CAPÍTULO II

RELACIONES

En el lenguaje diario se habla de "relaciones entre personas", como la amistad y de "relaciones entre países", … . Naturalmente también queremos hablar de relaciones entre números. Si queremos matematizar estas ideas podemos comenzar por observar que, por lo menos en una primera instancia, estas relaciones se presentan entre "parejas de personas" o "parejas de países" o "parejas de números". Así, parece que el concepto de "pareja" es indispensable en el estudio que vamos a iniciar. Una pareja (a, b) será intuitivamente un conjunto con dos elementos a y b, pero de tal manera que a sea el primer elemento y b el segundo elemento. Por eso mejor podríamos decir "pareja ordenada" para distinguirla de un conjunto $\{a, b\}$ que tiene los mismos elementos, pero en el cual no asumimos ningún orden.

$$\{a, b\} = \{b, a\}, \text{ pero } (a, b) \neq (b, a).$$

O mejor

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d \qquad (1)$$

No es lo mismo que a sea hijo de b, que b sea hijo de a. De cualquier manera que definamos (a, b), (1) debe cumplirse como teorema.
(véase 2.5).

1. PAREJAS ORDENADAS

2.1 Definición $\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$

Claramente $\{a, b\} = \{b, a\}$ y $\{a, a\} = \{a\}$

La tentación ahora es definir $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ siendo n cualquier natural. Por ejemplo se puede definir sucesivamente :

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\} \cup \{a_n\}$$

y 2.1 resultaría un caso particular de esta definición. El problema es que en esta etapa de nuestra teoría, no sabemos que es un número natural. En realidad no necesitamos esta definición; por lo menos por ahora; auque usaremos esta notación para ilustrar ideas (Definición 2.6, Ejercicio 2.1, (5)).

2.2 Lema $\{a, b\} = \{c, d\} \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c)$

Demostración ($\Leftarrow$) Inmediato.

Demostremos ahora el sentido ($\Rightarrow$): Se presentan dos casos : cuando $a = b$ ó $a \neq b$.

Si $a = b$ y como $a \in \{a, b\}$ entonces $a \in \{c, d\}$ y $a = c \vee a = d$.
En definitiva, $a = b = c = d$

Para el caso en que $a \neq b$,

ELD
Demostrar $(a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c)$

(1)	**$\{a, b\} = \{c, d\}$**	**P**
(2)	$a = b \vee a \neq b$	P
(3)	$a \neq b$	P
(4)	$a \in \{c, d\}$	(1)
(5)	$a = c \vee a = d$	(4)
(6)	$b \in \{c, d\}$	(1)
(7)	$b = c \vee b = d$	(6)
(8)	$(a = c \vee a = d) \wedge (b = c \vee b = d)$	A (5),(6)
(9)	$[a = c \wedge (b = c \vee b = d)] \vee [a = d \wedge (b = c \vee b = d)]$	ley dist. (8)
(10)	$[(a = c \wedge b = c) \vee (a = c \wedge b = d)] \vee [(a = d \wedge b = c) \vee (a = d \wedge b = d)]$	(9)
(11)	$a \neq b \Rightarrow \neg(a = c \wedge b = c)$	P
(12)	$a \neq b \Rightarrow \neg(a = d \wedge b = d)$	P
(13)	$\neg(a = c \wedge b = c)$	PP3,11
(14)	$\neg(a = d \wedge b = d)$	PP3,12
□(15)	$(a=c \wedge b=d) \vee (a=d \wedge b=c)$	TP_1 (10),(13) TP_2 (10),(14)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) (3)(4)(5) Si $a \neq b$ y como $a \in \{a, b\} = \{c, d\}$ entonces $a \in \{c, d\}$ y $a = c \vee a = d$. **(6)(7)** Como $b \in \{a, b\} = \{c, d\}$, $b = c \vee b = d$. **(8)** Entonces$(a = c \vee a = d) \wedge (b = c \vee b = d)$.**(9)(10)(11)(12)(13)(14)** Como $a \neq b$, no es posible que $(a = c \wedge b = c)$ ni tampoco que $(a = d \wedge b = d)$; **(15)** entonces, se concluye que $(a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c)$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Si $a \neq b$ y como $a \in \{a, b\} = \{c, d\}$ entonces $a \in \{c, d\}$ y $a = c \vee a = d$.

Como

$$b \in \{a, b\} = \{c, d\}, \text{ entonces } b = c \vee b = d.$$

Por lo tanto

$$(a = c \vee a = d) \wedge (b = c \vee b = d).$$

Como $a \neq b$, no es posible $(a = c \wedge b = c)$ ni tampoco que $(a = d \wedge b = d)$; entonces, se concluye que $(a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c)$.

2.3 Corolario $\{a, b\} = \{c\} \Leftrightarrow a = b = c$

2.4 Definición : $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, a y b se llaman respectivamente **la primera** y **la segunda coordenada de (a, b)** .

2.5 Proposición $(a, b) = (a, b) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

Demostración : Ejercicio.

EJERCICIO 2.1

1. 2.5
2. Demuestre que $(a, b) = \{ \{a, \emptyset\}, \{b, \{\emptyset\}\} \}$ también es una buena definición para (a, b). Mejor dicho, demuestre 2.5 a partir de esta definición.
3. $(a, a) = \{\{a\}\}$
4. $a \in (a, b)$?
5. $(a, b) \subseteq P(\{a, b\})$.

ACTIVIDAD PRÁCTICA – PROCESO IMITATIVO

1) 2.5

ELD

Demostrar $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

$\Rightarrow$ (1)	$(a, b) = (c, d)$	P
(2)	$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$	I 1,2.4
(3)	$(\{a\}= \{c\} \wedge \{a,b\} =\{c,d\})\vee (\{a\}= \{c,d\}\wedge \{a,b\}= \{c\})$	2

	(4)	$\{a\}=\{c\} \wedge \{a,b\}=\{c,d\} \Rightarrow a=c \wedge b=d$	P
	(5)	$\{a\}=\{c,d\} \wedge \{a,b\}=\{c\} \Rightarrow a=b=c=d$	P
	(6)	$a=b=c=d \Rightarrow a=c \wedge b=d$	P
	(7)	$\{a\}=\{c,d\} \wedge \{a,b\}=\{c\} \Rightarrow a=c \wedge b=d$	HS 5,6
	(8)	$(a=c \wedge b=d) \vee (a=c \wedge b=d)$	DS 3,47
	(9)	$a=c \wedge b=d$	DP 8
□$_1$	(10)	$(a, b) = (c, d) \Rightarrow a=c \wedge b=d$	CP 1,9
$\Leftarrow$)	(11)	$a=c \wedge b=d$	P
	(12)	$(a, b) = (c, d)$	11
□$_2$	(13)	$a=c \wedge b=d \Rightarrow (a, b) = (c, d)$	CP 11,12
□	(14)	$(a, b)=(c, d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$	LB 10,13

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.
(1) Sea $(a, b) = (c, d)$. **(2)** Entonces $\{\{a\},\{a, b\}\} = \{\{c\},\{c, d\}\}$ (2.4). **(3)**De esta igualdad se presentan dos alternativas :

$$\{a\}=\{c\} \wedge \{a, b\}=\{c, d\} \qquad (\text{ I })$$
o
$$\{a\}=\{c, d\} \wedge \{a, b\}=\{c\} \qquad (\text{ II })$$

(4) De (I) se desprende que $a = c \wedge b = d$. **(5)(6)(7)**De (II) también se desprende $a = c \wedge b = d$. **(8) (9)** Entonces cualquiera sea la alternativa que se tome siempre se tendrá que $a = c \wedge b = d$. **(10)**Luego

$$(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c \wedge b = d \qquad (*)$$

(11) Ahora si $a = c \wedge b = d$, **(12)**es inmediato que $(a, b) = (c, d)$.
(13) Luego

$$a = c \wedge b = d \Rightarrow (a, b) = (c, d) \qquad (**)$$

(14) De (*) y (**) se tiene la equivalencia $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.
Sea $(a, b) = (c, d)$. Entonces $\{\{a\},\{a, b\}\} = \{\{c\},\{c, d\}\}$ (2.4). De esta igualdad se presentan dos alternativas :

$$\{a\}= \{c\} \wedge \{a, b\} =\{c, d\} \quad \text{(I)}$$
o
$$\{a\}= \{c, d\}\wedge \{a, b\}= \{c\} \quad \text{(II)}$$

De (I) se desprende que $a = c \wedge b = d$. De (II) también se desprende que $a = c \wedge b = d$. Entonces cualquiera sea la alternativa que se tome siempre se tendrá que $a = c \wedge b = d$. Luego

$$(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c \wedge b = d \quad (*)$$

Ahora si $a = c \wedge b = d$, es inmediato que $(a, b) = (c, d)$. Luego

$$a = c \wedge b = d \Rightarrow (a, b) = (c, d) \quad (**)$$

De (*) y (**) se tiene la equivalencia $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$, que era lo que queríamos demostrar.

