C A P Ì T U L O I

C O N J U N T O S

Tomamos la palabra ‘conjunto’ con su significado intuitivo de “colección” con algunas modificaciones. Utilizaremos las letras mayúsculas A, B, C, . . . X, Y, Z para designar conjuntos. Utilizaremos las letras minúsculas latinas a, b, c, ... x, y, z para designar elementos.

La expresión :

x es un elemento del conjunto A,

se simboliza por

$$\mathbf{x \in A}$$

y se lee :

x pertenece a A.

Si

x no es un elemento del conjunto A,

se escribe :

$$\mathbf{x \notin A.}$$

Para aplicar estos primeros elementos del lenguaje de la Teoría de conjuntos, representemos por M e I los conjuntos de los médicos y de los ingenieros respectivamente. Entonces la expresión

$$\mathbf{l \in M \wedge j \in I}$$

podría significar

Luis es médico y Juan es ingeniero.

Si E representa el conjunto de los estudiantes y T el conjunto de los trabajadores, entonces la afirmación

Luis estudia pero no trabaja

Se podría representar por la fórmula lógica

$$\mathbf{l \in E \wedge l \notin T}$$

Decir que Luis pertenece al conjunto de los estudiantes, es lo mismo que decir que Luis estudia; igual, para la expresión Luis no trabaja.

I. IGUALDAD, CONTENENCIA Y EL CONJUNTO VACIO.

1.1 Definición de igualdad

Intuitivamente hablando, dos conjuntos son iguales si tienen exactamente los mismos elementos.

Simbólicamente,

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)\ (x\in A \Leftrightarrow\ x\in B)$

Justificación de la definición

Sinónimos de $A = B$:

$A = B \ \leftrightarrow$ A y B tienen exactamente los mismos elementos

- todos los elementos de A estàn en B y todos los elementos de B estàn en A.
- Todo elemento de A es elemento de B y todo elemento de B es elemento de A.
- $\forall x \ (x\in A\Rightarrow x\in B) \wedge\forall x \ (x\in B \Rightarrow x\in A)$, en lenguaje lógico matemático.
- $\forall x \ ((x\in A\Rightarrow x\in B) \wedge (x\in B\Rightarrow x\in A))$, propiedad de los cuantificadores.
- $\forall x ((x\in A\Leftrightarrow x\in B)$, ley bicondicional.

Negación de A = B

$\rceil(A =.B) \ \leftrightarrow\ A \neq B \ \Leftrightarrow \rceil(\forall x\ (x\in A\Leftrightarrow x\in B),$

- $\Leftrightarrow \exists x (x\in A\wedge x \notin B) \vee (x\in B \wedge x \notin A)$

La negación de $A = B$ es $A \neq B$, cuya traducción en lenguaje simbólico es: Existe x tal que $x\in A$ pero $x \notin B$, o existe x tal que $x\in B$ pero $x \notin A$.

En lenguaje ordinario:

$A \neq B$, cuando hay un elemento en A que no està en B o cuando hay un elemento en B que no está en A

Consecuencias de la relación de igualdad

1.2 Proposiciòn (i) $A = A$
(ii) $A = B \Rightarrow B = A$
(iii) $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$

Demostraciòn de (i)

Demostrar $\mathbf{A = A}$
Traducción $x \in A \Leftrightarrow x \in A$, $\forall x$
Pero esto es una tautologìa (de la forma $p \Leftrightarrow p$).

Demostración de (ii)

ELD
Demostrar $\mathbf{A = B \Rightarrow B = A}$

(1)	$A = B$	**p**
(2)	$x \in A \Leftrightarrow x \in B$, $\forall x$	traducción 1, 1.1
(3)	$x \in B \Leftrightarrow x \in A$, $\forall x$	equivalencia 2
(4)	$B = A$	I 3, 1.1
□ (5)	$A = B \Rightarrow B = A$	CP 1,3

Demostración de (iii)

Interpretación:
Lo que la proposición (iii) quiere decir es que el razonamiento:

(1)	$A = B$	P
(2)	$B = C$	P
$\triangleright$	$A = C$	conclusión

es válido; es decir, la conclusión $A = C$ se deduce lógicamente de las premisas (1) y (2). Así que demostrar la proposición (iii) es equivalente a demostrar que $A = C$ se deriva lógicamente de las premisas $A = B$ y $B = C$, lo cual se plantea en la siguiente forma:

Demostrar : $\mathbf{A = C}$

(1)	$\mathbf{A = B}$	**P**
(2)	$\mathbf{B = C}$	**P**

Esta estructura es lo que llamamos ELD (esquema lógico de demostración).

Entonces, llevemos a efecto la demostración.

ELD

Demostrar : **A = C**

Traducción $x \in A \Leftrightarrow x \in C, \quad \forall x$

(1)	**A = B**	**P**
(2)	**B = C**	**P**
(3)	$x \in A \Leftrightarrow x \in B$	traducción 1
(4)	$x \in B \Leftrightarrow x \in C$	traducción 2
(5)	$x \in A \Leftrightarrow x \in C$	Ley transitiva de la equivalencia 3, 4
□ (6)	A = B	traducción 5

CONTENENCIA

1.3 Definición $A \subseteq B$, léase A subconjunto de B, significa que todo elemento de A es elemento de B.

Simbólicamente :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Negación de $A \subseteq B$

$$\neg(A \subseteq B) \Leftrightarrow \exists x \ (x \in A \wedge x \notin B)$$

En palabras, un conjunto A no está contenido en un conjunto B cuando hay un elemento en A que no está en B.

De acuerdo a la definición de contenencia, se demuestra que $A \subseteq B$ verificando que si $x \in A$, entonces $x \in B$.

Para indicar que A no está incluido en B se anota $A \not\subset B$. Por lo tanto $A \not\subset B$ indica que $\neg(A \subseteq B)$ y y se lee : A no está contenido en B o A no es subconjunto de B. $B \supseteq A$ significa $A \subseteq B$.

A la relación $\subseteq$ se le llama inclusión. A la relación $\supseteq$ se le llama contenencia. Si los elementos de A son algunos de los elementos de B, pero no todos, se dice que A está propiamente incluido en B o que A es subconjunto propio de B, y se anota $A \subset B$. Para indicar que A no es subconjunto propio de B pondremos $A \not\subset B$.

Consecuencias de la relación de inclusión

1.4 Proposición **(i)** $\mathbf{A \subseteq A}$
(ii) $\mathbf{A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A}$
(iii) $\mathbf{A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C}$

Demostración de (i) **ELD**

Demostrar $\mathbf{A \subseteq A}$

Traducción $x \in A \Rightarrow x \in A, \ \forall x$

Pero esto es una tautología (de la forma $p \Rightarrow p$).

Puesto que todo elemento de un conjunto A pertenece a A, resulta también que $A \subseteq A$, de modo que A es una parte de A, y otro tanto puede decirse de un conjunto cualquiera X.

Demostración de (ii) : **ELD 1**

Demostrar $\mathbf{A = B \Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A}$

(1)	$\mathbf{A = B}$	**P**
(2)	$x \in A \Leftrightarrow x \in B$	traducción 1
(3)	$(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$	LB 2
(4)	$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$	traducción 3
(5)	$A = B \Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$	CP 1,4

ELD 2

Demostrar $\mathbf{A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B}$

(1)	$\mathbf{A \subseteq B \wedge B \subseteq A}$	**P**
(2)	$(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$	traducción 1,1.3
(3)	$x \in A \Leftrightarrow x \in B$	LB 2
(4)	$A = B$	traducción 3
(5)	$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$	CP 1,4

Demostración de (iii).

Interpretación: Lo que este teorema (iii) quiere decir es que el razonamiento:

(1)	$A \subseteq B$
(2)	$B \subseteq C$
$\triangleright$	$A \subseteq C$

es válido.

ELD

Demostrar $A \subseteq C$

Traducción $x \in A \Rightarrow x \in C, \ \forall x$

(1)	$\mathbf{A \subseteq B}$	**P**
(2)	$\mathbf{B \subseteq C}$	**P**
(3)	$x \in A$	P
(4)	$x \in B$	3,1
(5)	$x \in C$	4,2
(6)	$x \in A \Rightarrow x \in C$	CP 3,5
□ (7)	$A \subseteq C$	Traducción 6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(3) Sea $x \in A$. **(4)** Como $A \subseteq B$, entonces $x \in B$, **(5)** y como también $B \subseteq C$, entonces $x \in C$. **(6)(7)** Por lo tanto $A \subseteq C$. □

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $x \in A$. Como $A \subseteq B$, entonces $x \in B$, y como también $B \subseteq C$, entonces $x \in C$. Por lo tanto $A \subseteq C$. □

NOTA

La proposición (ii) es especialmente importante, pues da la técnica más frecuente para demostrar que dos conjuntos son iguales.

DIAGRAMAS DE VENN

Existe una manera de representar gráficamente las ideas de la Teoría de Conjuntos. Los conjuntos se representan por regiones planas. Así por ejemplo la parte (iii) del Teorema 1.4 se puede ilustrar por la figura 1.

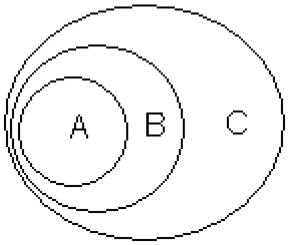


Fig. 1

El estudio de los conjuntos se facilita mediante la representación gráfica ya que la visualización de algunas situaciones ayuda a su captación intuitiva. Simbolizaremos gráficamente un conjunto, utilizando figuras cerradas, redondas u ovaladas llamadas diagramas de Venn.

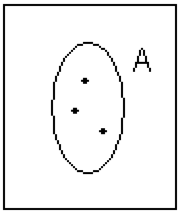


Fig. 2

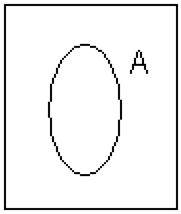


Fig. 3

Los elementos del conjunto están representados por puntos interiores como en el caso de la figura 2; los que no pertenecen, `por puntos exteriores; sin embargo a veces es más cómodo dibujar solamente la curva, sobreentendiendo que los elementos del conjunto están dentro del recinto enmarcado por la línea cerrada (figura 3).

Distinción entre pertenencia e inclusión

Mediante un ejemplo aclararemos la distinción entre pertenencia e inclusión ya que con alguna frecuencia el estudiante que se inicia en el estudio de los conjuntos tiene confusiones. Tomaremos una parte P del plano y dibujaremos en ella un segmento de recta y un punto sobre el segmento. Tanto el segmento S como P son conjuntos de puntos.

Tendremos entonces que :

$$a \in S \text{ y } a \in P$$

$S \subseteq P$ ó, más estrictamente, $S \subset P$

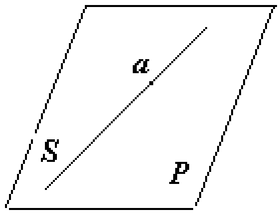


Fig. 4

Si A = {a, b, c}, entonces $a \in A$ y $\{a\} \subseteq A$. La afirmación $\{b\} \in A$ es falsa, ya que el objeto {b} no está en A, lo que es cierto es $b \in A$.
Si B = {1, 2, {2}, 3, 4}, entonces $\{2\} \in B$ y $\{\{2\}\} \subseteq B$, pero $\{3\} \notin B$. Lo que es correcto es $\{3\} \subseteq B$, debido a que $3 \in B$.

En general, **si $x \in A$, entonces $\{x\} \subseteq A$**

La relación entre objeto (elemento) y conjunto es de pertenencia; mientras que la relación entre conjuntos es de inclusión.

Observe que si $B = \{1, 2, \{2\}, 3, 4\}$, las afirmaciones $2 \in B$ y $\{2\} \in B$ son ciertas.

Discuta acerca de la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones :
$\{2\} \subseteq \{\{2\}\} \subseteq B$, $\{1, \{2\}\} \subseteq B$ y $\{\{1\}, \{2\}\} \subseteq B$

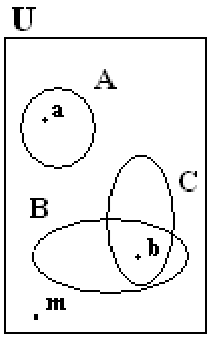


Fig. 5

De la figura 5 expresamos que

$A \subset U$	$B \subset U$	$C \subset U$
$a \in A$	$a \notin B$	$a \notin C$
$b \notin A$	$b \in B$	$b \in C$
$m \notin A$	$m \notin B$	$m \notin C$

Una idea básica para el desarrollo de la teoría de Conjuntos

Una de las ideas intuitivas de la teoría de conjuntos es que a cada propiedad le corresponde un conjunto: el conjunto de los elementos que tienen esa propiedad. Haremos uso de esta propiedad teniendo en cuenta ciertas restricciones a fin de no caer en contradicciones.

Así pues a cada propiedad p(x) le corresponde "el conjunto de las x tales que p(x), conjunto que notaremos $\{x / p(x)\}$. El conjunto $\{x / p(x) \wedge x \in A\}$ lo escribimos más simplemente $\{x \in A / p(x)\}$.

Una idea básica es que

" $y \in \{x \in A / p(x)\} \Leftrightarrow p(y)$ "

Ejemplo: sea p(x): x es un número primo positivo menor que 8. Entonces a p(x) le corresponde el conjunto $\{2, 3, 5, 7\}$. Se ve que $5 \in \{x \in Z / p(x)\}$. Debido a que 5 es un número primo positivo menor que 8, se cumple p(5).

De igual manera podemos decir que 6 no pertenece a este conjunto porque 6 no es primo. Otro tanto podemos decir del número 11 que, aunque es número primo, no pertenece al conjunto, puesto que no es menor que 8.

