es mayor que el de q cuando toda la información que pueda contener q la contenga también la proposición p. Cuando esto ocurre podemos decir que p es comparable con q. De esta situación se deduce el hecho importante de que es *imposible que p sea verdadera y q sea falsa* *simultáneamente*. Las expresiones *p implica q* o *q está implícita en p* quieren decir que p es mayor que q o que q es una parte de p. También sucede, como en el caso de la relación de equivalencia entre proposiciones, que se acepta el uso de distintas expresiones equivalentes a la proposición $p \Rightarrow q$, algunas de las cuales mencionamos a continuación:

p implica q,
q es condición necesaria para p,
q es verdadera siempre que p sea verdadera,
q es una consecuencia de p,
p por lo tanto q.

La distinción entre la relación de implicación y la conectiva condicional sí...,entonces., está en que la relación de implicación $\Rightarrow$ es una relación de orden y el condicional, que se denota por $\rightarrow$, tiene carácter exclusivamente algebraico: se construye a partir de las operaciones $\wedge$ y $\vee$, así como de la negación de proposiciones $\neg$, y no es una relación de orden.

EJERCICIOS

Revisemos nuestro grado de compresión:

1. ¿Son equivalentes las siguientes proposiciones? Explique, en cada caso, el por qué de su respuesta:

   a) p = El año tiene 365 días.
      q = El año no tiene más de 365 días.
   b) p = Yo no subo.
      q = Yo bajo.
   c) p = Todos los hombres hablan.
      q = Ningún hombre es mudo.
   d) p = No todos los hombres hablan.
      q = Existe al menos un hombre mudo.

2. Indique cuáles de las proposiciones anteriores tiene la siguiente propiedad:

$p \Rightarrow q$ pero $q \not\Rightarrow p$ y cuáles la propiedad $q \Rightarrow p$ pero $p \not\Rightarrow q$

3. En cada uno se los siguientes casos, diga si p $\Rightarrow$ q es cierto o falso:

a) p = El año tiene 365 días.
   q = El año no tiene más de 365 días.
b) p = No existe algún animal que ladre.
   q = El perro no ladra.
c) p = Ningún animal ladra.
   q = El perro ladra.
d) p = La capital de Inglaterra es Londres
   q = Londres está en Asia.

4. En cada uno de los siguientes casos, dé una proposición (la que falte) para que se cumpla p $\Rightarrow$ q.

a) p = El agua es un líquido.
b) p = México está en Europa.
c) q = Juan ganó mil pesos.
d) q = Pedro no tiene 400 años.

5. Diga en qué casos es cierto que p $\Rightarrow$ q.

a) p = Este lápiz no es amarillo.
   q = Este lápiz es rojo.
b) p = Juan no es español.
   q = Juan no es mexicano.
c) p = Ramón es caqueteño.
   q = Ramón es Colombiano.
d) p = Mi auto rojo es una Nissan.
   q = Mi auto no es un Volkswagen verde.
e) p = Mi auto no es rojo, o no es una Nissan.
   q = Mi auto es un Volkswagen verde.

6. Diga si es o no cierto que p $\Rightarrow$ q si:

p = Este lápiz es rojo

y

q = China está en Asia.

Explique su respuesta.

7. Mencione cuatro proposiciones que sean equivalentes y describa, con sus propias palabras, el significado de todas ellas; es decir, caracterice la clase de equivalencia a que pertenecen o determinan.

8. Encuentre cuatro proposiciones p_1, p_2, p_3, y p_4, que impliquen otras cuatro proposiciones q_1, q_2, q_3 y q_4, respectivamente, es decir, $p_1 \Rightarrow q_1$, $p_2 \Rightarrow q_2$, $p_3 \Rightarrow q_3$, $p_4 \Rightarrow q_4$; pero que asimismo: $q_1 \not\Rightarrow p_1$, $q_2 \not\Rightarrow p_2$, $q_3 \not\Rightarrow p_3$ y $q_4 \not\Rightarrow p_4$.

9. Encuentre cuatro proposiciones p_1, p_2, p_3, y p_4, implícitas en la proposición:

p = Tengo un automóvil registrado a mi nombre en Santiago de Cali

que estén sujetas a las siguientes condiciones:

$$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow p_3 \Rightarrow p_4$$

y

$$P \Leftarrow p_1 \Leftarrow p_2 \Leftarrow p_3 \Leftarrow p_4$$

10. De la lectura : **¿Qué debemos saber sobre el empleo del agua como remedio?**(ver última página), realizar las siguientes actividades:

a) Compare, entre si, las proposiciones abajo escritas, y ordénelas de acuerdo al mayor contenido que tengan. Utilice el símbolo $\Rightarrow$ para hacer esta comparación.

b) Discuta la validez de las siguientes implicaciones:

$q \Rightarrow q_1$

$q \Rightarrow q_3$

$q_2 \Rightarrow q_3$

$\neg q \Rightarrow q_3$

donde:

q : Aplicamos los tratamientos hidroterápicos de una manera adecuada.