2. **ELD**

Demostrar $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

(1)	$\mathbf{(a, b) = \{\{a,\phi\},\{b, \{\phi\}\}\}}$	**P**
(2) $\Rightarrow$)	$(a, b) = (c, d)$	P
(3)	$\{\{a,\phi\},\{b, \{\phi\}\}\} =\{\{c,\phi\},\{d,\{\phi\}\}\}$	I 1,2
(4)	$(\{a,\phi\}= \{c,\phi\}\wedge\{b,\{\phi\}\}=\{d,\{\phi\}\})\vee(\{a,\phi\}= \{d,\{\phi\}\}\wedge\{b,\{\phi\}\}= \{c,\phi\})$	(3)
(5)	$\{a,\phi\}= \{d,\{\phi\}\}\wedge\{b,\{\phi\}\}= \{c,\phi\}$	P
(6)	$\{a,\phi\}= \{d,\{\phi\}\}$	S5
(7)	$(a = d \wedge \phi = \{\phi\})\vee(a = \{\phi\} \wedge \phi = d)$	6
(8)	$\phi = \{\phi\} \vee a = \{\phi\}$	S7 (ambos miembros)
(9)	$\urcorner(\{a,\phi\}= \{d,\{\phi\}\}\wedge\{b,\{\phi\}\}= \{c,\phi\})$	RAA 5,8
(10)	$\{a,\phi\}= \{c,\phi\}\wedge\{b,\{\phi\}\}=\{d,\{\phi\}\}$	TP4,9
(11)	$\{a,\phi\}= \{c,\phi\}\wedge\{b,\{\phi\}\}=\{d,\{\phi\}\} \Rightarrow a = c \wedge b = d$	P
(12)	$a = c \wedge b = d$	PP 10,11
□$_1$ (13)	$(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c \wedge b = d$	CP 11,12
(14)	$a = c \wedge b = d$	P
(15)	$(a, b) = (c, d)$	14
□$_2$ (16)	$a = c \wedge b = d \Rightarrow (a, b) = (c, d)$	CP14,15
□ (17)	$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$	LB 13,16

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

(2) Sea $(a, b) = (c, d)$. **(3)**Entonces $\{\{a,\phi\},\{b, \{\phi\}\}\} =\{\{c,\phi\},\{d,\{\phi\}\}\}$, de acuerdo a la definición 2 de par ordenado. **(4)** De esta igualdad se presentan dos alternativas :

$$\{a,\phi\}= \{c,\phi\}\wedge\{b,\{\phi\}\}=\{d,\{\phi\}\} \quad (\text{ I })$$
o
$$\{a,\phi\}= \{d,\{\phi\}\}\wedge\{b,\{\phi\}\}= \{c,\phi\} \quad (\text{ II })$$

(5) (6) (7) Veamos que la alternativa (II) no es posible.

Si$\{a,\phi\}= \{d,\{\phi\}$ y $\{b,\{\phi\}\} = \{c,\phi\}$, en particular se tendría que $\{a,\phi\}= \{d,\{\phi\}\}$o sea que$(a = d \wedge \phi = \{\phi\}) \vee (a = \{\phi\}\wedge\phi = d)$. **(8)**De donde $\phi = \{\phi\} \vee a = \{\phi\}$ que es un absurdo. **(9)**Esto indica que la alternativa (II) no es posible. **(10)**Luego lo que es posible es la alternativa (I) o sea $\{a,\phi\}= \{c,\phi\}\wedge\{b,\{\phi\}\}=\{d,\{\phi\}\}$. **(11) (12)**De donde $a = c \wedge b = d$. **(13)**Así que se cumple la implicación

$$(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c \wedge b = d\,. \quad (*)$$

(14) Sea ahora $a = c \wedge b = d$. **(15)** Es inmediato que $(a, b) = (c, d)$. **(16)**Luego

$$a = c \wedge b = d \Rightarrow (a, b) = (c, d)\,. \quad (**)$$

(17) De (*) y (**) se tiene la equivalencia $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

Sea $(a, b) = (c, d)$. Entonces $\{\{a,\phi\},\{b, \{\phi\}\}\} =\{\{c,\phi\},\{d,\{\phi\}\}\}$, de acuerdo a la definición 2 de par ordenado. De esta igualdad se presentan dos alternativas :

$$\{a,\phi\}= \{c,\phi\}\wedge\{b,\{\phi\}\}=\{d,\{\phi\}\} \quad (\text{ I })$$
o
$$\{a,\phi\}= \{d,\{\phi\}\}\wedge\{b,\{\phi\}\}= \{c,\phi\} \quad (\text{ II })$$

Veamos que la alternativa (II) no es posible.

Si $\{a,\phi\}=\{d,\{\phi\}\}$ y $\{b,\{\phi\}\}=\{c,\phi\}$,
en particular se tendría

$$\{a,\phi\}=\{d,\{\phi\}\}$$

o sea

$$(a = d \wedge \phi = \{\phi\}) \vee (a = \{\phi\} \wedge \phi = d).$$

De donde

$$\phi = \{\phi\} \vee a = \{\phi\}$$

que es un absurdo.

Esto indica que la alternativa (II) no es posible. Luego lo que es posible es la alternativa (I) o sea $\{a,\phi\} = \{c,\phi\} \wedge \{b,\{\phi\}\} = \{d,\{\phi\}\}$. De donde se tendrìa la proposiciòn $a = c \wedge b = d$. Así que se cumple la implicación

$$(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c \wedge b = d . \quad (*)$$

Sea ahora $a = c \wedge b = d$. Es inmediato que $(a, b) = (c, d)$. Luego

$$a = c \wedge b = d \Rightarrow (a, b) = (c, d) . \quad (**)$$

De (*) y (**) se tiene la equivalencia $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$, que era lo que queríamos demostrar.

3. $(a, a) = \{\{a\}\}$

ELD

Demostrar : $(a, a) = \{\{a\}\}$

(1)	**$(a, b) = \{\{a\},\{a, b\}\}$**	**2.4**
(2)	$(a, a) = \{\{a\},\{a, a\}\}$	*a/b* 1
(3)	$\{\{a\},\{a, a\}\} = \{\{a\}\}$	P
□(4)	$(a, a) = \{\{a\}\}$	I 2,3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $(a, a) = \{\{a\}\}$.
(2)$(a, a) = \{\{a\},\{a, a\}\}$ (2.4). **(3)** Pero $\{\{a\},\{a, a\}\} = \{\{a\}\}$,
(4) luego $(a, a) = \{\{a\}\}$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $(a, a) = \{\{a\}\}$.

$(a, a) = \{\{a\},\{a, a\}\}$ (2.4). Pero $\{\{a\},\{a, a\}\} = \{\{a\}\}$,
luego $(a, a) = \{\{a\}\}$.

4. $a \in (a,b)$?
   $(a, b) = \{\{a\},\{a, b\}\}$. Claramente $a \notin (a,b)$.

5. $(a,b) \subseteq \mathcal{P}(\{a,b\})$

   $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\phi, \{a\},\{b\},\{a, b\}\}$

   $(a, b) = \{\{a\},\{a, b\}\}$

   Claramente $(a,b) \subseteq \mathcal{P}(\{a,b\})$.

2. PRODUCTO CARTESIANO

2.6 Definición $A\times B = \{ (x, y) / x \in A \wedge x\in B \}$

Caracterización de los elementos de un producto cartesiano:

$$(x, y) \in A\times B \leftrightarrow x \in A \wedge y\in B$$

Siempre es bueno conocer la negación de una proposición. ¿Cuándo una pareja ordenada no es elemento de un producto cartesiano?

$$\begin{aligned} \mathbf{(x, y) \notin A\times B} &\leftrightarrow \rceil(x \in A \wedge y\in B) \\ &\leftrightarrow \rceil(x \in A) \vee \rceil(y\in B) \\ &\leftrightarrow \mathbf{x\notin A \vee y\notin B} \end{aligned}$$

Ejemplo: Sean $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$
Entonces $A\times B = \{1, 2\}\times\{a, b, c\} = \{(1, a) (1, b) (1, c) (2, a) (2, b) (2, c)\}$

Así $(1, c) \in A\times B$ ya que $1\in A \wedge 1\in B$
Pero $(2, d) \notin A\times B$ ya que aunque $2\in A$, $d\notin B$
Igualmente $(3, b) \notin A\times B$ porque aunque $b\in B$, $3\notin A$

$\mathbf{A^2 = A\times A}$, $A\times B$ se llama **el producto cartesiano** de A por B.

Es claro que en general $A\times B \neq B\times A$ (Véase el ejercicio 2.2 (2)).

2.7 Proposición $A\times B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing \vee B = \varnothing$

Demostración : Sentido ($\Rightarrow$)

ELD$_1$

Demostrar $A = \varnothing \vee B = \varnothing$

Por RAA

(1)	$\mathbf{A\times B = \varnothing}$	**P**
(2)	$\neg(A = \varnothing \vee B = \varnothing)$	P
(3)	$\neg(A = \varnothing) \wedge \neg(B = \varnothing)$	DL 2
(4)	$A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing$	traducción 3
(5)	$\exists x: x\in A \wedge \exists y: y\in B$	(4) y 1.6(ii)
(6)	$\exists (x, y)\in A\times B$	traducción 5
(7)	$A\times B \neq \varnothing$	traducción (6)
(8)	$A\times B = \varnothing \wedge A\times B \neq \varnothing$	A 1,7
$\square_1$ (9)	$A = \varnothing \vee B = \varnothing$	RAA 2, 8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) (3) (4) Supongamos lo contrario, es decir que $A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing$; **(5)** esto implica que existen elementos x e y tales que $x\in A$ y $y\in B$ 1.6(ii). **(6) (7)** O sea que existe (x, y) tal que $(x, y) \in A\times B$, es decir $A\times B \neq \varnothing$ 1.6(ii). **(8)** Pero esto contradice la hipótesis de que $A\times B = \varnothing$.**(9)** Luego $A = \varnothing \vee B = \varnothing$ $\square_1$

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario, es decir que $A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing$; esto implica que existen elementos x e y tales que $x\in A$ y $y\in B$. O sea que existe (x, y) tal que $(x, y) \in A\times B$, es decir que $A\times B \neq \varnothing$. Pero esto contradice la hipótesis de que $A\times B = \varnothing$. Luego $A = \varnothing \vee B = \varnothing$ $\square_1$

El lector puede demostrar la otra implicación.