CONJUNTO VACÍO

1.5 Definición: Se llama **conjunto vacío** al conjunto $\{\mathbf{x} / \mathbf{x} \neq \mathbf{x}\}$.

El conjunto vacío no puede tener elementos. Dicho conjunto lo notamos por $\varnothing$.

Consecuencias de la definición de conjunto vacío.

Como primera consecuencia de la definición de conjunto vacío tenemos la siguiente proposición :

1.6 Proposición: **(i)** El conjunto vacío no tiene elementos.
(ii) Si A es un conjunto distinto de vacío, entonces A tiene al menos un elemento.

Demostración de (i)

Para llevar a efecto esta demostración es necesario primero traducir la proposición al lenguaje lógico de la Teoría de Conjuntos, lo cual logramos mediante las siguientes traducciones:

A tiene elementos $\Leftrightarrow$ hay elementos en A
$\Leftrightarrow \exists\, x : x \in A$

A no tiene elementos $\Leftrightarrow \neg(\exists\, x : x \in A)$
$\Leftrightarrow (\forall x) : \neg(x \in A)$
$\Leftrightarrow x \notin A, \forall x$

Entonces, en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos, la proposición “A no tiene elementos” se traduce por $x \notin A$, para cualquier conjunto A. Por lo tanto, la proposición “Vacío no tiene elementos” se traduce al lenguaje de la Teoría de Conjuntos como $x \notin \varnothing$. El cuantificador universal queda implícito.

Con estos elementos de lenguaje podemos ahora traducir la proposición 1.6 al lenguaje lógico y de la teoría de conjuntos de la siguiente manera :

1.6 Proposición : (i) $x \notin \varnothing$

(ii) $A \neq \varnothing \Rightarrow \exists x \in A$

Expresada la proposición en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos, podemos proceder a su demostración:

ELD

Demostrar $x \notin \varnothing$

Por RAA

(1)	$x \in \varnothing$	P
(2)	$x \neq x$	traducción de 1
(3)	$x \notin \varnothing$	RRA 1,2

Ahora esta demostración, mediante el ELD, la vertimos al lenguaje formal de la Teoría de Conjuntos.

(1) Supongamos lo contrario; es decir que $x \in \varnothing$. **(2)** Por definición de conjunto vacío, esto quiere decir que $x \neq x$; pero esto es una contradicción. **(3)** Por lo tanto $x \notin \varnothing$.

Demostración sin la ayuda del ELD:

Supongamos lo contrario, es decir, $x \in \varnothing$. Por definición de conjunto vacío, $x \neq x$. Pero esto es una contradicción, luego $x \notin \varnothing$.

Demostración de (ii)

ELD

Demostrar $A \neq \varnothing \Rightarrow \exists x \in A$

(1)	$\mathbf{A \neq \varnothing}$	P
(2)	$(\exists x : x \in A \wedge x \notin \varnothing) \vee (\exists x : x \in \varnothing \wedge x \notin A)$	(1)
(3)	$\rceil(\exists x \in \varnothing \wedge x \notin A)$	P 1.6 (i)
(4)	$\exists x : x \in A \wedge x \notin \varnothing$	TP2,3
(5)	$\exists x : x \in A$	S 4
(6)	$A \neq \varnothing \Rightarrow \exists x \in A$	CP 1,5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Si $A \neq \varnothing$, **(2)** o existe un $x \in A$ pero $x \notin \varnothing$ o existe un $x \in \varnothing$ pero $x \notin A$. **(3) (4)** Lo segundo es imposible por (i) y **(5) (6) (7)** lo primero implica $x \in A$

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Si $A \neq \varnothing$, o existe un $x \in A$ pero $x \notin \varnothing$ o existe un $x \in \varnothing$ pero $x \notin A$. Lo segundo es imposible por (i) y lo primero implica $x \in A$.

Proposición 1.7 $\varnothing \subseteq A$

Esta proposición quiere decir que el conjunto vacío está contenido en todo conjunto.

Demostración :

ELD

Demostrar $\varnothing \subseteq A$

Por RAA

(1)	$\neg(\varnothing \subseteq A)$	P
(2)	$\exists x: x \in \varnothing \wedge x \notin A$	traducción de 1
(3)	$x \in \varnothing$	S 2
(4)	$x \notin \varnothing$	P 1.6 (i)
(5)	$x \in \varnothing \wedge x \notin \varnothing$	A 3,4
(6)	$\varnothing \subseteq A$	RAA 1,5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Supongamos lo contrario, es decir, $\varnothing$ no está contenido en A; **(2)** esto quiere decir que existe un x tal que $x \in \varnothing$ y $x \notin A$; **(3)** **(4)** **(5)** pero esto contradice el teorema 1.6 (i) que establece que $x \notin \varnothing$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario, es decir, $\varnothing$ no está contenido en A. Entonces existe un x tal que $x \in \varnothing$ y $x \notin A$; pero esto contradice el teorema 1.6 (i) que establece que $x \notin \varnothing$.

Esta proposición dice que el vacío es subconjunto de todo conjunto. Téngase presente que el vacío no es elemento de todo conjunto. Debido a la propiedad 1.4 (ii), cada vez que nos pidan demostrar que algún conjunto A es vacío, es suficiente demostrar $A \subseteq \varnothing$.

Ejercicios 1.1

Diremos que un conjunto A es subconjunto propio de un conjunto B y escribimos $A \subset B$ si $A \subseteq B$, pero $A \neq B$. El concepto de subconjunto propio coincide más con el concepto intuitivo de “ parte de una colección”.

1. Demuestre que el único conjunto que no tiene algún subconjunto propio es $\emptyset$ (Hay dos casos por demostrar!).
2. Demostrar el teorema 1.4 (iii)
3. Demostrar la proposición .
4. Demostrar que hay solamente un conjunto vacío.
5. De ejemplos de conjuntos Ay B tales que A $\in$ B y A $\subseteq$ B.

1. CONSTRUCCIONES UNITARIAS

1.8 Definición : Llamaremos singulete de a al conjunto $\{x / x = a\}$, el cual abreviaremos **{a}.**

O sea que **{a}** es el conjunto cuyo único elemento es **a.**

En muchas ocasiones es necesario en nuestro estudio considerar conjuntos cuyos elementos son a su vez conjuntos. Así por ejemplo dentro del conjunto U de todas las figuras geométricas, podemos considerar el conjunto de los triángulos que a su vez podemos considerarlos como conjuntos de puntos.

En particular podemos formar el conjunto que tiene como elementos exactamente todos los subconjuntos de un conjunto A. A este nuevo conjunto se le llama conjunto de partes de A o también conjunto potencia.

Definimos entonces el conjunto potencia o de partes de un conjunto dado A como el conjunto de todos los subconjuntos de A y lo representamos por P(A).

1.9 Definición: Llamaremos conjunto de partes de A al conjunto

$$\mathbf{P(A) = \{ X / X \subseteq A\}}$$

En términos del lenguaje corriente, P(A), llamado el conjunto de partes de A, es el conjunto de todos los subconjuntos de A.

La expresión X$\in$ P(A) también se puede leer ‘X es una parte de A’.

Decir que X es una parte de A es lo mismo que decir que X es subconjunto de A.

Simbólicamente,

$$X\in P(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$$

La expresión $X \subseteq A$ también quiere decir que X es una parte de A. Es importante tener bien presente esta caracterización de los elementos de P(A). No olvidemos que los elementos de P(A) son conjuntos.

EJEMPLO. Sea $A = \{a, b\}$. Entonces $P(A) = \{\emptyset, \{a,\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Consecuencias de la definición de conjunto de partes de un conjunto.

Proposición **(i)** $\emptyset\in P(A)$
(ii) $A\in P(A)$
(iii) $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Demostración de (i) y (ii):

ELD (i)

Demostrar $\emptyset\in P(A)$

Traducción $\emptyset \subseteq A$

(1)	$\emptyset \subseteq A$	P 1.7
(2)	$\emptyset\in P(A)$	traducción de 1

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) La proposición 1.7 afirma que $\emptyset \subseteq A$. **(2)** Por la definición 1.9, esto quiere decir que $\emptyset\in P(A)$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

La proposición 1.7 afirma que $\emptyset \subseteq A$. Por la definición 1.9, esto quiere decir que $\emptyset\in P(A)$.

La misma forma de argumentar se utiliza para demostrar (ii) usando 1.4 (i)

ELD (ii)

Demostrar $A\in P(A)$

Traducción $A \subseteq A$

(1)	$A \subseteq A$	P 1.4 (i)
(2)	$A\in P(A)$	traducción de 1

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Según la proposición 1.4 (i), $A \subseteq A$. **(2)** Pero esto significa que $A \in P(A)$, de acuerdo a la definición 1.9.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Según la proposición 1.4 (i), $A \subseteq A$. Pero esto significa que $A \in P(A)$, de acuerdo a la definición 1.9.

Demostración de (iii) **ELD**

Demostrar: $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$

Traducción $P(\varnothing) \subseteq \{\varnothing\} \wedge \{\varnothing\} \subseteq P(\varnothing)$

(1)		**P**

ELD 1

Demostrar $P(\varnothing) \subseteq \{\varnothing\}$

Traducción $X \in P(\varnothing) \Rightarrow X \in \{\varnothing\}$

(1)	$X \in P(\varnothing)$	P
(2)	$X \subseteq \varnothing$	Traducción 1
(3)	$X = \varnothing$	(2)
(4)	$X \in \{\varnothing\}$	traducción 3
(5)	$X \in P(\varnothing) \Rightarrow X \in \{\varnothing\}$	CP 1,4

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Sea $X \in P(\varnothing)$.**(2)** Esto quiere decir que $X \subseteq \varnothing$. **(3)** Por 1.6 (i) $X = \varnothing$, **(4)** o sea , $X \in \{\varnothing\}$. **(5)** Por lo tanto $P(\varnothing) \subseteq \{\varnothing\}$

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $X \in P(\varnothing)$. Esto quiere decir que $X \subseteq \varnothing$. Por 1.6 (i) $X = \varnothing$, o sea, $X \in \{\varnothing\}$. Por lo tanto $P(\varnothing) \subseteq \{\varnothing\}$

ELD 2

Demostrar $\{\varnothing\} \subseteq P(\varnothing)$

(1)	$\varnothing \subseteq \varnothing$	**P**
(2)	$\varnothing \in P(\varnothing)$	Traducción 1
(3)	$\{\varnothing\} \subseteq P(\varnothing)$	Traducción 2

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) $\varnothing \subseteq \varnothing$. **(2)** Por 1.9, $\varnothing \in P(\varnothing)$. **(3)** De donde $\{\varnothing\} \subseteq P(\varnothing)$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

$\emptyset \subseteq \emptyset$. Por 1.9, $\emptyset \in P(\emptyset)$. De donde $\{\emptyset\} \subseteq P(\emptyset)$.

Es importante que el lector no confunda $\emptyset$ con $\{\emptyset\}$ (en general, A con $\{A\}$). Una cosa es un talego vacío y otra es un talego con un talego vacío por dentro y por lo tanto no vacío.

¿Cuántas partes tiene un conjunto?

Surge ahora la pregunta : ¿ Cuantas partes tiene un conjunto? Analicemos algunos casos particulares.

Supongamos que A es vacío, entonces $P(A) = \{\emptyset\}$, el cual es un conjunto que tiene un elemento a saber $\emptyset$. Entonces $\emptyset \in P(\emptyset)$

Si $A = \{ a \}$, entonces $P(A) = \{\emptyset, A\}$ ya que $\emptyset$ es subconjunto de todo conjunto y $A \subseteq A$. Luego $\emptyset \in P(A)$ y $A \in P(A)$. Concluimos entonces que si A es un conjunto de un solo elemento, entonces P(A) tiene dos elementos.

Si $A = \{a, b\}$, entonces A tiene cuatro subconjuntos a saber : $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ y el mismo A. Por lo tanto $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$

Si $A = \{a, b,c\}$, entonces A tiene ocho subconjuntos a saber :

$\emptyset$, $\{a,\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, y A y
$P(A) = \{\emptyset, \{a,\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$

Veamos ahora finalmente que la manera de deducir intuitivamente una fórmula que nos diga cuántos subconjuntos o partes tiene un conjunto (finito) de n elementos.

Sea $B = \{a, b, c, d\}$ y escribamos sus subconjuntos de manera que podamos comprobarlos con los subconjuntos del conjunto $A = \{a, b, c\}$.

Asì : a) $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$
b) $\{d\}$, $\{a, d\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, B

Tomando a) y b) juntos obtenemos todos los subconjuntos de B, donde a) coincide con las partes de A y b) se obtiene agregando a cada subconjunto de a) el elemento d. Observemos que los conjuntos b) son diferentes de los de a) ya que difieren en el elemento d y son diferentes entre sí.

Un subconjunto de B está en a) o en b). P(B) tiene entonces el doble de elementos de P(A). Finalmente observamos que si A = $\emptyset$, entonces P(A) tiene un elemento. Si A = {a}, P(A) tiene dos elementos. Si A = {a, b}, P(A) tiene cuatro elementos, es decir que si se aumenta un conjunto en un elemento el número de elementos del conjunto de partes se duplica.

Si A tiene tres elementos P(A) tiene $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ elementos. Si A tiene cuatro elementos, P(A) tiene $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$ elementos. Si A tiene n elementos, entonces P(A) tiene 2^n elementos.

Ejercicios 1.2

1. Encontrar $PP\emptyset$ y $PPP\emptyset$ (Asuma que ya sabemos qué es {a, b})
2. $A \subseteq B \Leftrightarrow PA \subseteq PB$
3. $A = B \Leftrightarrow PA = PB$
4. Si A tiene n elementos (n un natural), cuántos elementos tiene PA?