q_1: Tenemos éxito con los tratamientos hidroterápicos.

q_2: Aplicamos el agua como tratamiento de una manera impropia.

q_3: Con los tratamientos hidroterápicos no obtendremos los resultados deseados, y hasta puede ser perjudicial.

c) De las proposiciones abajo escritas, ¿cuáles son equivalentes entre si? Escriba estas equivalencias simbólicamente utilizando el símbolo $\Leftrightarrow$ También plantee las que no son equivalentes.

r : Se aprovecha la presión, la temperatura, la forma y la duración de la aplicación hídrica para estimular el organismo en el combate a determinados procesos mórbidos.

r_1: Este tratamiento hídrico, ejerce un estímulo sobre el organismo enfermo, cuando éste está en condiciones de reaccionar favorablemente.

r_2: "Toda enfermedad es curable, pero no todos los enfermos".

r_3 : Cuando no hay más vitalidad en el cuerpo, ningún tratamiento adelantará.

r_4: La fuerza vital es la única que puede luchar para expulsar el mal.

r_5: Los tratamientos suministrados, tienden solo a aumentar esta fuerza, despertarla y ayudarla.

r_6: Se producen reacciones en el cuerpo.

d) Discuta la validez de las siguientes implicaciones:

$r \Rightarrow r_1 \Rightarrow r_2 \Rightarrow r_3$

$r \Leftarrow r_1 \Leftarrow r_2 \Leftarrow r_3$

$r \Rightarrow r_1$ y $r \Leftarrow r_1$

$r_2 \Rightarrow r_3$ y $r_2 \Leftarrow r_3$

$r \Rightarrow r_2$ y $r \Rightarrow r_3$

$r_1 \Rightarrow r_2$ y $r_1 \Rightarrow r_3$

$r_3 \Rightarrow r_4 \Rightarrow r_5 \Rightarrow r_6$

$r_3 \Leftarrow r_4 \Leftarrow r_5 \Leftarrow r_6$

$r_3 \Rightarrow r_5$ y $r_4 \Rightarrow r_6$

$r_3 \Rightarrow r_6$ y $r_2 \Rightarrow r_4$

e) Muestre la relación de implicación en que están las siguientes proposiciones:

s_1: Estas reacciones se manifiestan bajo la forma de ruborización y calor de la piel, inmediatamente después de la aplicación hídrica.

s_2: El agua que se aplica es fría

s_3: Hay contracción en los vasos sanguíneos,

s_4: La sangre de la superficie corporal (periferia) es recalcada para el interior del cuerpo,

s_5: El cuerpo reacciona, volviendo a enviar de su interior, grandes cantidades de sangre para la región resfriada.

s_6: En la región resfriada se manifiesta una agradable sensación de calor, lo que hace con que la piel tome una coloración roja.

f) Si las relaciones de las anteriores proposiciones constituyen una cadena proposicional, exhíbala.

¿Qué debemos saber sobre el empleo del agua como remedio?

Para tener éxito con los tratamientos hidroterápicos, es muy importante aplicarlos de una manera adecuada. Cabe decir que, si aplicamos el agua como tratamiento, de una manera impropia, no obtendremos los resultados deseados, y hasta puede ser perjudicial.

Se aprovecha la presión, la temperatura, la forma y la duración de la aplicación hídrica para estimular el organismo en el combate a determinados procesos mórbidos. Es decir que, este tratamiento, ejerce un estímulo sobre el organismo enfermo, cuando éste está en condiciones de reaccionar favorablemente. Por esto, dice Kuhne que : "toda enfermedad es curable, pero no todos los enfermos". Esto quiere decir que cuando no hay más vitalidad en el cuerpo, ningún tratamiento adelantará, puesto que la fuerza vital es la única que puede luchar para expulsar el mal, y, en esta lucha, los tratamientos suministrados, tienden solo a aumentar esta fuerza, despertarla y ayudarla, lo que hace que se produzcan reacciones.

Estas reacciones se manifiestan bajo la forma de ruborización y calor de la piel, inmediatamente después de la aplicación hídrica. Si el agua que se aplica es fría, hay contracción en los vasos sanguíneos, la sangre de la superficie corporal (periferia) es recalcada para el interior del cuerpo, que tendiendo a compensar el recalcamiento, reacciona, volviendo a enviar de su interior, grandes cantidades de sangre para la región resfriada. En ésta, se manifiesta entonces una agradable sensación de calor, lo que hace con que la piel tome una coloración roja.

Sólo cuando esta reacción se presenta de una manera bien evidente, tenemos la seguridad de que el organismo reaccionó adecuadamente. Si no se manifiesta esta reacción, es señal de que el organismo no está más en condiciones de reaccionar, o entonces, la aplicación hídrica fue mal aplicada, y deberá ser repetida de otra manera.