2.8 Proposición

(i) $A\times(B\cap C) = (A\times B) \cap (A\times C)$

(ii) $A\times(B\cup C) = (A\times B) \cup (A\times C)$

(iii) $A\times(B-C) = (A\times B) - (A\times C)$

Demostración (i)

ELD

Demostrar $A\times(B\cap C) = (A\times B) \cap (A\times C)$

Traducción $(x, y) \in A\times(B\cap C) \Leftrightarrow (x, y) \in(A\times B) \cap (A\times C)$

$(x, y) \in A\times(B\cap C)$	$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B\cap C$	2.6
	$\Leftrightarrow x\in A \wedge (y\in B \wedge y\in C)$	1.11(i)
	$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B) \wedge (y\in B \wedge y\in C)$	Adjunción
	$\Leftrightarrow (x, y)\in(A\times B) \wedge (x, y)\in(B\times C)$	2.6
	$\Leftrightarrow (x, y) \in(A\times B) \cap (A\times C)$	1.11(i)

Demostración de (ii) : Ejercicio

Demostración de (iii):

ELD

Demostrar $A\times(B-C) = (A\times B) - (A\times C)$

Traducción $(x, y) \in A\times(B-C) \Leftrightarrow (x, y)\in(A\times B) - (A\times C)$

$(x, y) \in A\times(B-C)$	$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B-C$	2.6
	$\Leftrightarrow x\in A \wedge (y\in B \wedge y\notin C)$	1.16
	$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B) \wedge y\notin C$	p. asociativa
	$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B) \wedge (x\in A \wedge y\notin C)$	Adjunción
	$\Leftrightarrow (x, y)\in(A\times B) \wedge (x, y)\notin(A\times C)$	2.6
	$\Leftrightarrow (x, y)\in(A\times B) - (A\times C)$	2.16

2.9 Proposición $(A\times B) \cap (C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$

Demostración :

ELD

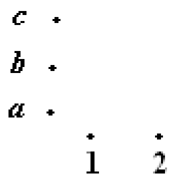
Demostrar$(A\times B) \cap (C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$

Traducción $(x, y)\in(A\times B) \cap (C\times D) \Leftrightarrow (x, y)\in (A\cap C)\times(B\cap D)$

$(x, y)\in(A\times B) \cap (C\times D)$	$\Leftrightarrow (x, y)\in(A\times B) \wedge (x, y)\in (C\times D)$	1.11(i)
	$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B) \wedge (x\in C \wedge y\in D)$	2.6
	$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B \wedge x\in C \wedge y\in D$	
	$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\in C \wedge y\in B \wedge y\in D$	ley conmutativa
	$\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in C) \wedge(y\in B \wedge y\in D)$	
	$\Leftrightarrow x\in A \cap C \wedge y\in B \cap D$	1.11(i)
	$\Leftrightarrow (x, y)\in(A \cap C) \times(B \cap D)$	2.6

Así como las proposiciones sobre conjuntos se pueden ilustrar a veces con los diagramas de Venn, las proposiciones sobre productos cartesianos también tienen su manera de ilustrarlos. Tómese el ejemplo después de 2.6. Al conjunto {1, 2} lo representaremos por 2 puntos colocados horizontalmente :

Al conjunto {*a*,*b*,*c*} lo representaremos por tres puntos colocados verticalmente y a la izquierda y arriba del 1.



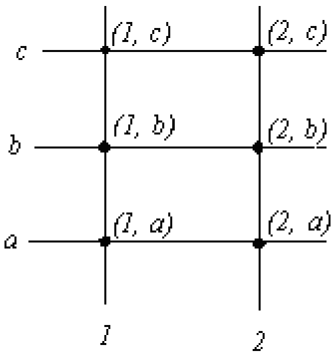


Fig. 7

Luego trazamos verticales por los puntos 1 y 2 y horizontales por los puntos a, b y c. El punto donde se corta la vertical de 1 con la horizontal de b, representará al punto (1, b) y diremos que (1, b) son las coordenadas de este punto.

Otro ejemplo :

Sea A = [2, 10] o sea todos los reales entre 2 y 10 incluyendo a 2 y a 10. Sea B = [3, 5]. En contraste con el ejemplo anterior en que $\{1, 2\}\times\{a, b, c\}$ estaba representada por 6 puntos, A×B resultará representada por un número infinito de puntos (tanto A como B son conjuntos infinitos) que forman un rectángulo, incluyendo el interior. (Fig. 8).

Si ahora tomamos $\Re\times\Re = \Re^2$, nos resulta el plano XY con el cual el lector debe estar familiarizado. No obtenemos un rectángulo, sino un plano infinito. Téngase presente que los conjuntos con los cuales formemos productos cartesianos pueden ser todavía más complejos de tal manera que este tipo de representaciones no sean posibles.

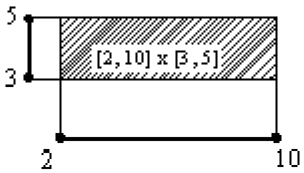


Fig.8

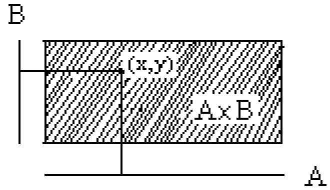


Fig.9

Recordando las restricciones a que nos hemos referido, visualizaremos al producto A×B por un rectángulo (Fig. 9).

Visualicemos por ejemplo la proposición 2.9

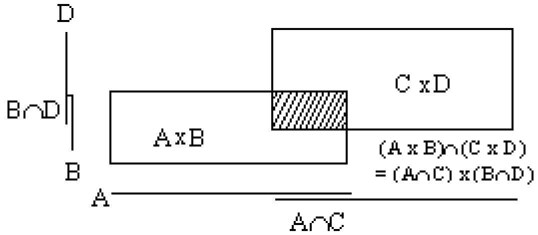


Fig. 10

Estas representaciones son útiles para ver que algo no es cierto.

EJERCICIO 2.2

1. $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$
2. $A \neq \emptyset \wedge A \times B \subseteq A \times C \Rightarrow B \subseteq C$
3. $A \subseteq B \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$
4. (i) $(A \times B) \cup (C \times D) \neq (A \cup C) \times (B \cup D)$
   (ii) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$
5. Es $(A \text{ x } B) - (C \text{ x } D) = (A-C) \text{ x } (B-D)$?
6. Es posible que $A \cap (B \text{ x } C) = (A \cap B) \text{ x } (A \cap C) \neq \emptyset$, con $A, B, C \neq \emptyset$? Mejor dicho, existen A, B, C todos no vacíos que cumplan esta propiedad ?
7. Es posible que $A \cup (B \text{ x } C) = (A \cup B) \text{ x } (A \cup C) \neq \emptyset$ y con $A, B, C \neq \emptyset$?
8. Es posible que $A-(B \text{ x } C) = (A-B) \text{ x } (A-C) \neq \emptyset$ y con $A, B, C \neq \emptyset$?
9. $A^2 \cap (B \text{ x } C) = (A \cap B) \text{ x } (A \cap C)$
10. $(A \times B) - C^2 = [(A-C) \times B] \cup [A \times (B-C)]$
11. $A^2 - (B \times C) = [(A-B) \times A] \cup [A \times (A-C)]$

12. $(A \times B)' = (A' \times B') \cup (A' \times B) \cup (A \times B')$
13. $A \cap B \neq \varnothing \wedge C \neq \varnothing \Leftrightarrow (A \times C) \cap (B \times C) \neq \varnothing$
14. $C, D \neq \varnothing \Rightarrow [(C \subseteq A \wedge D \subseteq B) \Leftrightarrow C \times D \subseteq A \times B]$
15. $A, B, C, D \neq \varnothing \Rightarrow (A \times B = C \times D \Leftrightarrow A = C \wedge B = D)$
16. $(A \times B) \cap (A' \times C) = \varnothing$ (use RAA)
17. Sea $A = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Qué sólido representa a $(A - [0, 1]^2) \times [0, 1]$?

18. (A x B) x C $\neq$ A x (B x C)
19. (i) $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$
(ii) $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
(iii) $(B - C) \times A = (B \times A) - (C \times A)$
20. $A \times B \subseteq \mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B)$

ACTIVIDAD PRÀCTICA – PROCESO IMITATIVO

1. $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B$

1. $\Rightarrow$)

ELD

Demostrar $A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B$

Por RAA

(1)	**$A \times B = B \times A$**	**P**
(2)	$\neg(A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B)$	P
(3)	$A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing \wedge A \neq B$	DL 2
(4)	$A \times B = A \times B$	L
(5)	$A \neq B$	S3
(6)	$A \times B \neq B \times B$	4,5
(7)	$B \times A = B \times A$	L
(8)	$B \times A \neq B \times B$	4,7
(9)	$A \times B \neq B \times A$	6,8
(10)	$A \times B = B \times A \wedge A \times B \neq B \times A$	A 1,9
□(11)	$A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B$	RAA 2,10

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B$.

(2) (3) Supongamos lo contrario, es decir que $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ y $A \neq B$. **(4)**Sea la certeza lógica $A \times B = A \times B$. **(5)(6)**Entonces $A \times B \neq B \times B$ debido a que $A \neq B$. **(7) (8)** Por la misma razón $B{\times}A \neq B{\times}B$.**(9)**De estos dos resultados se tiene que $A{\times}B \neq B{\times}A$. **(10)**Pero esto contradice el supuesto de que $A{\times}B = B{\times}A$. **(11)** Luego $A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B$

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B$.

Supongamos lo contrario:

$$A \neq \varnothing,\ B \neq \varnothing \text{ y } A \neq B.$$

Sea la certeza lógica

$$A \times B = A \times B\ .$$

Entonces

$$A \times B \neq B \times B$$

debido a que $A \neq B$.

Por la misma razón, $B \times A \neq B \times B$. De estos dos resultados se tiene que $A \times B \neq B \times A$. Pero esto contradice el supuesto de que $A \times B = B \times A$. Luego $A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B$

1. $\Leftarrow$)

ELD

Demostrar $A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B \Rightarrow A \times B = B \times A$

(1)	$A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B$	**P**
(2)	$A = \varnothing$	P, 1
(3)	$A \times B = \varnothing \times B = \varnothing$	2, 2.7
(4)	$B \times A = B \times \varnothing = \varnothing$	2, 2.7
(5)	$A \times B = B \times A$	I 3,4
(6)	$A = \varnothing \Rightarrow A \times B = B \times A$	CP 2,5
(7)	$B = \varnothing$	P,1
(8)	$A \times B = A \times \varnothing = \varnothing$	7, 2.7
(9)	$B \times A = \varnothing \times A = \varnothing$	7, 2.7
(10)	$A \times B = B \times A$	I 8, 9
(11)	$B = \varnothing \Rightarrow A \times B = B \times A$	CP 7,10
(12)	$A = B$	P,1
(13)	$A \times B = B \times B$	(12)
(14)	$B \times A = B \times B$	(12)
(15)	$A \times B = B \times A$	I 13, 14

(16)	$A = B \Rightarrow A \times B = B \times A$	CP 12,15
(17)	$(A{\times}B = B{\times}A) \vee (A{\times}B = B{\times}A) \vee (A{\times}B = B{\times}A)$	DS 1,6,11,16
(18)	$A \times B = B \times A$	DP 17
(19)	$A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B \Rightarrow A \times B = B \times A$	CP 1,18

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B \Rightarrow A \times B = B \times A$.
(1) Supongamos que se cumple la disjunción : $A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B$.