3. INTERSECCIONES, UNIONES Y DIFERENCIAS

1.11 Definición **(i)** $\mathbf{A \cap B = \{ x \ / \ x \in A \wedge x \in B \}}$

(ii) $\mathbf{A \cup B = \{ x \ / \ x \in A \vee x \in B \}}$

Estos dos conjuntos los llamaremos respectivamente *la intersección* y *la unión* de A y B y los visualizaremos de la siguiente manera :

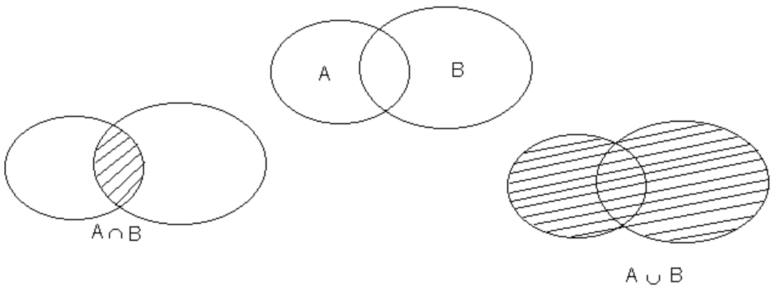


Fig. 2

La intersección de los conjuntos A y B, representada por $A \cap B$, está constituida por los elementos que pertenecen a la vez a A y a B. Esta idea básica de la Teoría de Conjuntos se expresa por la equivalencia

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

que nos da la caracterización de los elementos de la intersección de los conjuntos A y B.

En la expresión 'Luis canta y baila', Luis, como elemento, pertenece tanto al conjunto de los que cantan como al conjunto de los que bailan. Así que, en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos, se puede hacer la siguiente traducción:

$$\text{Luis canta y baila} \quad \leftrightarrow \quad l \in C \wedge l \in B;$$

donde C es el conjunto de los que cantan y B es el conjunto de los que bailan.

Otro ejemplo: Sean

$$P = \{x \,/\, x \text{ es número par}\}$$
$$Q = \{x \,/\, x \text{ es número primo}\}$$

Entonces se tiene la siguiente traducción:

$$x \in P \cap Q \Leftrightarrow x \text{ es número par y primo.}$$

En particular

$$2 \in P \cap Q \Leftrightarrow 2 \text{ es par y primo al mismo tiempo.}$$

Como 2 es el único número que satisface estas dos propiedades, se tiene que $P \cap Q = \{2\}$

Conjuntos disjuntos o desunidos

Si la intersección $A \cap B$ es el conjunto vacío, decimos que los conjuntos A y B son disjuntos o desunidos.

Una consecuencia de $A \cap B = \varnothing$, o sea de que A y B sean disjuntos, es que si, por ejemplo, un elemento está en A, dicho elemento no está en B; o si está en B, no está en A. Estas ideas se traducen al lenguaje lógico y de la Teoría de Conjuntos de la siguiente manera:

$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow [(x \in A \Rightarrow x \notin B) \vee (x \in B \Rightarrow x \notin A)$
$\Leftrightarrow$ Si x está en un conjunto, no puede estar en el otro.

Ejemplo: Son disjuntos los conjuntos

$A = \{x \,/\, x \text{ es número par}\}$
$B = \{x \,/\, x \text{ es número impar}\}$

Caracterización de los elementos de A y B.

$x \in A \Leftrightarrow$ x es número par
$x \in B \Leftrightarrow$ x es número impar

Veamos que A y B son disjuntos: Si $x \in A$, es decir, si x es par, entonces x no es impar, o sea, $x \notin B$. De igual manera, si $x \in B$, es decir, x es impar, entonces x no es par, o sea, $x \notin A$.

La unión de los conjuntos A y B, representada por $A \cup B$, está constituida por el conjunto de los elementos que pertenecen a A, a B o a ambos.
Simbólicamente:

$$\mathbf{x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B}$$

La frase Luis es periodista o fotógrafo se pede traducir al lenguaje de la Teoría de Conjuntos de la siguiente manera:

Luis es periodista o Fotógrafo $\Leftrightarrow$ $l \in P \vee l \in F$;

donde P representa el conjunto de los periodistas y F el conjunto de los fotógrafos.

Consecuencias de las operaciones de unión e intersección

1.12 Proposición (i) $A \cap A = A$
(ii) $A \cap B = B \cap A$
(iii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
(iv) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
(v) $A \cup A = A$
(vi) $A \cup B = B \cup A$
(vii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
(viii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Demostración de (i) **ELD**

Demostrar $A \cap A = A$

Traducción $x \in A \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in A$

Pero $x \in A \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in A$ es una tautología de la forma $p \wedge p \Leftrightarrow p$

Demostración de (iii)

ELD

Demostrar $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Traducción $x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cap B) \cap C &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \in C \quad \text{def. de } \cap \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \quad \text{def. de } \cap \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \quad \text{propiedad asociativa de la } \wedge \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cap C) \quad \text{def. de } \cap \\
&\Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C) \quad \text{def. de } \cap
\end{aligned}
$$

La demostración de las demás partes del teorema las dejamos como ejercicio.

Sugerencia: A cada una le corresponde una tautología; por ejemplo, a la parte (viii) le corresponde la tautología $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Nota: Las propiedades enunciadas en 1.12 se llaman respectivamente: " de idempotencia", "conmutativa", "asociativa" y "distributiva" para la intersección y para la unión. Las propiedades asociativas permiten escribir: $A \cap B \cap C$ y $A \cup B \cup C$ sin ambigüedades. La propiedad (viii) la podríamos visualizar de la siguiente manera:

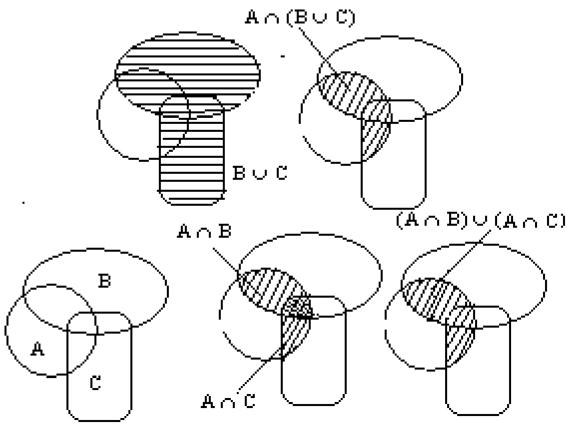


Fig. 3

1.13 Proposición **(i)** $A \cap B \subseteq A \;\wedge\; A \cap B \subseteq B$
(ii) $A \subseteq A \cup B \wedge\; B \subseteq A \cup B$

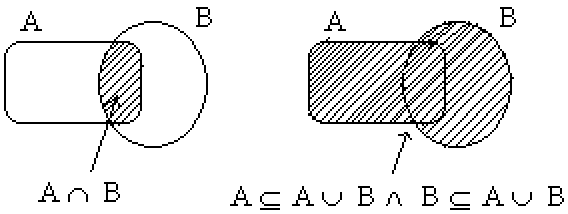
Demostración de (i)

ELD

Demostrar $A \cap B \subseteq A$

Traducción $x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A$

(1)	$x \in (A \cap B)$	**P**
(2)	$x \in A \wedge x \in B$	Traducción (1)
(3)	$x \in A$	S 2
(4)	$x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A$	CP1,4
(5)	$A \cap B \subseteq A$	Traducción (4)



Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Sea $x \in (A \cap B)$. **(2)** Por definición de intersección $x \in A$ y $x \in B$. **(3)** En particular $x \in A$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $x \in (A \cap B)$. Por definición de intersección $x \in A$ y $x \in B$. En particular $x \in A$.

1.14 Proposición **(i)** $A \subseteq B$
$\Leftrightarrow$ **(ii)** $A \cap B = A$
$\Leftrightarrow$ **(iii)** $A \cup B = B$

Demostración:

Frecuentemente se presenta en matemática teoremas de la forma:

$$p_1 \Leftrightarrow p_2 \;\Leftrightarrow\; \ldots \Leftrightarrow p_n$$

Para demostrar estas equivalencias es suficiente demostrar:

$$p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \;\ldots \Rightarrow p_n \Rightarrow p_1$$

Así lo haremos en este teorema.

Demostración de (i) $\Rightarrow$ (ii)

ELD

Demostrar $A \cap B = A$

Traducción $A \cap B \subseteq A \ \wedge \ A \subseteq A \cap B$

(1)	**$A \subseteq B$**	**P**

Este ELD incluye dos demostraciones:

ELD 1

Demostrar $A \cap B \subseteq A$

Traducción $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$

(1)	**$A \subseteq B$**	**P**
(2)	$x \in A \cap B$	P
(3)	$x \in A \wedge x \in B$	Traducción 2
(4)	$x \in A$	S3
(5)	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$	CP 1,4
(6)	$A \cap B \subseteq A$	Traducción de 5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) Sea $x \in A \cap B$. **(3)** Por definición de intersección $x \in A$ y $x \in B$. **(4)** En particular $x \in A$. **(5)** **(6)** Por lo tanto $A \cap B \subseteq A$

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $x \in A \cap B$. Por definición de intersección $x \in A$ y $x \in B$. En particular $x \in A$. Por lo tanto $A \cap B \subseteq A$

Observemos que en esta demostración no se necesitó de la hipótesis $A \subseteq B$.

ELD 2

Demostrar $A \subseteq A \cap B$

Traducción $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$

(1)	**$A \subseteq B$**	**P**
(2)	$x \in A$	P
(3)	$x \in B$	1, 2
(4)	$x \in A \wedge x \in B$	A 2,3

(5)	$x \in A \cap B$	Traducción 4
(6)	$x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$	CP 2,5
(7)	$A \subseteq A \cap B$	Traducción (6)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) Sea $x \in A$. **(3)** $x \in B$ ya que por hipótesis $A \subseteq B$. **(4)** Entonces tenemos que $x \in A$ y $x \in B$. **(5)** Es decir que $x \in A \cap B$. **(6)** **(7)** Por lo tanto $A \subseteq A \cap B$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $x \in A$. $x \in B$ ya que por hipótesis $A \subseteq B$. Entonces tenemos que $x \in A$ y $x \in B$. Es decir que $x \in A \cap B$. Por lo tanto $A \subseteq A \cap B$.

Demostración de (ii) $\Rightarrow$ (iii): Solamente hay que demostrar que $A \cup B \subseteq B$ ya que por 1,13 (ii) $B \subseteq A \cup B$. Entonces

ELD

Demostrar $A \cup B \subseteq B$

Traducción $x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$

(1)	$\mathbf{A \cap B = A}$	**P**
(2)	$x \in A \cup B$	P
(3)	$x \in A \vee x \in B$	Traducción 2
(4)	$x \in A \cap B \vee x \in B$	I 1,3
(5)	$(x \in A \wedge x \in B) \vee x \in B$	Traducción 4
(6)	$x \in B \vee x \in B$	S5 (primer miembro)
(7)	$x \in B$	DP 6
(8)	$x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$	CP 2,7
(9)	$A \cup B \subseteq B$	Traducción 8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) Sea $x \in A \cup B$. **(3)** Entonces $x \in A$ o $x \in B$. **(4)** Por hipótesis $A \cap B = A$, entonces la anterior disjunción queda $x \in A \cap B$ o $x \in B$. **(5)** O sea $(x \in A \wedge x \in B) \vee x \in B$. **(6)** Simplificando el primer miembro de esta disjunción se obtiene $x \in B \vee x \in B$, **(7)** es decir $x \in B$. **(8)** **(9)** Por lo tanto $A \cup B \subseteq B$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $x \in A \cup B$. Entonces $x \in A$ o $x \in B$. Por hipótesis $A \cap B = A$, entonces la anterior disjunción queda $x \in A \cap B$ o $x \in B$. O sea $(x \in A \wedge x \in B) \vee x \in B$.

Simplificando el primer miembro de esta disjunción se obtiene $x \in B$ o $x \in B$, es decir $x \in B$. Por lo tanto $A \cup B \subseteq B$.

Demostración de (iii) $\Rightarrow$ (i), o sea, $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$

ELD

Demostrar $A \subseteq B$

Traducción $x \in A \Rightarrow x \in B$

(1)	**$A \cup B = B$**	**P**
(2)	$x \in A$	P
(3)	$x \in A \cup B$	1.13 (ii)
(4)	$x \in B$	I 3,1
(5)	$x \in A \Rightarrow x \in B$	CP 2,4
(6)	$A \subseteq B$	Traducción 5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) Sea $x \in A$. **(3)** Entonces $x \in A \cup B$ por 1.13 (ii). **(4)** Por hipótesis $A \cup B = B$; **(5)** luego, $x \in B$. **(6) (7)** Por lo tanto $A \subseteq B$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $x \in A$. Entonces $x \in A \cup B$ por 1.13 (ii). Por hipótesis $A \cup B = B$; luego, $x \in B$. Por lo tanto $A \subseteq B$.

Proposición 1.15 **(i) $A \cap \varnothing = \varnothing$ (ii) $A \cup \varnothing = A$**

Demostración de (i):

ELD

Demostrar $A \cap \varnothing = \varnothing$

(1)	$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$	**P** (1.14)
(2)	$\varnothing \subseteq A \Rightarrow \varnothing \cap A = \varnothing$	$\varnothing$/A, A/B (1)
(3)	$\varnothing \subseteq A$	1.7
(4)	$\varnothing \cap A = \varnothing$	PP 2,3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) (2) (3) (4) Inmediato del hecho de que $\varnothing \subseteq A$ y por 1.14 .

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Inmediato del hecho de que $\varnothing \subseteq A$ y por 1.14 .