(2) (3) (4) (5) (6) Si se cumple la alternativa $A = \varnothing$, debido a que $A{\times}B = \varnothing{\times}B = \varnothing$ y $B \times A = B \times \varnothing = \varnothing$, entonces $A{\times}B = B{\times}A$.

(7) (8) (9) (10) (11) Si se cumple la alternativa $B = \varnothing$, debido a que $A{\times}B = A{\times}\varnothing = \varnothing$ y $B \times A = \varnothing{\times}A = \varnothing$, entonces $A{\times}B = B{\times}A$.

(12) (13) (14) (15) (16) Si se cumple la alternativa $A = B$, debido a que $A{\times}B = B{\times}B$ y $B{\times}A = B{\times}B$, entonces $A{\times}B = B{\times}A$.

(17) (18) (19) Por lo tanto, cualquiera sea la alternativa que se cumpla, el resultado es que $A{\times}B = B{\times}A$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B$
$\Rightarrow$) Supongamos lo contrario: $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ y $A \neq B$. Sea la certeza lógica $A \times B = A \times B$. Entonces $A \times B \neq B \times B$ debido a que $A \neq B$. Por la misma razón $B \times A \neq B \times B$. De estos dos resultados se tiene que $A \times B \neq B \times A$. Pero esto contradice la hipótesis de que $A \times B = B \times A$.
Luego $A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B$.

$\Leftarrow$) Supongamos que se cumple la disjunción $A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B$. Si $A = \varnothing$, debido a que $A{\times}B = \varnothing{\times}B = \varnothing$ y $B{\times}A = B{\times}\varnothing = \varnothing$, entonces $A{\times}B = B{\times}A$.

Si $B = \varnothing$, debido a que $A{\times}B = A{\times}\varnothing = \varnothing$ y $B{\times}A = \varnothing{\times}A = \varnothing$, entonces $A{\times}B = B{\times}A$.

Si $A = B$, debido a que $A{\times}B = B{\times}B$ y $B{\times}A = B{\times}B$, entonces $A{\times}B = B{\times}A$.

Por lo tanto, cualquiera sea la alternativa que se cumpla, el resultado es que A×B = B×A.

2. $A \neq \varnothing \wedge A \times B \subseteq A \times C \Rightarrow B \subseteq C$

ELD

Demostrar $B \subseteq C$

Traducción : $y \in B \Rightarrow y \in C$

(1)	$\mathbf{A \neq \varnothing}$	**P**
(2)	$\mathbf{A \times B \subseteq A \times C}$	**P**
(3)	$y \in B$	P
(4)	$\exists x \in A$	1, 1.5(ii)
(5)	$(x, y) \in A\times B$	4,3,2.6
(6)	$(x, y) \in A\times C$	5,2
(7)	$y \in C$	6, 2.6
(8)	$y \in B \Rightarrow y \in C$	CP 3,7
□(9)	$B \subseteq C$	trad. 7, 1.3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $B \subseteq C$.
(3) Sea $y \in B$. **(4)** Debido a que $A \neq \varnothing$, existe $x \in A$(1.5(ii)). **(5)** Entonces $(x, y) \in A\times B$(2.6). **(6)** Debido a que $A \times B \subseteq A \times C$, $(x, y) \in A\times C$. **(7)** De donde $y \in C$ (2.6). **(8)** **(9)**Por lo tanto $B \subseteq C$. □

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $B \subseteq C$. Sea $y \in B$.Debido a que $A \neq \varnothing$, existe $x \in A$(1.5(ii)).Entonces $(x, y) \in A\times B$(2.6). Debido a que $A \times B \subseteq A \times C$, entonces $(x, y) \in A\times C$. De donde $y \in C$ (2.6). Por lo tanto, $B \subseteq C$. □

3: $A \subseteq B \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$

ELD

Demostrar $A \times C \subseteq B \times C$

Traducción : $(x, y) \in A\times C \Rightarrow (x, y) \in B\times C$

(1)	$\mathbf{A \subseteq B}$	**P**

(2)	$(x, y) \in A \times C$	P
(3)	$x \in A \wedge y \in C$	trad.2,2.6
(4)	$x \in A$	S3
(5)	$x \in B$	4,1
(6)	$y \in C$	S 3
(7)	$(x, y) \in B \times C$	5, 6, 2.6
(8)	$(x, y) \in A \times C \Rightarrow (x, y) \in B \times C$	CP2,7
□(9)	$A \times C \subseteq B \times C$	trad. 8, 1.3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que A × C ⊆ B × C.
(2) Sea $(x, y) \in A \times C$. **(3)**Entonces $x \in A \wedge y \in C$ (2.6). **(4)**En particular $x \in A$. **(5)**Como por hipótesis A ⊆ B, $x \in B$. **(6)**De donde $(x, y) \in B \times C$. **(7)** **(8)**Luego A × C ⊆ B × C.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que A × C ⊆ B × C.
Sea $(x, y) \in A \times C$. Entonces $x \in A \wedge y \in C$ (2.6). En particular $x \in A$. Como por hipótesis A ⊆ B, entonces $x \in B$. Es decir que $(x, y) \in B \times C$. Luego A × C ⊆ B × C.

4. (i) : (A × B) ∪ (C × D) ≠ (A ∪ C) × (B ∪ D)

$$A = \{1,2\},\ C = \{3\},\ \ B = \{a,b\},\ D = \{a\}$$
$$A \cup C = \{1,2,3\}, \quad B \cup D = \{a,b\}$$
$$(A \cup C) \times (B \cup D) = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$
$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$$
$$C \times D = \{(3,a)\}$$
$$(A \times B) \cup (C \times D) = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a)\}$$

Por lo tanto,

$(A \cup C) \times (B \cup D) \neq (A \times B) \cup (C \times D)$, ya que $(3,b) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$ pero $(3,b) \notin (A \times B) \cup (C \times D)$.□

4(ii): (A × B) ∪ (C × D) ⊆ (A ∪ C) × (B ∪ D)

ELD

Demostrar $(A\times B)\cup(C\times D)\subseteq(A\cup C)\times(B\cup D)$

Traducción: $(x,y)\in(A\times B)\cup(C\times D)\Rightarrow(x,y)\in(A\cup C)\times(B\cup D)$

(1)	$(x,y)\in(A\times B)\cup(C\times D)$	P
(2)	$(x,y)\in(A\times B)\vee(x,y)\in(C\times D)$	I 1, 1.11(ii)
(3)	$(x\in A\wedge y\in C)\vee(x\in C\wedge y\in D)$	I 2,2.6
(4)	$((x\in A\wedge y\in B)\vee x\in C))\wedge((x\in A\wedge y\in B)\vee y\in D)$	I 3, ley dist.
(5)	$(x\in A\vee x\in C)\wedge(y\in B\vee y\in D)$	S 4 (ambos miembros)
(6)	$x\in A\cup C\wedge y\in B\cup D$	I 5, 1.11(ii)
(7)	$(x,y)\in(A\cup C)\times(B\cup D)$	I 6, 2.6
(8)	$(x,y)\in(A\times B)\cup(C\times D)\Rightarrow(x,y)\in(A\cup C)\times(B\cup D)$	CP1,7
□(9)	$(A\times B)\cup(C\times D)\subseteq(A\cup C)\times(B\cup D)$	I 8, 1.3

5. Es (A x B) – (C x D) = (A–C) x (B–D)? La respuesta es no.

$A=\{1,2\}$, $C=\{1,2\}$, $B=\{a,b\}$, $C=\{c\}$

$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$

$C\times D=\{(1,c),(2,c)\}$

$(A\times B)-(C\times D)=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$

$A-C=\phi$

$B-D=B$

$(A-C)\times(B-D)=\phi\times B=\phi$

$\therefore (A\times B)-(C\times D)\neq(A-C)\times(B-D)$

6. Si $\exists A,B,C\neq\phi : A\cap(B\times C)=(A\cap B)\times(A\cap C)\neq\phi$ entonces
$\forall(x,y)((x,y)\in A\cap(B\times C)\Leftrightarrow(x,y)\in(A\cap B)\times(A\cap C)$

Esto implicaría $(x,y)\in A\wedge x\in A$ y $y\in B\wedge(x,y)\in B$, lo cual no es consistente con la definición de producto cartesiano.

7. Idem 8. Idem

9. **ELD**

Demostrar : A ^{2} ∩ (B x C) = (A ∩ B) x (A ∩ C)

Traducción : (x, y)∈A ^{2} ∩ (B x C) ⇔ (x, y)∈(A ∩ B) x (A ∩ C)

$(x, y)\in A^2 \cap (B \text{ x } C) \Leftrightarrow (x, y)\in(A\times A) \cap (B \text{ x } C)$

$\Leftrightarrow (x, y)\in(A\times A) \wedge (x, y)\in(B \text{ x } C)$ 1.11(i)

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in A) \wedge (x \in B \wedge y \in C)$ 2.6

$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in A \wedge x \in B \wedge y \in C$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge y \in A \wedge y \in C$ Conm. Ax.

$\Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in A \cap C$ 1.11(i)

$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap B) \times (A \cap C)$ 2.6

10.

ELD

Demostrar $(A \times B) - C^2 = [(A-C) \times B] \cup [A \times (B-C)]$

Traducción $(x, y) \in (A \times B) - C^2 \Leftrightarrow (x, y) \in [(A-C) \times B] \cup [A \times (B-C)]$

$(x, y) \in A \times B - C^2 \Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \notin C^2$ 1.16

$\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \notin C \times C$ traducción

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B) \wedge \neg [(x, y) \in (C \times C)]$ 2.6

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B) \wedge \neg [x\in C \wedge y\in C)]$ 2.6

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B) \wedge [\neg (x\in C) \vee \neg (y\in C)]$ ley de Morgan

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B) \wedge (x\notin C \vee y\notin C)$ traducción

$\Leftrightarrow [(x\in A \wedge y\in B) \wedge x\notin C] \vee [(x\in A \wedge y\in B) \wedge y\notin C]$ p. distributiva

$\Leftrightarrow [x\in A \wedge (y\in B \wedge x\notin C)] \vee [(x\in A \wedge (y\in B \wedge y\notin C)]$ p. asociativa

$\Leftrightarrow [x\in A \wedge (x\notin C \wedge y\in B)] \vee [x\in A \wedge (y\in B \wedge y\notin C]$ p. conmutativa

$\Leftrightarrow [(x\in A \wedge x\notin C) \wedge y\in B)] \vee [(x\in A \wedge (y\in B \wedge y\notin C]$ p. asociativa

$\Leftrightarrow (x\in A-C \wedge y\in B) \vee (x\in A \wedge y\in B-C)$ 1.16

$\Leftrightarrow (x, y) \in (A-C) \times B \vee (x, y) \in A \text{ x } (B-C)$ 2.6

$\Leftrightarrow (x, y) \in [(A-C) \times B] \cup [A \times (B-C)]$ 1.11(ii)

11.

ELD

Demostrar : $A^2 - (B \times C) = [(A-B) \times A] \cup [A \times (A-C)]$

traducción $(x, y)\in A^2 - (B \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in [(A-B) \times A] \cup [A \times (A-C)]$

$(x,y)\in A^2 -(B\times C)\Leftrightarrow(x,y)\in A\times A \wedge (x, y)\notin(B\times C)$ 1.16

$\Leftrightarrow(x,y)\in A\times A\wedge(x\notin B\vee y\notin C)$ traducción

$\Leftrightarrow [(x,y)\in A\times A)\wedge \notin B] \vee [(x, y)\in A\times A) \wedge y\notin C)]$ ley dist.

$\Leftrightarrow [(x\in A \wedge y\in A)\wedge x\notin B]\vee[(x\in A\wedge y\in A)\wedge y\notin C)]$ Def. ×
$\Leftrightarrow [x\in A\wedge(y\in A\wedge x\notin B)]\vee[(x\in A\wedge y\in A)\wedge y\notin C)]$ p. asoc.
$\Leftrightarrow[x\in A\wedge(x\notin B\wedge y\in A)]\vee [(x\in A\wedge y\in A)\wedge y\notin C)]$ p.Conm.
$\Leftrightarrow [(x\in A\wedge x\notin B)\wedge y\in A]\vee [x\in A \wedge (y\in A\wedge y\notin C)]$ p. asoc.
$\Leftrightarrow [x\in(A-B)\wedge y\in A]\vee[x \in A \wedge y \in(A-C)]$ 1.16
$\Leftrightarrow (x,y)\in[(A-B)\times A]\vee(x,y)\in [A \times (A-C)]$ 2.6
$\Leftrightarrow(x,y)\in[(A-B)\times A]\cup[A\times(A-C)]$ 1.11(ii)

12.

ELD

Demostrar $(A \times B)' = (A'\times B') \cup (A'\times B) \cup (A\times B')$

Traducción $(x, y)\in (A \times B)' \Leftrightarrow (x, y)\in(A'\times B') \cup (A'\times B) \cup (A\times B')$

$(x, y)\in (A \times B)' \Leftrightarrow (x, y)\notin(A\times B)$ Def. complemento
$\Leftrightarrow((x, y) \in A\times B)$ traducción
$\Leftrightarrow \rceil(x\in A\wedge y\in B)$ traducción
$\Leftrightarrow \rceil(x\in A) \wedge \neg (y\in B)$ ley de Morgan
$\Leftrightarrow x\notin A)\wedge y\notin B$ traducción
$\Leftrightarrow(x\notin A\wedge y\notin B)\vee(x\notin A\wedge y\in B) \vee (x\in A\wedge y\notin B)$ traducción
$\Leftrightarrow (x\in A'\wedge y\in B')\vee(x\in A'\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in B')$ Compl.

$\Leftrightarrow (x, y)\in A'\times B' \vee (x, y)\in A'\times B \vee (x, y)\in A\times B'$ 2.6
$\Leftrightarrow (x, y)\in(A'\times B') \cup (A'\times B) \cup (A\times B')$ 1.11(ii)

13. $A \cap B \neq \varnothing \wedge C \neq \varnothing \Leftrightarrow (A \times C) \cap (B \times C) \neq\varnothing$

$\Rightarrow$)

ELD

Demostrar $(A \times C) \cap (B \times C) \neq\varnothing$

Por RAA

(1)	$\mathbf{A \cap B \neq \varnothing}$	**P**
(2)	$\mathbf{C \neq \varnothing}$	**P**
(3)	$(A \times C) \cap (B \times C) = \varnothing$	P
(4)	$\exists x \in A\cap B$	I 1, 1.6(ii)
(5)	$x \in A \wedge x \in B$	I 4, 1.11(i)
(6)	$\exists y \in C$	I 2, 1.6(ii)
(7)	$x \in A \wedge y \in C \wedge x \in B$	I 5,6
(8)	$x \in A \wedge y \in C \wedge x \in B \wedge y \in C$	A7
(9)	$\exists(x, y) : (x, y) \in A\times C \wedge (x, y) \in B\times C$	I 8, 2.6
(10)	$\exists(x, y) : (x, y) \in (A\times C)\cap(B\times C)$	I 9, 2.6

(11)	(A × C) ∩ (B × C) ≠∅	I 10, 1.6(i)
(12)	(A × C) ∩ (B × C) = ∅ ∧ (A × C) ∩ (B × C) ≠∅	A 3,11
□ (13)	(A × C) ∩ (B × C) ≠∅	RAA 3,12

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que (A × C) ∩ (B × C) ≠∅.
(3) Supongamos lo contrario, es decir (A × C) ∩ (B × C) = ∅.**(4) (5) (6)** Debido a que, por hipótesis, A ∩ B ≠ ∅ y C ≠ ∅, existen $x \in A \cap B$ y $y \in C$ (1.6(ii)). **(7) (8)**De donde $x \in A \wedge y \in C \wedge x \in B \wedge y \in C$;**(9)**o sea $(x, y) \in A \times C \wedge (x, y) \in B \times C$ (2.6). **(10)** Es decir $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$; **(11)** lo que indica que (A × C) ∩ (B × C) ≠∅ (1.6(i)).**(12)** Pero esto contradice la hipótesis (A × C) ∩ (B × C) = ∅.**(13)** Luego, (A × C) ∩ (B × C) ≠∅.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario, es decir (A × C) ∩ (B × C) = ∅. Debido a que, por hipótesis, A ∩ B ≠ ∅ y C ≠ ∅, existen $x \in A \cap B$ y $y \in C$ (1.6(ii)).

De donde

$$x \in A \wedge y \in C \wedge x \in B \wedge y \in C;$$

Por lo tanto

$$(x, y) \in A \times C \wedge (x, y) \in B \times C \text{ (2.6).}$$

Es decir

$$(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C);$$

lo que indica que (A × C) ∩ (B × C) ≠∅ (1.6(i)). Pero esto contradice la hipótesis (A × C) ∩ (B × C) = ∅. Luego, (A × C) ∩ (B × C) ≠∅.

⇐) **ELD**

Demostrar A ∩ B ≠ ∅ ∧ C ≠ ∅

(1)	**(A × C) ∩ (B × C) ≠∅**	**P**
(2)	∃ (x, y)∈(A × C) ∩ (B × C)	1, 1.6(ii)
(3)	(x, y)∈ A × C ∧ (x, y)∈B × C	2, 1.11(i)
(4)	$x \in A \wedge y \in C \wedge x \in B \wedge y \in C$	3, 2.6
(5)	$x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C$	S4
(6)	$x \in A \cap B \wedge y \in C$	5, 1.11(i)
(7)	$A \cap B \neq \phi \wedge C \neq \phi$	6, 1.6(i)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

$\Leftarrow$) Vamos a demostrar que $A \cap B \neq \phi \wedge C \neq \phi$.
(1) (2) Por hipótesis (A × C) ∩ (B × C) ≠∅, entonces existe (x, y) tal que (x, y)∈(A × C) ∩ (B × C).). **(3)**Es decir (x, y)∈ A × C ∧ (x, y)∈B × C; **(4)** o sea $x \in A \wedge y \in C \wedge x \in B \wedge y \in C$**.** **(5)**De donde $x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C$, **(6)**y $x \in A \cap B \wedge y \in C$ (1.11(i)). **(7)** Pero esto significa que $A \cap B \neq \phi$ y $C \neq \phi$ (1.6(i))**.**

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar A ∩ B ≠ ∅ ∧ C ≠ ∅ ⇔ (A × C) ∩ (B × C) ≠∅

⇒) Supongamos lo contrario, es decir que(A × C) ∩ (B × C) = ∅. Debido a que por hipótesis A ∩ B ≠ ∅ y C ≠ ∅, existen $x \in A \cap B$ y $y \in C$ (1.6(ii)). De donde tiene que $x \in A \wedge y \in C \wedge x \in B \wedge y \in C$; o sea $(x,y) \in A \times C \wedge (x,y) \in B \times C$. De donde $(x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$; lo que implica que (A × C) ∩ (B × C) ≠∅. Pero esto contradice la hipótesis de que (A × C) ∩ (B × C) = ∅. Luego, (A × C) ∩ (B × C) ≠∅.