Similarmente para (ii).

Queremos ahora hablar de los elementos que están en A que no están en B.

1.16 Definición : La diferencia de A y B es el conjunto

$$A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$$

La diferencia de los conjuntos A y B, representada por A − B, está constituida por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.
Simbólicamente:

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

Ejemplo : Sean $P = \{\, x \,/\, x$ es triángulo$\}$
$Q = \{\, x \,/\, x$ es triángulo equilátero$\}$

$x \in P \Leftrightarrow x$ es triángulo
$x \in Q \Leftrightarrow x$ es triángulo equilátero

$x \in (P - Q) \Leftrightarrow x \in P \wedge x \notin Q$
$\Leftrightarrow$ x es triángulo $\wedge$ x es triángulo no equilà – tero
$\Leftrightarrow$ x es triángulo no equilátero

Por lo tanto, la diferencia entre P y Q es el conjunto

$$P - Q = \{\, x \,/\, x \text{ es triángulo no equilátero}\},$$

y en P – Q están todas las figuras geométricas que son triángulos no equiláteros.

Representamos gráficamente la diferencia entre los conjuntos A y B por el área sombreada en la figura 6

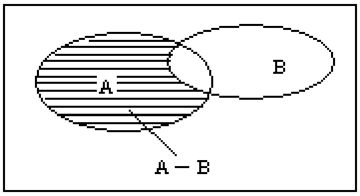


Fig. 6

Es claro que en general $A - B \neq B - A$

También $(A - B) - C \neq A - (B - C)$. Puede el lector dar ejemplos que ilustren esto?

Consecuencias de la diferencia entre conjuntos

1.17 Proposición **(i)** $\mathbf{A - B \subseteq A}$
(ii) $\mathbf{A \subseteq B \Rightarrow A - B = \varnothing}$

(iii) $\mathbf{A - A = \varnothing}$

(iv) $\mathbf{A \cap B = \varnothing \Rightarrow A - B = A}$
(v) $\mathbf{A - \varnothing = A}$

Demostración de (ii):

ELD
Demostrar $\mathbf{A - B = \varnothing}$
Por RAA

(1)	$\mathbf{A \subseteq B}$	**P**
(2)	$A - B \neq \varnothing$	P
(3)	$\exists x : x \in A - B$	traducción (2)
(4)	$x \in A \wedge x \notin B$	traducción (3)
(5)	$x \in A$	S(4)
(6)	$x \in B$	(5),(1)
(7)	$x \notin B$	S(4)
(8)	$x \in B \wedge x \notin B$	A(6)(7)
□ (9)	$A - B = \varnothing$	RAA(2)(8)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) Supongamos lo contrario, esto es, $A - B \neq \varnothing$. **(3)(4)** Entonces, por 1.6 (ii), existe un x tal que $x \in A - B$, o sea, $x \in A$ y $x \notin B$. **(5)** En particular $x \in A$; **(6)** Esto implica que $x \in B$ debido a que por hipótesis $A \subseteq B$. **(7)(8)** Pero esto contradice que $x \notin B$. **(9)** Por lo tanto $A - B = \varnothing$ □

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario, esto es, $A - B \neq \varnothing$. Entonces, por 1.6 (ii), existe un x tal que $x \in A - B$, o sea, $x \in A$ y $x \notin B$. En particular $x \in A$; Esto implica que $x \in B$ debido a que por hipótesis $A \subseteq B$. Pero esto contradice que $x \notin B$. Por lo tanto $A - B = \varnothing$ □

Demostración de (iii) :

ELD

Demostrar A – A = ∅

(1)	$A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$	**P** 1.17 (ii)
(2)	$A \subseteq A \Rightarrow A - A = \emptyset$	A/B (1)
(3)	$A \subseteq A$	P
(4)	$A - A = \emptyset$	PP 2,3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) (2) (3) (4) Como $A \subseteq A$ entonces $A - A = \emptyset$ por 1.17 (ii). □

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Como $A \subseteq A$ entonces $A - A = \emptyset$ por (ii). □

Otra demostración de (iii) :

ELD

Demostrar A – A = ∅

Por RAA

(1)	$A - A \neq \emptyset$	**P**
(2)	$\exists x : x \in A - A$	(1), 1.6 (ii)
(3)	$x \in A \wedge x \notin A$	traducción 2
□ (4)	$A - A = \emptyset$	RAA 1,3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Supongamos lo contrario; o sea $A - A \neq \emptyset$.**(2)** Por 1.6 (ii) existe un x : $x \in A - A$. **(3)** Esto quiere decir que $x \in A \wedge x \notin A$. Pero esto es una contradicción. **(4)** Por lo tanto, $A - A = \emptyset$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario; o sea, $A - A \neq \emptyset$. Por 1.6 (ii) existe un x tal que $x \in A - A$. Esto quiere decir que $x \in A \wedge x \notin A$, por definición de diferencia de conjuntos. Pero esto es una contradicción. Por lo tanto, $A - A = \emptyset$.

Demostración de (iv). Hay que demostrar que el siguiente razonamiento es vàlido:

(1)	$A \cap B = \emptyset$	P
▹	$A - B = A$	conclusión

ELD

Demostrar A – B = A

Traducción $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$

	(1)	$\mathbf{A \cap B = \varnothing}$	**P**
	(2)	$x \in A - B$	P
	(3)	$x \in A \wedge x \notin B$	Trad.2 def. de $A - B$
	(4)	$x \in A$	S3
$\square_1$	(5)	$x \in A - B \Rightarrow x \in A$	CP 2,4
	(6)	$x \in A$	P
	(7)	$x \notin B$	(6), (1)
	(8)	$x \in A \wedge x \notin B$	A 6,7
	(9)	$x \in A - B$	Trad.8 def. de $A - B$
$\square_2$	(10)	$x \in A \Rightarrow x \in A - B$	CP 6,9
	(11)	$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$	LB 5,10
$\square$	(12)	$A - B = A$	Trad.11 def. = de conjuntos

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $A - B = A$.
(2) Sea $x \in A - B$. **(3)**Entonces $x \in A$ y $x \notin B$. **(4)** En particular $x \in A$. **(5)**Luego,

$$x \in A - B \Rightarrow x \in A . \quad (\text{I})$$

(6) Sea ahora $x \in A$. **(7)** Como $A \cap B = \varnothing$ (hipótesis), $x \notin B$. **(8)** **(9)**Entonces $x \in A \wedge x \notin B$, es decir $x \in A - B$.
(10) Luego

$$x \in A \Rightarrow x \in A - B. \quad (\text{II})$$

(11) De (I) y (II) se tiene $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$ **(12)** o sea $A - B = A$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $A - B = A$.
Sea $x \in A - B$. Entonces $x \in A$ y $x \notin B$. En particular $x \in A$. Luego,

$$x \in A - B \Rightarrow x \in A . \quad (\text{I})$$

Sea ahora $x \in A$. Como $A \cap B = \varnothing$ (hipótesis), $x \notin B$. Entonces $x \in A \wedge x \notin B$
Es decir $x \in A - B$. Luego

$$x \in A \Rightarrow x \in A - B. \quad (\text{II})$$

De (I) y (II) se tiene $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$ o sea $A - B = A$.

Demostración de (v) **ELD**

Demostrar $A - \varnothing = A$

Traducción $x \in A - \varnothing \Leftrightarrow x \in A$

(1)	$x \in A - \varnothing$	P
(2)	$x \in A \wedge x \notin \varnothing$	Trad.2 def. de $A - B$
(3)	$x \in A$	S3
$\square_1$ (4)	$x \in A - \varnothing \Rightarrow x \in A$	CP 1,4
(5)	$x \in A$	P
(6)	$x \notin \varnothing$	1.6(i)
(7)	$x \in A \wedge x \notin \varnothing$	A 5,6
(8)	$x \in A - \varnothing$	Trad.7 def. de $A - B$
$\square_2$ (9)	$x \in A \Rightarrow x \in A - \varnothing$	CP 5,8
(10)	$x \in A - \varnothing \Leftrightarrow x \in A$	LB 4,9
$\square$ (11)	$A - \varnothing = A$	Trad.10 def. = de conjuntos

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $A - \varnothing = A$.
(1) Sea $x \in A - \varnothing$. **(2)**Entonces $x \in A$ y $x \notin \varnothing$. **(3)**En particular $x \in A$.
(4) Luego

$$x \in A - \varnothing \Rightarrow x \in A \text{ . (I)}$$

(5) Sea ahora $x \in A$.**(6)**Por1.6(i),$x \notin \varnothing$.**(7)** Entonces $x \in A \wedge x \notin \varnothing$ **(8)**o sea $x \in A - \varnothing$.**(9)** Luego

$$x \in A \Rightarrow x \in A - \varnothing. \quad \text{(II)}$$

(10) De (I) y (II), se tiene la equivalencia $x \in A - \varnothing \Leftrightarrow x \in A$ **(11)**Es decir $A - \varnothing = A$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $A - \varnothing = A$.
Sea $x \in A - \varnothing$. Entonces $x \in A$ y $x \notin \varnothing$. En particular $x \in A$.
Luego

$$x \in A - \varnothing \Rightarrow x \in A \text{ .} \quad \text{(I)}$$

Sea ahora $x \in A$. Por 1.6(i), $x \notin \varnothing$. Entonces $x \in A \wedge x \notin \varnothing$ o sea $x \in A - \varnothing$.
Luego,

$$x \in A \Rightarrow x \in A - \varnothing. \quad \text{(II)}$$

De (I) y (II) se tiene la equivalencia $x \in A - \varnothing \Leftrightarrow x \in A$ o sea $A - \varnothing = A$.

Conjunto referencial y complemento de un conjunto

Se supone la existencia de un gran conjunto, llamado conjunto universal U, al cual pertenece x (todos los objetos). Este conjunto puede variar de significado en cada caso; pero dada una situación particular, queda determinado durante el estudio de dicha situación.

Por ejemplo: Para un matemático, U puede ser en ciertos caso el conjunto de rectas; para un botánico, U puede ser en determinada situación el conjunto de plantas fanerógamas; para un gramático, U puede ser el conjunto de los predicados.

Debido a esta situación, resulta común que al conjunto universal se le llame también conjunto referencial.

Normalmente en matemática todos los conjuntos con que se trabajan en un determinado momento son subconjuntos de un conjunto fijo; por lo tanto, en este libro, se adoptará el término 'conjunto referencial' en lugar de conjunto universal.

En este contexto, escribiremos A' en lugar de E – A y a este conjunto lo llamaremos el complemento de A con respecto a E o simplemente el complemento de A, si no se presentan confusiones.

Caracterización de los elementos del complemento de A

$$x \in A' \leftrightarrow x \notin A$$

Para representar el conjunto universal empleamos un rectángulo (que omitiremos muchas veces) y dentro de él los conjuntos, como se ve en la figura 7

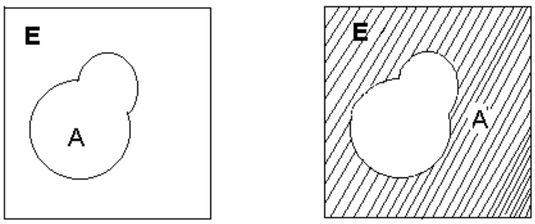


Fig.7

Consecuencias de la noción de complemento de un conjunto

1.18 Proposición

i) $A'' = A$
ii) $\varnothing' = E$
iii) $E' = \varnothing$
iv) $A \cap A' = \varnothing$
v) $A \cup A' = E$

Demostración de (i)

ELD

Demostrar $A'' = A$

Traducción $x \in A'' \Leftrightarrow x \in A$

$x \in A'' \Leftrightarrow x \notin A'$ def. de complemento
$\Leftrightarrow \neg(x \in A')$ traducción
$\Leftrightarrow \neg(x \notin A)$ def. de complemento
$\Leftrightarrow \neg(\neg(x \in A))$ traducción
$\Leftrightarrow x \in A$ DN

Demostración de (ii) :

ELD

Demostrar $\varnothing' = E$

	(1)	$A \cap B = \varnothing \Rightarrow A - B = A$	1.17 (iv)	P
	(2)	$E \cap \varnothing = \varnothing \Rightarrow E - \varnothing = E$		A/E, $\varnothing$/B (1)
	(3)	$E \cap \varnothing = \varnothing$		P
	(4)	$E - \varnothing = E$		pp(1)(2)
□	(5)	$\varnothing' = E$		traducción (4)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2)(3)(4)(5) $\varnothing' = E$ está implicado por 1.17 (iv), haciendo $A = E$, y, $B = \varnothing$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

$\varnothing' = E$ está implicado por 1.17 (iv), haciendo $A = E$, y, $B = \varnothing$. □

Para demostrar (iii) es suficiente demostrar que $E' \subseteq \varnothing$.

ELD

Demostrar $E' \subseteq \varnothing$

Por RAA

(1)	$\rceil(E' \subseteq \varnothing)$	P
(2)	$\exists x: x\in E' \wedge x\notin\varnothing$	traducción (1)
(3)	$\exists x: x \notin E \wedge x\in\varnothing'$	traducción (2)
(4)	$\varnothing' = E$	P 1.18(ii)
(5)	$\exists x: x \notin E \wedge x\in E$	I 3,4
□ (6)	$E' \subseteq \varnothing$	RAA 1,5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Supongamos lo contrario; **(2)**esto es, que existe $x\in E'$ y $x\notin\varnothing$, **(3)**es decir, $x \notin E$ y $x\in\varnothing'$. **(4)**Debido a que $\varnothing' = E$ por 1.18 (ii), **(5)** entonces tenemos que $x \notin E$ y $x\in E$, lo que evidentemente es una contradicción. **(6)** Asì que $E' \subseteq \varnothing$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario; entonces existe $x\in E'$ y $x\notin\varnothing$, es decir, $x \notin E$ y $x\in\varnothing'$. Debido a que $\varnothing' = E$ por 1.18 (ii), entonces tenemos que $x \notin E$ y $x\in E$, lo que evidentemente es una contradicción. Por lo tanto $E' \subseteq \varnothing$.