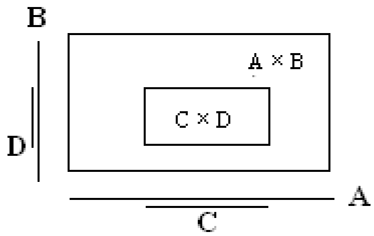
$\Leftarrow$) Supongamos (A × C) ∩ (B × C) ≠ ∅, entonces existen x , y tales que (x, y)∈(A × C) ∩ (B × C) (1.6(i)). Entonces (x, y)∈ A × C ∧ (x, y)∈B × C; o sea $x \in A \wedge y \in C \wedge x \in B \wedge y \in C$**.** De donde $x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C$, es decir, $x \in A \cap B \wedge y \in C$ (1.11(i)). Lo que quiere decir que $A \cap B \neq \phi$ y $C \neq \phi$ (1.6(i))**.**

14 . **ELD**

Demostrar (C ⊆ A ∧ D ⊆ B) ⇔ C × D ⊆ A × B

(1)	**C, D ≠ ∅**	**P**
⇒) (2)	C ⊆ A ∧ D ⊆ B	P
(3)	∃ x,y: x∈C ∧ y∈D	(1)
(4)	(x, y)∈ C × D	trad.3, 2.6
(5)	x∈A ∧ y∈B	(3),(2)
(6)	(x, y)∈ A × B	trad.5, 2.6
(7)	(x, y)∈ C × D ⇒ (x, y)∈ A × B	CP4,6
(8)	C × D ⊆ A × B	trad.7, 1.3
$\square_1$(9)	(C ⊆ A ∧ D ⊆ B) ⇒ C × D ⊆ A × B	CP2,8
⇐) (10)	C × D ⊆ A × B	P
(11)	C × D ≠ ∅	1

	(12)	$\exists\ (x, y)\in C \times D$	11, 1.6(ii)
	(13)	$x\in C \wedge y\in D$	trad.12, 2.6
	(14)	$x\in C$	S13
	(15)	$y\in D$	S13
	(16)	$(x, y)\in C \times D$	trad.13, 2.6
	(17)	$(x, y)\in A \times B$	(16), (10)
	(18)	$x\in A \wedge y\in B$	trad. 17, 2.6
	(19)	$x\in A$	S18
	(20)	$x\in C \Rightarrow x\in A$	CP14,19
	(21)	$C \subseteq A$	trad. 2, 1.3
	(22)	$y\in B$	S18
	(23)	$y\in D \Rightarrow y\in B$	CP 15,22
	(24)	$D \subseteq B$	trad. 23, 1.3
	(25)	$C \subseteq A \wedge D \subseteq B$	A21, 24
$\square_2$	(26)	$C \times D \subseteq A \times B \Rightarrow C \subseteq A \wedge D \subseteq B$	CP 10,25
$\square$	(27)	$(C \subseteq A \wedge D \subseteq B) \Leftrightarrow C \times D \subseteq A \times B$	LB 9,26



Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

$\Rightarrow$) **(1)** Puesto que $C, D \neq \varnothing$, **(2)(3)(4)** sea $(x, y)\in C \times D$, esto es, $x\in C \wedge y\in D$; **(5)(6)** Como, por hipótesis,$C \subseteq A \wedge D \subseteq B$, entonces $x\in A \wedge y\in B$, y $(x, y)\in A \times B$, **(7)(8)** y por lo tanto $C \times D \subseteq A \times B$. $\square_1$

$\Leftarrow$) Vamos a demostrar ahora $C \subseteq A \wedge D \subseteq B$.
(10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) Puesto que $C, D \neq \varnothing$, sean $x\in C$ e $y\in D$; entonces $(x, y)\in C \times D$. **(17)** Debido a que $C \times D \subseteq A \times B$ (hipótesis), entonces $(x, y)\in A \times B$; **(18)** esto es, $x\in A$ e $y\in B$; **(19) (20)** en particular $x \in A$, cumpliéndose, así, la implicación $x\in C \Rightarrow x\in A$, **(21)** es decir $C \subseteq A$. **(22)(23)(24)** Y por otro lado, debido a que también se ha llegado a la conclusión $y\in B$, la implicación $y\in D \Rightarrow y\in B$ también se cumple, y por ende, el resultado $D \subseteq B$. $\square_2$

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

$\Rightarrow$) Puesto que C, D $\neq \varnothing$, sea (x, y)$\in$ C $\times$ D, esto es, x$\in$C $\wedge$ y$\in$D; Como, por hipótesis, C $\subseteq$ A $\wedge$ D $\subseteq$ B, entonces x$\in$A $\wedge$ y$\in$B, es decir (x, y)$\in$ A $\times$ B y por lo tanto, C $\times$ D $\subseteq$ A $\times$ B. $\square_1$

$\Leftarrow$) Vamos a probar ahora que C $\subseteq$ A $\wedge$ D $\subseteq$ B.
Puesto que C, D $\neq \varnothing$, sean x$\in$C e y$\in$D; entonces (x, y)$\in$ C $\times$ D. Debido a que C $\times$ D $\subseteq$ A $\times$ B (hipótesis), entonces (x, y)$\in$A $\times$ B; esto es, x$\in$A e y$\in$B; en particular x $\in$ A, cumpliéndose, así, la implicación x$\in$C $\Rightarrow$ x$\in$A, es decir C $\subseteq$A. Y por otro lado, debido a que también se ha llegado a la conclusión y$\in$B, la implicación y$\in$D $\Rightarrow$ y$\in$B también se cumple, y por ende, el resultado D $\subseteq$ B. $\square_2$

15. A, B, C, D $\neq \varnothing \Rightarrow$ (A $\times$ B = C $\times$ D $\Leftrightarrow$ A = C $\wedge$ B = D)

ELD

Demostrar (A $\times$ B = C $\times$ D $\Leftrightarrow$ A = C $\wedge$ B = D)

(1) A, B, C, D $\neq \varnothing$ **P**

ELD

Demostrar A = C $\wedge$ B = D

(1) A, B, C, D $\neq \varnothing$ **P**

(2) A $\times$ B = C $\times$ D **P**

ELD1

Demostrar : A = C

Traducción : $x \in A \Leftrightarrow x \in C$

(1)	**A, B, C, D $\neq \varnothing$**	**P**
(2)	**A $\times$ B = C $\times$ D**	**P**
$\Rightarrow$)(3)	$x \in A$	P
(4)	$\exists y \in B$	1, 1.6(ii)
(5)	$(x, y) \in A \times B$	3,4, 2.6
(6)	$(x, y) \in C \times D$	I 5,2
(7)	$x \in C \wedge y \in D$	trad.6, 2.6
(8)	$x \in C$	S7
$\square_1$(9)	$x \in A \Rightarrow x \in C$	CP 3,8
$\Leftarrow$)(10)	$x \in C$	P
(11)	$\exists y \in D$	1, 1.6(ii)
(12)	$(x, y) \in C \times D$	10,11,2.6

(13)	$(x, y) \in A \times B$	I 12,2
(14)	$x \in A \wedge y \in B$	13, 2.6
(15)	$x \in A$	S2
□$_2$ (16)	$x \in C \Rightarrow x \in A$	CP 10,16
(17)	$x \in A \Leftrightarrow x \in C$	LB 9,17
□ (18)	A = C	trad. 18, 1.1

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Demostremos que A = C

$\Rightarrow$) **(3)**Sea $x \in A$. **(4)** Como por hipótesis B ≠ ∅ , $\exists y \in B$ por 1.6(ii) . **(5)** Entonces $(x, y) \in A \times B$ (2.6). **(6)**Como A × B = C × D por hipótesis**,** $(x, y) \in C \times D$ **.(7)** O sea que $x \in C$ y $y \in D$ **.(8)** En particular $x \in C$. **(9)** Por lo tanto se tiene la implicación

$$x \in A \Rightarrow x \in C \quad \text{(I)}$$

$\Leftarrow$)**(10)** Sea $x \in C$ **. (11)**$\exists y \in D$ (1.6(ii)) ya que por hipótesis D ≠ ∅. **(12)** Entonces $(x, y) \in C \times D$ (2.6).**(13)**Por hipótesis A × B = C × D , luego $(x, y) \in A \times B$ **.(14)** O sea que $x \in A$ y $y \in B$. **(15)**En particular $x \in A$. **(16)** Por lo tanto se tiene la implicación

$$x \in C \Rightarrow x \in A \quad \text{(II)}$$

(17) De (I) y (II) tenemos $x \in A \Leftrightarrow x \in C$, (18) es decir A = C .

15. $\Leftarrow$) **ELD**

Demostrar : A × B = C × D

	(1) A, B, C, D ≠ ∅	**P**
	(2) A = C ∧ B = D	**P**
	(3) A × B = A × B	L
□	(4) A × B = C × D	I 4,2

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que A × B = C × D.

(1)(2)(3) Sea la certeza lógica

$$A \times B = A \times B \qquad \text{(I)}$$

(4) Como por hipótesis A = C y B = D, reemplazando en (I) tenemos:

$A \times B = C \times D$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar la implicación

$$A, B, C, D \neq \varnothing \Rightarrow (A \times B = C \times D \Leftrightarrow A = C \wedge B = D)$$

Demostremos $A = C$

$\Rightarrow$) Sea $x \in A$. Por hipótesis $B \neq \varnothing$, $\exists y \in B$ (1.6(ii)) . Entonces $(x, y) \in A \times B$ (2.6). Como $A \times B = C \times D$, por hipótesis, $(x, y) \in C \times D$. Es decir que $x \in C$ y $y \in D$. En particular $x \in C$. Por lo tanto se tiene la implicación

$$x \in A \Rightarrow x \in C \quad (\text{ I })$$

$\Leftarrow$) Sea $x \in C$. $\exists y \in D$ (1.6(ii)) ya que $D \neq \varnothing$ por hipótesis. De esto se desprende que $(x, y) \in C \times D$ (2.6) . $A \times B = C \times D$, por hipótesis , luego $(x, y) \in A \times B$. Esto implica que $x \in A$ y $y \in B$. En particular $x \in A$. Por lo tanto se tiene la implicación

$$x \in C \Rightarrow x \in A \quad (\text{II})$$

De (I) y (II) tenemos $x \in A \Leftrightarrow x \in C$, equivale a $A = C$. $\square_1$

Demostremos que $B = D$ (similar a la anterior demostración)

$\Rightarrow$) Sea $y \in B$. Por hipótesis $A \neq \varnothing$, $\exists x \in A$ (1.6(ii)) . Entonces $(x, y) \in A \times B$ (2.6). Como $A \times B = C \times D$ por hipótesis, $(x, y) \in C \times D$. Es decir que $x \in C$ y $y \in D$. En particular $y \in D$. Por lo tanto se tiene la implicación

$$y \in B \Rightarrow y \in D \quad (\text{ I })$$

$\Leftarrow$) Sea ahora $y \in D$. $\exists x \in C$ (1.6(ii)) ya que $D \neq \varnothing$ por hipótesis. De esto se desprende que $(x, y) \in C \times D$ (2.6). Por hipótesis $A \times B = C \times D$, luego $(x, y) \in A \times B$. Esto implica que $x \in A$ y $y \in B$. En particular $y \in B$. Por lo tanto se tiene la implicación

$$y \in D \Rightarrow y \in B \quad (\text{II})$$

De (I) y (II) tenemos $y \in B \Leftrightarrow y \in D$, es decir B = D . □₂

15. $\Leftarrow$) Vamos a demostrar que A × B = C × D.

Sea la certeza lógica

$$A \times B = A \times B \qquad (\text{ I })$$

Por hipótesis A = C y B = D, y reemplazando en (I) tenemos:

$$A \times B = C \times D .$$

16. **ELD**

Demostrar (A × B) ∩ (A’ × C) = ∅

Por RAA

(1)	(A × B) ∩ (A’ × C) ≠ ∅	**P**
(2)	$\exists(x, y) \in (A\times B) \cap (A' \times C)$	1, 1.6(ii)
(3)	(x, y)∈A × B ∧ (x, y)∈A’× C	trad.2, 1.11(i)
(4)	$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A' \wedge y \in C)$	trad.3, 2.6
(5)	$x \in A \wedge x \in A'$	S 4
(6)	$x \in A \wedge x \notin A$	trad.5, Def. compl.
□(7)	(A × B) ∩ (A’ × C) = ∅	RAA 1,6

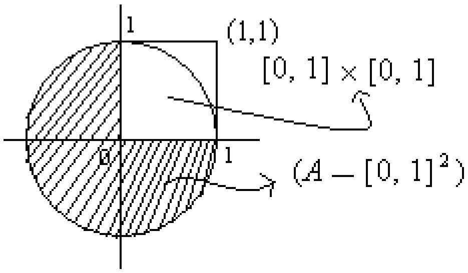
Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

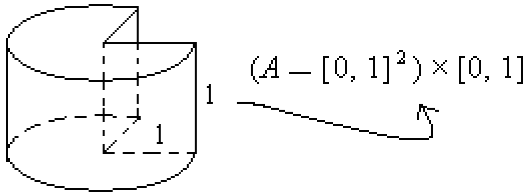
(1) Supongamos lo contrario : (A × B) ∩ (A’ × C) ≠ ∅. **(2)** Esto significa que $\exists(x, y) \in (A\times B) \cap (A' \times C)$ (1.6(ii)).**(3)** Es decir (x, y)∈A×B∧(x, y)∈A’×C (1.11(i)).**(4)**O sea $(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A' \wedge y \in C)$ (2.6). **(5)**De donde $x \in A \wedge x \in A'$.**(6)**Es decir $x \in A \wedge x \notin A$; pero esto es una contradicción. **(7)**Luego (A × B) ∩ (A’ × C) = ∅ .

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario : (A × B) ∩ (A’ × C) ≠ ∅. Osea $\exists(x, y)$ tal que $(x, y) \in (A\times B) \cap (A' \times C)$ (1.6(ii)). De donde (x, y)∈A×B∧(x, y)∈A’×C (1.11(i)); lo que implica que $(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A' \wedge y \in C)$ (2.6). De donde $x \in A \wedge x \in A'$. Es decir $x \in A \wedge x \notin A$; pero esto es una contradicción. Luego (A × B) ∩ (A’ × C) = ∅ .

17. Sea $A = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \le 1\}$. Qué sólido representa a $(A - [0, 1]^2) \times [0, 1]$?





18. (A x B) x C ≠ A x (B x C) , ya que ((*a*, b), c) ≠ (*a*, (b, c)) para $a \in A, b \in B, c \in C$.

19. (i) .

ELD

Demostrar : (B ∩ C) × A = (B × A) ∩ (C × A

Traducción : (x, y)∈(B ∩ C) × A ⇔ (x, y)∈(B × A) ∩ (C × A

(x, y)∈(B ∩ C) × A	$\Leftrightarrow x \in (B \cap C) \wedge y \in A$	2.6
	$\Leftrightarrow (x \in B \wedge x \in C) \wedge y \in A$	1.16
	$\Leftrightarrow x \in B \wedge (x \in C \wedge y \in A)$	Asoc. Ax.
	$\Leftrightarrow (x \in B \wedge y \in A) \wedge (x \in C \wedge y \in A)$	A
	$\Leftrightarrow (x, y) \in B \times A \wedge (x, y) \in C \times A$	2.6
	$\Leftrightarrow (x, y) \in (B \times A) \cap (C \times A)$	1.11(i)

19.(ii)

ELD

Demostrar : (B∪C) × A = (B × A) ∪ (C × A)

Traducción : (x, y)∈ (B∪C) × A ⇔ (x, y)∈ (B × A) ∪ (C × A)

(x, y)∈ (B∪C) × A	$\Leftrightarrow x \in (B \cup C) \wedge y \in A$	2.6
	$\Leftrightarrow (x \in B \vee x \in C) \wedge y \in A$	1.11(ii)
	$\Leftrightarrow (x \in B \wedge y \in A) \vee (x \in C \wedge y \in A)$	L. Dist.
	$\Leftrightarrow (x, y) \in B \times A \vee (x, y) \in C \times A$	2.6
	$\Leftrightarrow (x, y) \in (B \times A) \cup (C \times A)$	1.11(ii)

19. (iii)

ELD

Demostrar : (B−C) × A = (B × A) − (C × A)

Traducción : (x, y)∈ (B−C) × A ⇔ (x, y)∈ (B × A) − (C × A)

$$
\begin{array}{lll}
(x, y)\in (B-C) \times A \Leftrightarrow x \in (B-C) \wedge y \in A & & 2.6 \\
\Leftrightarrow x \in B \wedge x \notin C \wedge y \in A & & 1.16 \\
\Leftrightarrow x \in B \wedge y \in A \wedge x \notin C & & \text{Conm. Ax.} \\
\Leftrightarrow x \in B \wedge y \in A \wedge x \notin C \wedge y \in A & & \text{A} \\
\Leftrightarrow (x, y) \in B \times A \wedge (x, y) \notin C \times A & & 2.6 \\
\Leftrightarrow (x, y) \in (B \times A) - (C \times A) & & 1.16
\end{array}
$$

20. A × B ⊆ $\mathcal{PP}$(A∪B)

ELD

Demostrar A × B ⊆ PP(A∪B)

Traducción (x, y) ∈A × B ⇒ (x, y)∈PP(A∪B)

(1)	(x, y) = {{x}, {x, y}}	**P**
(2)	(x, y) ∈A × B	P
(3)	x∈A ∧ y∈B	trad.2, 2.6
(4)	{x} ⊆ A ∧ {y} ⊆ B	3
(5)	{x} ⊆ A∪B ∧ {x, y} ⊆ A∪B	4, 1.13(ii)
(6)	{x}∈ P(A∪B) ∧ {x, y}∈ P(A∪B)	trad.5, 1.9
(7)	{{x}} ⊆ P(A∪B) ∧ {{x, y}} ⊆ P(A∪B)	trad.6, 1.3
(8)	{{x},{x, y}} ⊆ P(A∪B)	7, 1.3
(9)	{{x},{x, y}}∈ PP(A∪B)	trad.8, 1.3
(10)	(x, y)∈PP(A∪B)	I 1,9
(11)	(x, y) ∈A × B ⇒ (x, y)∈PP(A∪B)	CP2,10
□(12)	A × B ⊆ PP(A∪B)	trad.11, 1.3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) Sea (x,y)∈A×B, **(3)** esto es, x∈A y y∈B; **(4)** de donde{x}⊆ A y {y} ⊆ B. **(5)** Ahora, como {x} ⊆ A∪B y {x, y} ⊆ A∪B, **(6)** entonces{x}∈P(A∪B) y {x, y}∈P(A∪B); **(7)** lo que significa que {{x}}⊆P(A∪B) y que {{x, y}}⊆P(A∪B); **(8)** De esto claramente resulta que {{x},{x, y}} ⊆ P(A∪B), y **(9)** por lo tanto {{x},{x, y}}∈PP(A∪B).**(10)** **(11)** Pero (x, y) = {{x}, {x, y}}, luego (x, y)∈PP(A∪B). **(12)** Así que A × B ⊆ PP(A∪B) □

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea (x,y)∈A×B, esto es, x∈A y y∈B; de donde {x}⊆ A y {y} ⊆ B. Ahora, como{x}⊆ A∪B y {x, y} ⊆ A∪B, {x}∈P(A∪B) y {x, y}∈P(A∪B);

lo que significa que $\{\{x\}\} \subseteq P(A \cup B)$ y que $\{\{x, y\}\} \subseteq P(A \cup B)$. De lo anterior claramente resulta que

$$\{\{x\},\{x, y\}\} \subseteq P(A \cup B),$$

de donde

$$\{\{x\},\{x, y\}\} \in PP(A \cup B).$$

Pero

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Luego $(x, y) \in PP(A \cup B)$. Por lo tanto $A \times B \subseteq PP(A \cup B)$ □

3. RELACIONES

2.10 Definición : Se llama **relación de A en B** a cualquier subconjunto R de $A \times B$,

$$R \subseteq A \times B$$

Si A = B, se habla de una relación en A. Claramente tanto $\varnothing$ como $A \times B$ son relaciones de A en B.

Ejemplo : $R_1 = \{(1, b), (2, b), (2, c)\}$ es una relación de $\{1,2\}$ en $\{a, b, c\}$.

Y también es una relación de $\{1,2,3\}$ en $\{a,b,c\}$.

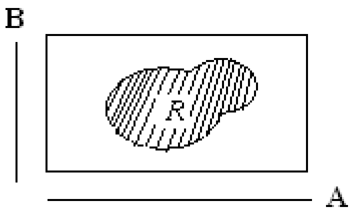
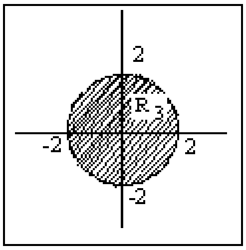


Fig. 11

Otro ejemplo : $R_2 = \{(x, y) / y$ es el padre de $x\}$, es una relación en el conjunto de todas las personas, relación que podemos llamar 'paternidad'.