Nota : Esta demostración se puede desarrollar por otro camino. El lector puede traducir E', en la línea (3), como $E - E$, y llegar a la contradicción de que $x\in\varnothing$.

Demostración de (iv):

ELD

Demostrar $A \cap A' = \varnothing$

Por RAA

(1)	$A \cap A' \neq \varnothing$	P
(2)	$\exists x: x\in A \cap A'$	traducción (1)
(3)	$\exists x: x\in A \wedge x\in A'$	traducción (2)
(4)	$\exists x: x\in A \wedge x\notin A$	traducción (3)
□ (5)	$A \cap A' = \varnothing$	RAA (1),(4)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Supongamos lo contrario; es decir $A \cap A' \neq \varnothing$; **(2)** esto significa que existe un x tal que $x\in A \cap A'$,**(3)** lo que a su vez significa que $x\in A$ y $x\in A'$, **(4)** o sea que $x\in A$ y $x\notin A$; lo cual es una contradicción. **(5)** Por lo tanto $A \cap A' = \varnothing$. □

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario; es decir $A \cap A' \neq \emptyset$; esto significa que existe un x tal que $x \in A \cap A'$, lo que a su vez significa que $x \in A$ y $x \in A'$, es decir, $x \in A$ y $x \notin A$; lo cual es una contradicción. Por lo tanto $A \cap A' = \emptyset$. □

Demostración de (v): Es evidente que $A \cup A' \subseteq E$.
Demostremos que $E \subseteq A \cup A'$:

ELD

Demostrar $E \subseteq A \cup A'$

Traducción : $x \in E \Rightarrow A \cup A'$

(1)	$x \in E$	**P**
(2)	$x \in A \vee x \notin A$	(1)
(3)	$x \in A \vee x \in A'$	traducción 2
(4)	$x \in A \cup A'$	traducción 3
(5)	$x \in E \Rightarrow A \cup A'$	CP 1, 4
□ (6)	$E \subseteq A \cup A'$	traducción 5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $E \subseteq A \cup A'$.
(1) Sea $x \in E$. **(2)**Entonces $x \in A \vee x \notin A$, debido a que E es el conjunto referencial. **(3) (4)** O sea que $x \in A \cup A'$. **(5) (6)**Luego $E \subseteq A \cup A'$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $E \subseteq A \cup A'$.
Sea $x \in E$. Entonces $x \in A \vee x \notin A$, debido a que E es el conjunto referencial. Por lo tanto $x \in A \cup A'$. Luego $E \subseteq A \cup A'$.

Leyes de Morgan

1.19 Proposición **(i)** $(A \cap B)' = A' \cup B'$
(ii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Demostración de (i) :

ELD

Demostrar $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Traducción $x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow x \in (A' \cup B')$

$x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow \rceil (x \in A \cap B)$ def. de complemento

$\Leftrightarrow \rceil (x \in A \wedge x \in B)$ def. de intersección

$\Leftrightarrow \rceil (x \in A) \vee \rceil (x \in B)$ ley de Morgan para proposiciones

$\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$ traducción

$\Leftrightarrow x \in A' \vee x \in B'$ def. de complemento

$\Leftrightarrow x \in A' \cup B'$. □ def. de unión

Demostración de (ii) : Ejercicio.

Son muchas las proposiciones que se refieren a las operaciones expuestas en esta sección. Cuando queramos demostrarlas, debemos aprovechar lo ya demostrado. De lo contrario nos saldrán demostraciones cada vez más largas y por lo tanto poco claras.

Ejemplo : Demostrar $A \cap (A \cup B) = A$

Como $A \subseteq A \cup B$, (1.13 (ii)), entonces $A \cap (A \cup B) = A$ (1.14)

Otro ejemplo : Demostrar $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

$A \cup (A' \cap B) = (A \cup A') \cap (A \cup B)$ (1.12 (vii))

$= E \cap (A \cup B)$ (1.18(v))

$= A \cup B$. (1.14 (ii))

4. **ACTIVIDAD PRÁCTICA – PROCESO IMITATIVO**

Partes de un conjunto.

1. Dados los conjuntos $A = \{ x \ / \ x \in N, \ x \leq 8 \}$

$B = \{ x \ / \ x \in N, \ 4 \leq x \leq 7 \}$,
$C = \{ x \ / \ x \in N, \ 5 < x < 13 \}$,
$D = \{ x \ / \ x \in N, \ x < 8, x \text{ impar} \}$,
$E = \{ x \ / \ x \in N, \ x \text{ par}, \ x < 11 \}$,
$F = \{ x \ / \ x \in N, \ x \text{ par}, \ 5 < x \leq 10 \}$

Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones :

a. $D \subseteq B$ d. $F \subseteq C$ g. $E \subseteq A$
b. $B \subset A$ e. $F \subseteq E$ h. $D \subset A$
c. $B \subseteq E$ f. $F \subset A$

Además, demuestre o justifique sus respuestas.

Ejemplo1 : La proposición $F \subset A$ es falsa.

Justificación en lenguaje ordinario:

Debido a que $F = \{6, 8, 10\}$ y $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, se ve que F no está contenido en A, ya que, por ejemplo, $10 \in F$, y, $10 \notin A$.

Para desarrollar pensamiento formal y capacidad de abstracción, utilizaremos el ELD y el lenguaje formal para hacer esta demostración.

Justificamos esta respuesta, demostrando que su negación es verdadera :

ELD

Demostrar $\neg(F \subset A)$

Por RAA

(1)	**$x \in F \leftrightarrow$ x par, $5 < x \leq 10$**	**P**
(2)	**$x \in A \leftrightarrow x \in N,\ x \leq 8$**	**P**
(3)	$F \subset A$	P
(4)	$10 \in F$	(1)
(5)	$10 \in A$	(3)(4)
(6)	$10 \notin A$	(2)
(7)	$10 \in A \wedge 10 \notin A$	A(6),(5)
□ (8)	$\neg(F \subset A)$	RAA(3),(4)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(3) Sup ongamos que la proposición $F \subset A$ es verdadera. **(4)** Puesto que $10 \in F$,**(5)**$10 \in A$;**(6)** **(7)** pero esto contradice el hecho de que $10 \notin A$; **(8)** por lo tanto es falso que $F \subset A$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos que la proposición $F \subset A$ es verdadera. Puesto que $10 \in F$,$10 \in A$; pero esto contradice el hecho de que $10 \notin A$; por lo tanto es falso que $F \subset A$.

Ejemplo 2 : $B \subset A$ es verdadera.

Justificación : $B \subset A$ es verdadera porque $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ y $B = \{4,5,6,7\}$, claramente se ve que todos los elementos de B están en A.

Para desarrollar lenguaje formal, trabajaremos esta justificación por medio del ELD.

ELD

Demostrar $B \subset A$

Traducción $x \in B \Rightarrow x \in A, \forall x$

(1)	$\mathbf{x \in A \leftrightarrow x \in N,\ x \leq 8}$	**P**
(2)	$\mathbf{x \in B \leftrightarrow x \in N,\ 4 \leq x \leq 7}$	**P**
(3)	$x \in B$	P
(4)	$4 \leq x \leq 7$	traducción 3, 2
(5)	$x \leq 7$	S 4
(6)	$x \leq 8$	(5)
(7)	$x \in A$	(6),(1)
(8)	$x \in B \Rightarrow x \in A$	CP3,7
□ (9)	$B \subset A$	traducción 8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(3) Sea $x \in B$. **(4)** Esto significa que $4 \leq x \leq 7$. **(5)** En particular $x \leq 7$, **(6)** lo que implica que $x \leq 8$; **(7)**de donde $x \in A$. **(8)** **(9)**Por lo tanto $B \subset A$. □

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $x \in B$. Esto significa que $4 \leq x \leq 7$. En particular $x \leq 7$, lo que implica que $x \leq 8$; de donde $x \in A$. Por lo tanto $B \subset A$. □

2. Escribe todos los subconjuntos del conjunto $A = \{m, n, o, p\}$
3. ¿Cuántos subconjuntos propios tiene el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?
4. Dibuje un diagrama que ilustre las siguientes relaciones :

Si $M \subset N$ y $N \subseteq P$, entonces $M \subset P$

5. Si $A = \{a, b\}$, calcule :
   a) $P(A)$
   b) $PP(A)$
   c) $PPP(A)$

Distinción entre pertenencia e inclusión

1.. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

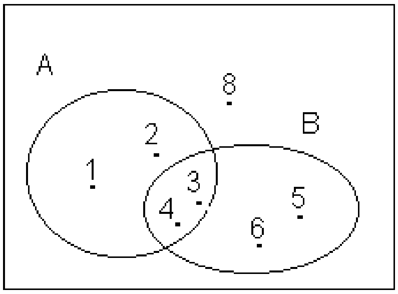
a) Si $a \in A$ y $B \subseteq A$, entonces $a \in B$
b) Si $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ y $D \subseteq C$, entonces $A \subseteq D$
c) Si $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $\{a, c\} \subseteq A$, $\{b, c\} \subseteq B$, entonces $C \subseteq A$ ó $C \subseteq B$

d) $N \subseteq N$, $N \subseteq Z$ y $Z \subseteq Q$
e) Si $a \in M$, $b \in N$, $M \subseteq P$ y $N \subseteq P$, entonces $\{a, b\} \subseteq P$.

2. Si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{3,4\}$, decir de las siguientes proposiciones si son verdaderas o falsas.

a)	$\{2\} \in P(A)$	__	g)	$(B - A) \in P(\{3,4\})$	__
b)	$\{3\} \in P(A) \cap P(B)$	__	h)	$A' \in P(A \cap B)$	__
c)	$\{1,2\} \in P(A) \cup P(B)$	__	i)	$P(A \cap B) \subseteq P(B)$	__
d)	$\{1,2\} \in P(A - B)$	__	j)	$\{1,4\} \in P(A \cap B)$	__
e)	$A \cap B \notin P(A \cap B)$	__	k)	$\{\varnothing\} \in P(A)$	__
f)	$\varnothing \in P(A-B)$	__	l)	$\{\varnothing\} \subseteq P(A)$	__

3. Con diagramas de Venn o ejemplos numéricos (conjuntos definidos por extensión) verifique las proposiciones 1.13, 1.14, 1.15, 1.17.
4. Con base en el siguiente diagrama



completar las siguientes proposiciones :

a)	$\{3\}$ __ $P(A \cap B)$	g)	$\{1,2\}$ __ A-B
b)	$\{3\}$ __ $P(A)$	h)	$\varnothing$ __ $P(B)$
c)	3 __ A'	i)	$\{6,8\}$ __ $P(A')$
d)	2 __ B'	j)	$\{1,8\} \in P(\quad)$

e) $\{6,5\}$__ $P(A')$ k) $\{\{5\}\}$ __ $P(B)$

f) $\{\{1\},\{1,2\}\}$ __$P(A)$ e) $\{\{1\},\{3,6\}\}$__$P(A\cup B)$

De cual de los siguientes conjuntos es X un elemento, un subconjunto o ninguno de los anteriores :

a) $\{\{X\}\}$ b) X c) $\varnothing \cap X$

d) $\{X\} - \{\{X\}\}$ e) $\{X\} \cup X$

Demuestre que $A\in B \wedge B\in C$ no implica $A\in C$

De ejemplos de conjuntos A, B, C tales que $A\in B \wedge B\in C \wedge A\in C$

- $\{x, y, z\} = \{x, y, u\} \Rightarrow z = u$?
- Sea $A = \{a, \{b\}, c, \{c\}, \{a, c\}\{a, d\}\}$.

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas? Justifique las respuestas.

1) $a\in A$ 2) $a \subseteq A$ 3) $\{b\}\in A$ 4) $\{b\}\subseteq A$

5) $\{c\}\in A$ 6) $\{c\} \subseteq 1$ 7) $\{a, c\}\in A$ 8) $\{b,c\}\subseteq A$

9) $\{a, d\}\in A$ 10) $\{a, d\}\subseteq A$ 11) $d\in A$ 12) $d \subseteq A$

13) $\{\{a\},\{b\}\} \subseteq A$ 14) $\{a, c\}\subseteq A$ 15) $\{\{c\}\}\subseteq A$ 16) $\{\{a, c\}\}\subseteq A$

17) $\{a, \{b\}\}\in P(A)$ 18) $\{\{a, c\},\{a, d\}\}\subseteq A$ 19) $\{a,c,\{b\}\}\in P(A)$

20) $\{\{a, c\}\}\subseteq A$

Ejemplo :

La proposición $\{a, c\} \subseteq A$ es cierta porque $a\in A$ y $c\in A$; pero $\{b,c\} \subseteq A$ no es cierta ya que $b\notin A$. Igual sucede con la proposición $\{\{a\},\{b\}\} \subseteq A$, que no es cierta debido a que $\{a\}\notin A$; lo que es cierto es que $\{a\} \subseteq A$, porque $a\in A$.

$\{a, \{b\}\}\in P(A)$ es una proposición cierta puesto que $\{a, \{b\}\} \subseteq A$.

Lenguaje lógico

Las siguientes expresiones están escritas en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos.

- Expresar cada una de ellas completamente en el lenguaje lógico matemático.

- Una vez en el lenguaje lógico, mediante tautologías y elementos de la teoría, obtenga otra fórmula lógica de esta expresión y finalmente tradúzcala al lenguaje de la Teoría de Conjuntos.

a) $x \in (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow$
b) $x \in (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow$
c) $X \in P(A \cap B) \Leftrightarrow$
d) $X \in P(A) \cap P(B) \Leftrightarrow$
e) $x \in A - B \Leftrightarrow$
f) $x \in A \cap B' \Leftrightarrow$
g) $x \in B' - A' \Leftrightarrow$
h) $x \in A \cap (B - C) \Leftrightarrow$
i) $x \in (A \cap B) - C \Leftrightarrow$
j) $x \in (A - C) \cap B \Leftrightarrow$

Ejemplo:

$X \in P(A \cap B)$	$\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B$	def. De partes de un conjunto
	$\Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B$	def. De intersección
	$\Leftrightarrow X \in P(A) \wedge X \in P(B)$	def. de partes de un conjunto
	$\Leftrightarrow X \in P(A) \cap P(B)$ □	def. De intersección

$x \in (A \cap B) - C$	$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \notin C$	def. De diferencia
	$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C$	def. intersección
	$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C)$	prop. asociativa
	$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin C \wedge x \in B)$	prop. conmutativa
	$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \wedge x \in B$	prop. asociativa
	$\Leftrightarrow x \in (A - C) \wedge x \in B$	def. de diferencia
	$\Leftrightarrow x \in (A - C) \cap B$	def. de intersección □

Operaciones entre conjuntos

Demostrar las siguientes proposiciones, utilizando lo ya demostrado.

a) $A \cup (A \cap B) = A$
b) $A \cap (A \cup B) = A$
c) $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$
d) $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$
e) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$ (Sugerencia : $B\text{-}C = B \cap C'$)
f) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ (utilizar e) y ley de Morgan)

g) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ (Idem que lo anterior)

Ejemplo: $A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)'$ aplicación de $B-C = B \cap C'$
$= A \cap (B' \cup C')$ ley de Morgan
$= (A \cap B') \cup (A \cap C')$ ley distributiva
$= (A - B) \cup (A - C)$ aplicación de $B-C = B \cap C'$

Definición de diferencia simétrica

La diferencia simétrica de A y B es el conjunto $A \Delta B = A \cup B - (A \cap B)$, o sea, los elementos que están en uno de los conjuntos pero no en ambos.

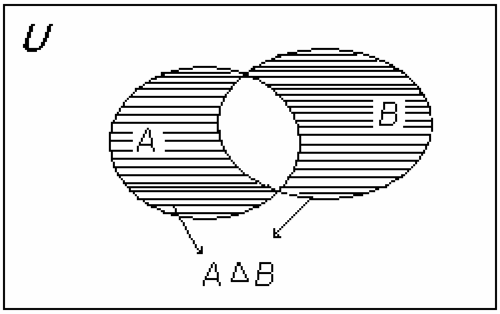
Simbólicamente,

$$A \Delta B = \{x \,/\, x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$$

Caracterización de los elementos de la diferencia simétrica

$$x \in A \Delta B \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)$$
$$\Leftrightarrow x \text{ está en A o B pero no en ambos}$$

Un conjunto que se obtiene de esta manera a partir de otros dos conjuntos, se llama **diferencia simétrica** entre esos dos conjuntos, y diagramativamente se representa por el área sombreada en la figura 1.



k) $x \in A \Delta B \Leftrightarrow$
l) $x \in B \Delta A \Leftrightarrow$

Utilizando definición de $A \Delta B$, demuestre mediante operaciones :

(i) $A \Delta \varnothing = A$

(ii) $A \Delta A = \varnothing$
(iii) $A \Delta E = A'$
(iv) $A \Delta B = B \Delta A$
(v) $A \Delta B = (A \cup B) \cap (A \cap B)'$
(vii) $A \Delta B = (A-B) \cup (B-A) = (A \cap B')' \cup (A' \cap B)$
(viii) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
(ix) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

Mediante el ELD, demostrar :

a) $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cap B \subseteq C \wedge A \cup B \subseteq C$
b) $A \cap B \subseteq C \wedge A \cup B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq C$
c) $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Leftrightarrow A \cap B \subseteq C \wedge A \cup B \subseteq C$
d) $C \subseteq A \wedge C \subseteq B \Leftrightarrow C \subseteq A \cap B \wedge C \subseteq A \cup B$
e) $P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$
f) $P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B)$
g) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$
h) $P(A \cup B) \supseteq P(A) \cup P(B)$
i) Refute con un contraejemplo que $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.
j) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A) \cap P(A) = \{\varnothing\}$
k) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \cap (B \cap C) = B \cap C$
l) $P(A) \cap P(B) = \{\varnothing\} \Rightarrow A \cap B = \varnothing$
m) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow P(A) \cap P(A) = \{\varnothing\}$
n) $A - B = A \cap B'$
o) $(A - B) \cap B = \varnothing$
p) $A - B = B' - B'$
q) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A - B = A$
r) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B'$
s) $B - A = B \Rightarrow A - B = A$
t) $B \subseteq A' \Rightarrow A \subseteq B'$
u) $(A \cup B) - B = A \Rightarrow A \cap B = \varnothing$
v) $B - A = B \Leftrightarrow A \subseteq B'$

Ejemplo 1:
Demostrar b) **ELD**

Demostrar $A \subseteq C \wedge B \subseteq C$

(1)	**$A \cap B \subseteq C$**	**P**
(2)	**$A \cup B \subseteq C$**	**P**

En este ELD hay que hacer dos demostraciones.

ELD1

Demostrar $A \subseteq C$

Traducción $x \in A \Rightarrow x \in C$

(1)	$\mathbf{A \cap B \subseteq C}$	**P**
(2)	$\mathbf{A \cup B \subseteq C}$	**P**
(3)	$x \in A$	**P**
(4)	$x \in A \cup B$	(3), 1.13 (ii)
(5)	$x \in C$	4, 2
(6)	$x \in A \Rightarrow x \in C$	CP 3, 5
(7)	$A \subseteq C$	traducción (6)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(3) Sea $x \in A$. **(4)** Entonces $x \in A \cup B$ por 1.13 (ii). **(5)** Como, por hipòtesis, $A \cup B \subseteq C$, entonces $x \in C$. **(6)** **(7)**Por lo tanto $A \subseteq C$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $x \in A$. Entonces $x \in A \cup B$ por 1.13 (ii). Como $A \cup B \subseteq C$ (hipótesis), entonces $x \in C$. Por lo tanto $A \subseteq C$.

ELD2

Demostrar $B \subseteq C$

Traducción $x \in B \Rightarrow x \in C$

(1)	$\mathbf{A \cap B \subseteq C}$	**P**
(2)	$\mathbf{A \cup B \subseteq C}$	**P**
(3)	$x \in B$	P
(4)	$x \in B \cup A$	1.13 (ii)
(5)	$B \cup A = A \cup B$	1.12 (vi)
(6)	$x \in A \cup B$	I 4,5
(7)	$x \in C$	6, 2
(8)	$x \in B \Rightarrow x \in C$	CP 3,7
(9)	$B \subseteq C$.	Traducción 8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(3) Sea $x \in B$. **(4)** Entonces $x \in B \cup A$ por 1.13 (ii).**(5)(6)**Como $B \cup A = A \cup B$, según 1.12 (vi), entonces $x \in A \cup B$. **(7)**Por hipòtesis $A \cup B \subseteq C$, entonces $x \in C$. **(8)** **(9)** Por lo tanto $B \subseteq C$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $x \in B$. Entonces $x \in B \cup A$ por 1.13 (ii). Como $B \cup A = A \cup B$, según 1.12 (vi), entonces $x \in A \cup B$. Por hipòtesis $A \cup B \subseteq C$, entonces $x \in C$. Por lo tanto $B \subseteq C$.

Ejemplo 2: Del ejercicio c),

$$\text{Demostrar}: A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cap B \subseteq C \wedge A \cup B \subseteq C$$

Organización de la actividad práctica

1. Interpretación de la proposición :
   Lo que esta proposición quiere decir es que el razonamiento :

$$\begin{array}{ll} (1) & A \subseteq C \\ (2) & B \subseteq C \\ \multicolumn{2}{l}{\triangleright\ A \cap B \subseteq C \wedge A \cup B \subseteq C} \end{array}$$

es válido.

En otras palabras, que la proposición $A \cap B \subseteq C \wedge A \cup B \subseteq C$ se deduce lógicamente de la proposiciones $A \subseteq C$, y, $B \subseteq C$.

Como la conclusión es una conjunción, hay que hacer dos demostraciones.

2. **ELD**

Demostrar $A \cap B \subseteq C \wedge A \cup B \subseteq C$

Traducción: $(x \in A \cap B \Rightarrow x \in C) \wedge (x \in A \cup B \Rightarrow x \in C), \forall x$

(1)	$\mathbf{A \subseteq C}$		**P**
(2)	$\mathbf{B \subseteq C}$		**P**
(3)		$x \in A \cap B$	P
(4)		$x \in A \wedge x \in B$	traducción 3
(5)		$x \in A$	S4
(6)		$x \in C$	5,1
(7)	$x \in A \cap B \Rightarrow x \in C$		CP 3,6
$\square_1$ (8)	$A \cap B \subseteq C$		Traducción 7
(9)		$x \in A \cup B$	P
(10)		$x \in A \vee x \in B$	traducción (9)
(11)		$x \in C \vee x \in C$	10, 1, 2
(12)		$x \in C$	Dp 11
(13)	$x \in A \cup B \Rightarrow x \in C$		CP 9,12

□$_2$ (14) $A \cup B \subseteq C$ traducción 13

□ (15) $A \cap B \subseteq C \wedge A \cup B \subseteq C$ A 8,14

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(3) Sea $x \in A \cap B$.**(4)**Por definición de intersección $x \in A$ y $x \in B$; **(5)**en particular $x \in A$. **(6)**Debido a que $A \subseteq C$ por hipótesis, entonces $x \in C$. **(7)** **(8)** Por lo tanto $A \cap B \subseteq C$. □$_1$

(9) Ahora supongamos que $x \in A \cup B$. **(10)**Por definición de unión, $x \in A$ o $x \in B$. **(11)**Si $x \in A$, $x \in C$ ya que por hipótesis $A \subseteq C$; Si $x \in B$, $x \in C$ debido a que también $B \subseteq C$. **(12)** De todas formas tenemos que $x \in C$; **(13)** **(14)**Por lo tanto, $A \cup B \subseteq C$. □$_2$

(15) Con esto se ha demostrado la implicación

$$A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cap B \subseteq C \wedge A \cup B \subseteq C$$

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $x \in A \cap B$. Por definición de intersección $x \in A$ y $x \in B$; en particular $x \in A$. Debido a que $A \subseteq C$ por hipótesis, entonces $x \in C$. Por lo tanto $A \cap B \subseteq C$. □$_1$

Ahora supongamos que $x \in A \cup B$. Por definición de unión, $x \in A$ o $x \in B$. Si $x \in A$, $x \in C$ ya que por hipótesis $A \subseteq C$; Si $x \in B$, $x \in C$ debido a que también $B \subseteq C$. De todas formas tenemos que $x \in C$. Por lo tanto $A \cup B \subseteq C$. Con esto se ha demostrado $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cap B \subseteq C \wedge A \cup B \subseteq C$

Para completar la resolución del ejercicio b), mediante un proceso imitativo, el lector podrá demostrar la implicación :

$$A \cap B \subseteq C \wedge A \cup B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq C$$

Ejemplo 2. Ejercicio r) Demostrar $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B'$

I. Organización de la actividad práctica

1. Interpretación de la proposición :

- $(A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B') \Leftrightarrow [(A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \subseteq B') \wedge (A \subseteq B' \Rightarrow A \cap B = \varnothing)]$

• Lo que esta proposición quiere decir es que los razonamientos :

(1) $A \subseteq B'$	(1) $A \cap B = \emptyset$
$\triangleright$ $A \cap B = \emptyset$	$\triangleright$ $A \subseteq B'$

son válidos.

En otras palabras, en cuanto al primer razonamiento, la proposición $A \cap B = \emptyset$ se deduce lógicamente de la premisa $A \subseteq B'$.

(Idem para el segundo razonamiento).

2. $\Leftarrow$)

ELD

Demostrar $A \cap B = \emptyset$

por RAA

(1)	$\mathbf{A \subseteq B'}$	**P**
(2)	$A \cap B \neq \emptyset$	P
(3)	$\exists x$: $x\in(A \cap B)$	(2) 1.6(ii)
(4)	$x\in A \wedge x\in B$	traducción 3
(5)	$x\in A$	S4
(6)	$x\in B'$	5,1
(7)	$x\notin B$	traducción 6
(8)	$x\in B$	S4
(9)	$x\notin B \wedge x\in B$	A7,8
(10)	$A \cap B = \emptyset$	RAA2,9

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) Supongamos lo contrario, es decir que $A \cap B \neq \emptyset$; **(3)** esto implica que $A\cap B$ tiene elementos, o sea que existe un x talque $x\in(A \cap B)$. **(4)**De donde

$x\in A$, y, $x\in B$; $\otimes$

(5) En particular $x\in A$. **(6)** Como, por hipótesis, $A \subseteq B'$, entonces $x\in B'$; **(7)**o sea $x\notin B$.**(8)(9)** Pero esto contradice el hecho en $\otimes$ de que $x\in B$. **(10)** Por lo tanto $A \cap B = \emptyset$. $\square_1$

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario, es decir que $A \cap B \neq \emptyset$; esto implica que $A \cap B$ tiene elementos, o sea que existe un x talque $x\in(A \cap B)$. De donde

$$x \in A, \text{ y, } x \in B; \qquad \otimes$$

En particular $x \in A$.Como, por hipótesis,$A \subseteq B'$,entonces $x \in B'$; o sea $x \notin B$. Pero esto contradice el hecho en $\otimes$ de que $x \in B$. Por lo tanto$A \cap B = \varnothing$. $\square_1$

3. De la misma forma se demuestra la implicación $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \subseteq B'$.
$\Rightarrow$)

ELD

Demostrar $A \subseteq B'$

Traducción $x \in A \Rightarrow x \in B'$, $\forall x$

(1)	**$A \cap B = \varnothing$**	**P**
(2)	$x \in A$	P
(3)	$x \notin B$	2, 1
(4)	$x \in B'$	traducción 3
(5)	$x \in A \Rightarrow x \in B'$	CP 2,4
$\square$(6)	$A \subseteq B'$	traducción 5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) Sea $x \in A$; **(3)** debido a que $A \cap B = \varnothing$, $x \notin B$; **(4)**pero esto significa que $x \in B'$. Por lo tanto **(5)(6)** $A \subseteq B'$ $\square$

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $x \in A$. Debido a que $A \cap B = \varnothing$, $x \notin B$; pero esto significa que $x \in B'$. Por lo tanto $A \subseteq B'$ $\square$

Ejemplo 3. Ejercicio t) $B \subseteq A' \Rightarrow A \subseteq B'$

ELD

Demostrar $A \subseteq B'$

Traducción $x \in A \Rightarrow x \in B'$, $\forall x$

(1)	**$B \subseteq A'$**	**P**
(2)	$x \in A$	P
(3)	$B \subseteq A' \Rightarrow A \cap B = \varnothing$	ejercicio r
(4)	$A \cap B = \varnothing$	PP 3,1
(5)	$x \notin B$	2, 4
(6)	$x \in B'$	traducción 5
(7)	$x \in A \Rightarrow x \in B'$	CP 2,6
$\square$(8)	$A \subseteq B'$	traducción 7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) Sea $x \in A$. **(3) (4)**Una consecuencia directa de la hipótesis $B \subseteq A'$ es que $A \cap B = \emptyset$. **(5)**De esto último se despende $x \notin B$, ya que $x \in A$. **(6)** Así que $x \in B'$. **(7)(8)** Por lo tanto $A \subseteq B'$ □

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $x \in A$. Una consecuencia directa de la hipótesis $B \subseteq A'$ es que $A \cap B = \emptyset$. De esto último se despende $x \notin B$, ya que $x \in A$. Así que $x \in B'$. Por lo tanto $A \subseteq B'$ □

Ejemplo 4 u) $(A \cup B) - B = A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

ELD

Demostrar $A \cap B = \emptyset$

por RAA

(1)	**$(A \cup B) - B = A$**	**P**
(2)	$A \cap B \neq \emptyset$	P
(3)	$\exists x: x \in A \cap B$	(2) 1.6(ii)
(4)	$x \in A \wedge x \in B$	traducción 3
(5)	$x \in A$	S4
(6)	$x \in (A \cup B) - B$	I 5,1
(7)	$x \notin B$	6
(8)	$x \in B$	S4
(9)	$x \notin B \wedge x \in B$	A7,8
(10)	$A \cap B = \emptyset$	RAA 2,9

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) Supongamos lo contrario, esto es, $A \cap B \neq \emptyset$;**(3)** lo que implica que existe un x tal que $x \in A \cap B$, **(4)** o sea, $x \in A$ y $x \in B$. **(5)**En particular $x \in A$. **(6)** Por la hipótesis $(A \cup B) - B = A$, entonces $x \in (A \cup B) - B$, **(7)**es decir $x \notin B$. **(8)** Pero ya se ha afirmado que $x \in B$. **(9) (10)**Luego $A \cap B = \emptyset$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario, esto es, $A \cap B \neq \emptyset$; lo que implica que existe un x tal que $x \in A \cap B$ o sea $x \in A$ y $x \in B$. En particular $x \in A$. Por la hipótesis $(A \cup B) - B = A$, entonces $x \in (A \cup B) - B$, es decir $x \notin B$. Pero ya se ha afirmado que $x \in B$. Luego $A \cap B = \emptyset$.

Traducción del lenguaje ordinario al lenguaje lógico y viceversa.

El lenguaje es una herramienta – humana para representar (significar) de distintas formas la realidad.

Traducir las siguientes expresiones en lenguaje ordinario al lenguaje lógico y de la Teoría de Conjuntos.

- El conjunto A posee algún elemento.
- Existen conjuntos sin elementos
- Todo conjunto es subconjunto de si mismo
- Si un elemento está en la unión de dos conjuntos, entonces pertenece a uno de los dos conjuntos.
- Dos conjuntos son diferentes si y solo si uno de ellos tiene elementos que no están en el otro.
- El conjunto vacío no tiene elementos.
- El conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto.
- El conjunto vacío es parte de todo conjunto.
- 2 es un elemento común a A y a B.
- Todo conjunto es parte de si mismo.
- El elemento c no es común a A y B porque no está en ambos.
- La intersección de dos conjuntos está contenida en cada uno de los conjuntos.
- El complemento del complemento de un conjunto es el mismo conjunto.
- Los conjuntos A y B no tienen nada en común.
- El elemento b no pertenece ni a A ni a B.
- Si dos conjuntos no tienen nada en común, entonces el complemento del uno contiene al otro.
- Represente, por medio de un diagrama de Venn, la idea del punto anterior.
- Hay elementos que están en A o en B, pero no en ambos.
- X no es parte de A y Y no es parte del complemento de A.
- Z es una parte común a A y a B.
- X es una parte de A pero no de B.
- Si x pertenece a un conjunto de dos elementos, entonces x es uno de esos elementos.

Las siguientes expresiones en lenguaje lógico y de la Teoría de Conjuntos son las traducciones de las anteriores expresiones en lenguaje ordinario; identifíquelas.

- $\exists x : x \in A$
- $(\exists A)(\forall x)(x \notin A)$
- $(\forall A)(A \subseteq A)$
- $x_o \in A \cup B \Rightarrow x_o \in A \vee x_o \in B$
- $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A' \supseteq B \wedge B' \supseteq A$
- $(\forall A)(\varnothing \subseteq A)$
- $\varnothing \in P(A), \forall A$
- $A \subseteq A$, ó, $A \in P(A)$
- $c \notin A \vee c \notin B \Rightarrow c \notin A \cap B$
- $x \in \{a, b\} \Rightarrow x = a \vee x = b$
- $A \cap B \subseteq A \wedge A \cap B \subseteq B$
- $A'' = A$
- $x \notin (A \cap B)$ (ó $A \cap B = \varnothing$)
- $b \notin A \wedge b \notin B$
- $x \notin \varnothing$
- $2 \in A \wedge 2 \in B$, ó, $2 \in A \cap B$
- $\exists x: x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)$
- $X \notin P(A) \wedge Y \notin P(A')$
- $Z \in P(A) \wedge Z \in P(B)$
- $X \in P(A) \wedge X \notin P(B)$
- $A \neq B \Leftrightarrow (\exists \in x)[(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)]$

Número de elementos de un conjunto

Si A es un conjunto, denotaremos con n(A) el número de elementos de A.
Ejemplo :

Si $V = \{x \ / \ x$ es vocal $\}$, entonces $n(V) = 5$
Si $P = \{x \ / \ x$ es primo par $\}$, entonces $n(P) = 1$
Si $N = \{x \ / \ x$ es divisor de $15\}$, entonces $n(N) = 3$

Si conocemos el número de ciertos conjuntos dados, es posible hallar el número de elementos de otros conjuntos que son unión, intersección, diferencias, y complementos de aquellos.

Supóngase que nos dicen que 50 estudiantes de la universidad toman el curso de biología y que 120 toman matemáticas.

¿Podemos decir cuántos estudiantes toman biología o matemática? La respuesta es no, puesto que necesitamos conocer además el número de estudiantes que toman ambas asignaturas. Así por ejemplo, si sabemos que los dos conjuntos de estudiantes son disjuntos, entonces la respuesta sería la suma de los dos números o sea $50 + 120 = 170$

En general, si se nos dan dos conjuntos A y B tales que son disjuntos, es decir $A \cap B = \varnothing$, entonces el número de elementos en la unión de A y B es igual a la suma del número de elementos de A y de B.

Luego Si $A \cap B = \varnothing$, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

Ejemplo: Si $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{m, n, o, p, q\}$, entonces $n(A) = 4$, $n(B) = 5$, $A \cap B = \varnothing$

$A \cup B = \{a, b, c, d, m, n, o, p, q\}$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 4 + 5 = 9$

Consideremos ahora el caso en que $A \cap B \neq \varnothing$, es decir cuando los conjunto A y B no son disjuntos .

Podemos obtener el número de elementos de $A \cup B$ de la siguiente manera : sabemos que $B \cap B' = \varnothing$, puesto que B' es el complemento de B y en consecuencia podemos asegurar que $(A \cap B) \cap (A \cap B') = \varnothing$.

Por tanto,

$$n[(A \cap B) \cup (A \cap B')] = n(A \cap B) + n(A \cap B') \qquad (1)$$

En forma semejante, puesto que $A \cap A' = \varnothing$, $(A \cap B) \cap (A' \cap B) = \varnothing$

Por tanto,

$$n[(A \cap B) \cup (A' \cap B)] = n(A \cap B) + n(A' \cap B) \qquad (2)$$

Sabemos además que :

$$(A \cap B) \cup (A \cap B') = A \text{ y } (A \cap B) \cup (A' \cap B) = B$$

En consecuencia,

$$n[(A \cap B) \cup (A \cap B')] = n(A) \qquad (3)$$

y

$$n[(A \cap B) \cup (A' \cap B)] = n(B) \qquad (4)$$

Sumando miembro a miembro (3) y (4) se tiene :

$$n[(A \cap B) \cup (A \cap B')] + n[(A \cap B) \cup (A' \cap B)] = n(A) + n(B) \qquad (5)$$

Remplazando (1) y (2) en (5) concluimos que :

$$n(A \cap B) + (A \cap B') + n(A' \cap B) + n(A \cap B) = n(A) + n(B)$$

de donde :

$n(A \cap B) + (A \cap B') + n(A' \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (6)

De otro lado sabemos que, $A \cap B'$, $A \cap B$ y $A' \cap B$ son disjuntos dos a dos, y Además,

$(A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B) = A \cup B$

Luego, $n(A \cap B') + n(A \cap B) + n(A' \cap B) = n(A \cup B)$ (7)

Remplazando (7) en (6) se tiene que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Entonces, si $A \cap B \neq \emptyset$, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Observación Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $n(A \cap B) = 0$

Generalizando lo anterior podemos escribir

$$(\forall A, B)\,[n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)].$$

Ejemplo : En el grupo de deportes de la universidad hay 75 alumnos y en el de danzas hay 35. Hallar el número de alumnos que hacen deportes o danzas : a) si los entrenamientos se hacen a la misma hora. b) si los entrenamientos se hacen en días diferentes y se sabe que 15 estudiantes pertenecen a ambos grupos (figura 8.2).

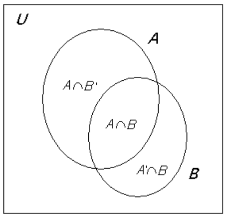


Fig. 8.1

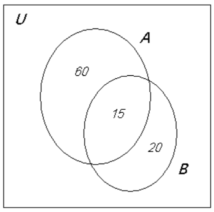


Fig. 8.2

Se observa en el caso a) que no puede determinarse con certeza el número de elementos, puesto que no sabemos cuántos alumnos practican ambas cosas. Podemos asegurar que el número máximo es 110 y el número mínimo es 75.

Para b) tenemos que si

$A = \{x \ / \ x \text{ es alumno que realiza deportes}\}$

y

$B = \{x \ / \ x \text{ es alumno que hace danzas}\}$

Entonces :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 75 + 35 - 15 = 95$$

Es posible derivar fórmulas para el número de elementos de un conjunto que es la unión de más de dos conjuntos, pero generalmente es más sencillo trabajar con base en los diagramas de Venn.

Así, para tres conjuntos A, B y C es posible probar que :

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$$

$$+ n(A \cap B \cap C)$$

Se deja como ejercicio la deducción de la igualdad anterior.

Del lenguaje ordinario al lenguaje lógico y de la Teoría de Conjuntos

Traducir todas las afirmaciones contenidas en el siguiente párrafo al lenguaje lógico y de la Teoría de Conjuntos y, luego, responder las preguntas planteadas más abajo del párrafo :

La siguiente información se refiere a un grupo de 200 estudiantes : Todos los hombres tienen más de 15 años de edad, hay 100 mujeres en el grupo. Hay 150 estudiantes de más de 15 años. Hay 50 mujeres rubias. Hay 40 estudiantes rubios de más de 15 años de edad. Hay 30 mujeres rubias con más de 15 años de edad.

a) ¿Cuántos estudiantes rubios hay?
b) ¿Cuántas mujeres no rubias tienen más de 15 años de edad.
c) ¿Cuántos estudiantes no rubios tienen menos de 15 años de edad?
d) ¿Cuántos hombres rubios hay?

e) ¿Cuántos estudiantes tienen menos de 15 años de edad?

I. Organización de la actividad práctica

1. Sean

E el conjunto de 200 estudiantes.
H el conjunto de los hombres
M el conjunto de las mujeres
R el conjunto de estudiantes rubios
Q el conjunto de estudiantes con más de 15 años de edad

2. Traducciones básicas :

$x \in H \leftrightarrow$ x es hombre
$x \in M \leftrightarrow$ x es mujer
$x \in R \leftrightarrow$ x es estudiante rubio
$x \in Q \leftrightarrow$ x es estudiante con más de 15 años de edad.
$x \in M \cap R \leftrightarrow$ x es mujer rubia
$x \in (M \cap R) \cap Q \leftrightarrow$ x es mujer rubia con más de 15 años de edad
$x \in (M \cap R') \cap Q \leftrightarrow$ x es mujer no rubia con más de 15 años de edad
$x \in [(M \cap R) \cap Q] \cup [(M \cap R') \cap Q] \leftrightarrow$ x es mujer rubia o no rubia con más de 15 años de edad

3.Traducción del párrafo :

Todos los hombres tienen más de 15 años de edad :

$$(\forall x)(x \in H \Rightarrow x \in Q) \text{ ó } H \subseteq Q.$$

(1) Hay 100 mujeres en el grupo $\leftrightarrow$ $n(M) = 100$

(2) Hay 150 estudiantes de más de 15 años $\leftrightarrow$ $n(Q) = 150$

(3) Hay 50 mujeres rubias $\leftrightarrow$ $n(M \cap R) = 50$

(4) Hay 40 estudiantes rubios de más de 15 años de edad $\leftrightarrow$ $n(R \cap Q) = 40$

(5) Hay 30 mujeres rubias con más de 15 años de edad $\leftrightarrow$ $n\,[(M \cap R) \cap Q] = 30$

Conclusiones inmediatas :

De (1) y (2) se deduce que :

Hay 50 mujeres con más de 15 años de edad $\leftrightarrow$ $n(M\cap Q) = 50$

Hay 50 mujeres con menos de 15 años de edad $\leftrightarrow$ $n(M\cap Q') = 50$

El problema :

f) ¿Cuántos hombres rubios hay?
g) ¿Cuántos estudiantes rubios hay?
h) ¿Cuántas mujeres no rubias tienen más de 15 años de edad.
i) ¿Cuántos estudiantes no rubios tienen menos de 15 años de edad?
j) ¿Cuántos estudiantes tienen menos de 15 años de edad?

II. Solución : **¿Cuántos hombres rubios hay?**

Al combinar la fórmula $n(R\cap Q) = n[(H \cap R)\cap Q] + n[(M\cap R)\cap Q]$ con los datos $n(R\cap Q) = 40$ y $n[(M\cap R)\cap Q] = 30$ dados en las traducciones (4) y (5) respectivamente, obtenemos como resultado que

$$n[(H \cap R)\cap Q] = 10.$$

Esto quiere decir que los hombres rubios con más de 15 años de edad son 10. Pero como todos los hombres tienen más de 15 años de edad, entonces los hombres rubios en total son 10.

¿Cuántos estudiantes rubios hay?

$n(R) = n(H\cap R) + n(M \cap R)$
$n(H\cap R) = 10$

$n(M \cap R) = 50$
$n(R) = 10 + 50 = 60$

¿Cuántos estudiantes tienen menos de 15 años de edad?

x tiene menos de 15 años $\leftrightarrow$ x no tiene más de 15 años
$\leftrightarrow x\notin Q$
$\leftrightarrow x\in Q'$

Puesto que $E = Q \cup Q'$, entonces $n(E) = n(Q) + n(Q')$

Debido a que el número de estudiantes es 200 y 150 estudiantes tienen más de 15 años de edad, entonces es evidente que 50 estudiantes tienen menos de 15 años de edad. O sea que

$$n(Q') = 50$$

¿Cuántas mujeres no rubias tienen más de 15 años de edad.

Si hay 100 mujeres y 50 son rubias, entonces las no rubias son también 50. Así que $n(M\text{-}R) = 50$.

De acuerdo a la primera conclusión inmediata, hay 50 mujeres con más de 15 años de edad; y estas pueden ser rubias o no rubias; o sea que

$$M \cap Q = [(M \cap R) \cap Q] \cup [(M \cap R') \cap Q]$$

y

$$n(M \cap Q) = 50$$

Puesto que

$$n[(M \cap R) \cap Q] + n[(M \cap R') \cap Q] = n(M \cap Q)$$

y además

$$n[(M \cap R) \cap Q] = 30,$$

es decir que las mujeres rubias con más de 15 años de edad son 30, entonces se tiene que

$$n[(M \cap R') \cap Q] = 20.$$

Es decir que las mujeres no rubias con más de 15 años de edad son 20.

¿Cuántos estudiantes no rubios tienen menos de 15 años de edad?

Si los estudiantes rubios son 60, los no rubios son 140. Ahora, el conjunto de los rubios lo podemos partir en dos : el de los que tienen más de 15 años de edad y el de los que tienen menos de 15 años de edad. De donde resulta la fórmula :

$$n(R) = n[(R \cap Q)] + n[(R \cap Q')] \qquad \otimes$$

De la traducción (4), se sabe que hay 40 estudiantes rubios de más de 15 años de edad, o sea que $n[(R \cap Q)] = 40$. Por lo tanto, de la ecuación $\otimes$, sabiendo, además, que n® = 60, deducimos que $n[(R \cap Q')] = 20$, o sea, que los rubios con menos de 15 años son 20.

Ahora, el conjunto de los estudiantes que tienen menos de 15 años de edad también lo podemos partir en dos : el de los que son rubios y el de los que no son rubios. De esta manera resulta la fórmula :

$$n(Q') = n(R \cap Q') + n(R' \cap Q') \qquad \oplus$$

Puesto que sabemos que los estudiantes que tienen menos de 15 años de edad son 50 y que los rubios con menos de 15 años de edad son 20, entonces, de la ecuación $\oplus$ nos resulta fácil obtener el resultado $n(R' \cap Q') = 30$; lo que quiere decir que los no rubios menores de 15 años de edad son 30. □

Ejercicios

En una investigación realizada sobre los hábitos de lectura de los estudiantes de la universidad se encuentra que 48%, leen la revista A; 50 %, la revista B; 30%, la revista C; 20%, la revistas A y B; 10% leen las revistas B y C; 13%, las revistas A y C; 10% no leen ninguna de las revistas.

a) ¿Qué porcentaje leen las tres revistas?
b) ¿Qué porcentaje leen exactamente dos revistas?
c) ¿Qué porcentaje leen al menos dos revistas?
d) ¿Qué porcentaje leen exactamente una revista?
e) ¿Qué porcentaje leen a lo sumo una revista?

Al finalizar un año de estudios se observó, analizando tres materias M, B y E, que el 2% aprobó lastres materias, el 6% reprobó M y B, el 5% reprobó B y E, el 10 % reprobó M y E, el 29 % reprobó M, el 32% reprobó B y el 16% reprobó E.

a) ¿Cuántos estudiantes aprobaron las tres materias?
b) ¿Cuántos reprobaron una exactamente?
c) ¿Cuántos reprobaron mínimo dos?
d) ¿Cuántos aprobaron mínimo dos?
e) ¿Cuántos aprobaron a lo sumo una?

Autoevaluación

1. Expresar completamente en el lenguaje lógico y de la Teoría de Conjuntos

   a) $x \in (A \cup B) \cap C \quad \Leftrightarrow$

   b) $X \in P(A) \cap P(C) \quad \Leftrightarrow$

   c) $x \in (A - C) \cap B \quad \Leftrightarrow$

2. Traduzca al lenguaje lógico y / o de la teoría de conjuntos.

   a) El conjunto vacío no tiene elementos
   b) El conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto
   c) Si un elemento está en la unión de dos conjuntos, entonces ese elemento pertenece a uno de los dos.
   d) El elemento b no pertenece a A ni a B.
   e) Si la intersección de dos conjuntos es disjunta, entonces el complemento del uno contiene al otro.
   f) Si dos conjuntos diferentes no tienen nada en común, entonces cada conjunto está contenido en el complemento del otro.

3. Exprese en palabras las siguientes expresiones en el lenguaje lógico y de la teoría de Conjuntos.

   a) $x \in E \Leftrightarrow x \in A \vee \notin A$
   b) $\rceil (\forall)(x \in A \cup B \Rightarrow x \in B)$
   c) $(\exists x)[(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)] \Rightarrow A \neq B$
   d) $x \notin \emptyset, \forall x$
   e) $x \in A \wedge x \notin B$
   f) $X \notin \mathcal{P}(A)$

4 Si $A = \{a, \{b,c\}, c, \{a\}, d\}$

Complete

(1) a__A, {a}__A, {{a}}__A.

(2) {{a}}__$\mathcal{P}$(A), {a, c}__A

(3) {a, {b,c}}__A, {c, {a} }__ $\mathcal{P}$(A)

(4){ {b,c}, {c}, }__ $\mathcal{P}$A

5. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

   a) Si $a \in A$ y $A \subseteq B$, entonces $a \in B$
   b) Si $a \in A$ y $B \subseteq A$, entonces $a \notin B$
   c) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $C \subseteq A$
   d) Si $a \in B$ y $a \in C$, entonces $B \subseteq C$
   e) Si $a \in A$ y $B \not\subset A$, entonces $a \notin B$
   f) $A \subseteq A$
   g) $\varnothing \subseteq A$
   h) $A \subseteq B \Rightarrow B \subseteq A$

6. Los siguientes son conjuntos de figuras del plano.

   A = { x / x es triángulo }
   B = {x / x es triángulo isósceles}
   C = {x / x es triángulo equilátero}
   D = {x / x es triángulo rectángulo}
   E = {x / x es un triángulo con los tres lados congruentes}
   F = {x / x es un triángulo con dos ángulos congruentes }
   G ={x / x es un triángulo escaleno}

Utilizando los símbolos $\subseteq$ e =, indicar todas las posibles relaciones entre dichos conjuntos.

Ejemplo : Demostrar $C \subseteq E$

ELD

Demostrar $C \subseteq E$

Traducción $x \in C \Rightarrow x \in E, \ \forall x$

(1)	$x \in C \leftrightarrow$ x es triángulo equilátero	**P**
(2)	$x \in E \leftrightarrow$ x es triángulo con los tres lados congruentes	**P**
(3)	$x \in C$	P
(4)	x es un triángulo equilátero	traducción (3),(1)
(5)	x es un triángulo con los tres lados iguales	consecuencia (4)
(6)	x es un triángulo con los tres lados congruentes	consecuencia (5)
(7)	$x \in E$	traducción (6)(2)
(8)	$x \in C \Rightarrow x \in E$	CP3,7
$\square$ (9)	$C \subseteq E$	traducción (8)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(3) Si $x \in C$, **(4)** x es un triángulo equilátero, **(5)** y por lo tanto, x tiene sus tres lados iguales. **(6)** Pero esto implica que x es un triángulo con los tres lados congruentes, **(7)** es decir, $x \in E$. □

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Si $x \in C$, x es un triángulo equilátero, y por lo tanto, x tiene sus tres lados iguales. Pero esto implica que x es un triángulo con los tres lados congruentes, es decir, $x \in E$. □

Justificación en lenguaje ordinario :

$C \subseteq E$, porque los triángulos equiláteros son a su vez triángulos con los tres lados congruentes debido a que sus tres lados son iguales.

Traducir al lenguaje ordinario las siguientes afirmaciones de la Teoría de Conjuntos.

- $A \neq \varnothing$
- $x \in E \Leftrightarrow x \in A \vee x \notin A$
- $A \cap B \neq \varnothing$
- $A \subseteq B \cap C$
- $x \notin A \wedge x \notin B$
- $(\exists A)(\forall x)(x \notin A)$
- $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A) \cap P(B) = \{\varnothing\}$
- $(\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$
- $x \notin \varnothing$
- $\rceil(\forall x)(x \in A \cup B \Rightarrow x \in B)$
- $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \notin B)$
- $(\forall x)(x \in A \wedge x \notin B)$
- $(\exists \in x)[(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)] \Rightarrow A \neq B$

OTROS EJERCICIOS

Traducir al lenguaje de la teoría de conjuntos

1. El conjunto A tiene elementos

2. El conjunto B no tiene elementos

3. Juan estudia y trabaja

4. Ningún pez es animal terrestre; luego si un animal no es terrestre entonces es pez.

5. El que no sabe leer ni escribir es un analfabeta

6. No todo el que dice Señor, Señor, entrará en el reino de los cielos.

7. Ningún hombre es inmortal

8. A cada elemento del conjunto A le corresponde un único elemento de B.

9. La función f es continua en a.

10. Hay cisnes negros

Traducir al lenguaje ordinario

1. $\exists\, x: x \in A$

2. $x \notin B$

3- $j \in E \wedge j \in T$.

Sugerencia: Sea E es el conjunto de los estudiantes.
Sea T el conjunto de los trabajadores.

4. $(\forall x)(x \in P \Rightarrow x \in T) \Rightarrow (\exists x: x \notin T \Rightarrow x \in P)$

Sugerencia: Hacer P el conjunto de los peces y
T el conjunto de los animales terrestres

5. $(\forall x)(x \notin L \vee x \notin E \Rightarrow x \in A)$

Sugerencia: Hacer L el conjunto de los que saben leer y
T el conjunto de los que saben escribir

6. $\urcorner(\forall x)(x \in S \Rightarrow x \in R)$

Sugerencia: Hacer S el conjunto de los que dicen Señor, Señor
y R el conjunto de los que entrarán al reino de los cielos.

7. $(\forall x)(x \in H \Rightarrow x \notin I)$

Sugerencia: Hacer H el conjunto de los hombres
e I el conjunto de los inmortales.

8. $(\forall x \in A)(\exists y, z \in B) [(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow x = z]$

9. $(\forall \xi > 0)(\exists \delta > 0) (x \in B\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B\xi(f(a)))$

10. $(\exists x) (Cx \wedge Nx)$

Sugerencia: Hacer C el conjunto de los cisnes
y N el conjunto de los que son negros.