Otro ejemplo :
$R_3 = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 4\}$ es una relación en R



Justificación de la definición:

Sean los conjuntos:

A = {Cervantes, Shakespeare, P. Neruda, G. García Márquez }
B = {Otelo, La Gitanilla, Hamlet, Cien años de Soledad, Doña Bárbara, El Quijote, El rey Lear }

La relación "X escribió la obra Y" entre los elementos de los conjuntos A y B anteriores, nos permite formar parejas ordenadas tomando como primera componente uno de los autores y como segunda una de las obras de B que haya sido escrita por él. En otras palabras, podemos separar de $A \times B$ aquellas parejas ordenadas cuya primera componente está en la relación dada con la segunda, es decir, formamos el conjunto

$$\{ (X, Y) \in A \times B \mid X \text{ escribió } Y \}$$

En el ejemplo este conjunto sería

R={(Cervantes, La Gitanilla), (Cervantes, El Quijote), (Shakespeare, Otelo), (Shakespeare, Hamlet), (Shakespeare, El rey Lear), (G. García M., Cien años de Soledad)}. Así :

$$(\text{Cervantes, Otelo}) \notin R \leftrightarrow \text{Cervantes no escribió Otelo}$$

De esta manera, a toda "relación" dada en la forma usual entre los elementos de los conjuntos, se le hace corresponder un único conjunto de parejas ordenadas; por ese motivo podemos considerar que la relación es en realidad el conjunto de parejas ordenadas; además en casos como el del ejemplo anterior, a partir del conjunto se puede intuir la relación entre autor y obra.

2.11 Definición : La diagonal de A es el conjunto $\Delta_A = \{ (x, x) / x \in A \}$

Es claro que Δ_A es una relación en A. El por qué del nombre "diagonal" queda claro en la siguiente representación (Fig. 12)

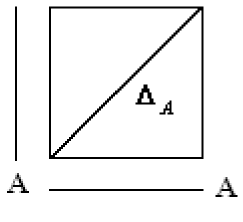
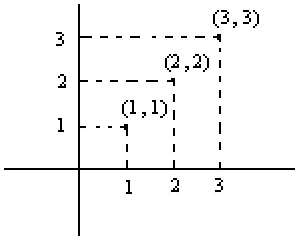


Fig. 12

Δ_R es la recta que pasa por el origen, formando un ángulo de 45^0 con el eje X. Es la recta y = x. }.

Ejemplo. Sea A = {1, 2, 3},

$\Delta_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$



2.12 Definición : $\vec{p}_1 R = \{ x / (x, y) \in R \text{ para algún } y \}$

$\vec{p}_2 R = \{ x / (x, y) \in R \text{ para algún } x \}$

$\vec{p}_1 R$ es **la primera proyección** o **dominio** de R y $\vec{p}_2 R$ **la segunda proyección de** R (Fig. 13)**.**

Ejemplos : $\vec{p}_1 R_1 = \{1, 2\}$, $\vec{p}_2 R_1 = \{b, c\}$, $\vec{p}_1 R_2 = \{x / x \text{ es persona }\}$.

$\vec{p}_2 R_2 = \{ y / y \text{ es el padre } \}$,

$\vec{p}_1 R_3 = \vec{p}_2 R_3 = [-2, 2]$

$\vec{p}_1 \Delta_A = \vec{p}_2 \Delta_A = A$

$\vec{p}_1 \{(1,b), (2,b), (2,c)\} = \{1,2\}$, $\vec{p}_2 \{1,2,3\} = \varnothing$.

Caracterización de los elementos de la primera y segunda proyección

La primera proyección	**La segunda proyección**
Los elementos de $\vec{p}_1 R$	Los elementos de $\vec{p}_2 R$
$x \in \vec{p}_1 R \leftrightarrow \exists y: (x, y) \in R$	$y \in \vec{p}_2 R \leftrightarrow \exists y: (x, y) \in R$
$x \notin \vec{p}_1 R \leftrightarrow (x, y) \notin R, \forall y$	$y \notin \vec{p}_2 R \leftrightarrow (x, y) \notin R, \forall x$

Por ejemplo, $1\in \overrightarrow{p_1}\,R_1$ debido a que $(1,b)\in R_1$. De la misma manera, $c\in \overrightarrow{p_2}\,R$ ya que $(2,c)\in R$. Pero $3\notin \overrightarrow{p_1}\,R_1$ ya que ninguna pareja de la forma (3, y) pertenece a R_1.

Si R es una relación de A en B, $\overrightarrow{p_1}\,R\subseteq A$ y $\overrightarrow{p_2}\,R\subseteq B$.

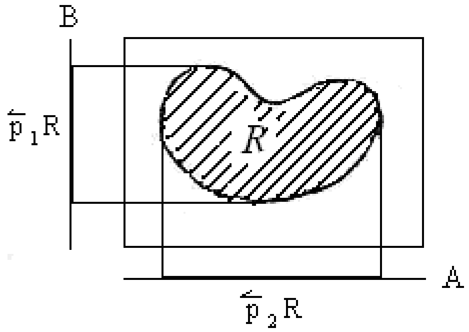


Fig. 13

En 2.12 no se exige que R sea una relación, aunque para relaciones, es que en especial se da esta definición. Obsérvese que podríamos haber definido, más simplemente, “ una relación” como cualquier conjunto de parejas; en lugar de lo que hicimos en 2.10. Con esta alternativa también se puede desarrollar la teoría de relaciones sin ninguna dificultad. Por razones pedagógicas, preferimos hacerlo del modo como lo hicimos.

2.13 Definición: $R^{-1} = \{(y,x) \,/\, (x,y)\in R$

Si R es una relación, R^{-1} se llama la **relación inversa** de R y si R es una relación de A en B, R^{-1} es una relación de B en A

Ejemplos : $R_1^{-1} = \{(b,1), (b,2), (c,2)\}$,
$R_2^{-1} = \{(x, y) \,/\,$ y es hijo de x $\}$
R_3^{-1} $\Delta_A^{-1} = \Delta_A$
$\{(b,1), (b,2), 3\}^{-1} = \{(1,b), (2,b)\}$
$\{1, 2, 3\}^{-1} = \varnothing$

Caracterización de los elementos de R^{-1}

$$(y, x) \in R^{-1} \leftrightarrow (x, y)\in R$$

En la definición de R^{-1} no es necesario que R sea una relación, como se puede observar en este ejemplo.

En 2.13 no se exige que R sea relación, aunque para relaciones se da en especial esta definición.

Gráficamente R^{-1} se puede visualizar de la siguiente manera : A partir del rincón inferior izquierdo del rectángulo $A \times B$ (Fig.13) trácese una recta a 45^0 con la horizontal A. Gírese toda la figura 180^0 alrededor de esta recta, usándola como eje. R se transforma así en R^{-1}. En esta transformación y tomando A = B, Δ_A permanece inmóvil.

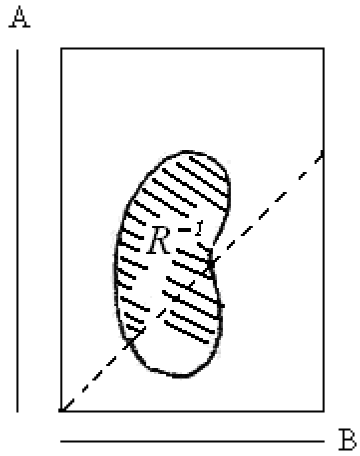


Fig. 14

EJERCICIOS 2.3

1. Si A tiene m elementos y B tiene n elementos (m, n naturales); cuántas relaciones hay de A en B? Sugerencia : considere $P(A \times B)$

2. (i) $\vec{p}_1 (A \times B) \neq A \;\wedge\; \vec{p}_2 (A \times B) \neq B$
   Sugerencia : Considere $A = \varnothing$, y luego $B = \varnothing$
   (ii) $[\, B \neq \varnothing \;\Rightarrow\; \vec{p}_1 (A \times B) = A \,] \;\wedge\; [\, A \neq \varnothing \;\Rightarrow\; \vec{p}_2 (A \times B) = B \,]$
3. $[A \times B]^{-1} = B \times A$
4. $R^{-1} = \varnothing \;\wedge$ R relación $\Rightarrow R = \varnothing$
5. (i) $(R^{-1})^{-1} \neq R$. Considere $R = \{(1,3), (4,5), 9\}$
   (ii) $(R^{-1})^{-1} \subseteq R$
   (iii) R relación $\Rightarrow (R^{-1})^{-1} = R$
6. $R \subseteq S \Rightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$
7.(i) $(R')^{-1} \subseteq (R^{-1})'$ (Tomando como complemento a $(\vec{p}_1 R \cup \vec{p}_2 R)^2$.)
   (ii) R relación $\Rightarrow (R^{-1})' = (R')^{-1}$
8. (i) $\vec{p}_1 R = \vec{p}_2 R^{-1}$
   (ii) $\vec{p}_2 R = \vec{p}_1 R^{-1}$

9 (i) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
(ii) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
(iii) $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$
(iv) $R \subseteq S \Rightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$

10. $p_1(R) = \varnothing \not\Rightarrow R = \varnothing$ Considere $R = \{1, 2, 3\}$

11. (i) $\vec{p}_1(R \cap S) \subseteq \vec{p}_1(R) \cap p_1(S)$
(ii) $\vec{p}_1(R \cup S) = \vec{p}_1(R) \cup \vec{p}_1(S)$
(iii) $\vec{p}_1(R - S) \supset \vec{p}_1(R) - \vec{p}_1(S)$
(iv) Cada una de las tres proposiciones anteriores, cambiando $\vec{p}_1$ por $\vec{p}_2$.

12. Encontrar A y B tales que $(PPPP\varnothing)^{-1} = (A\times B) \cup (A\times B)$

ACTIVIDAD PRÁCTICA – PROCESO IMITATIVO

1. $\mathcal{P}(A\times B)$ es el conjunto de subconjuntos de A×B. Cada uno de estos subconjuntos es una relación de A en B. Por lo tanto, el número de relaciones de A en B viene dado por la fórmula :

$$\mathcal{N}(\mathcal{P}(A\times B)) = 2^{nm},$$

donde n es el número de elementos de A y m es el número de elementos de B.

2. (i)

Para $B = \varnothing$, $\vec{p}_1(A\times B) = \vec{p}_1(A\times\varnothing) = \vec{p}_1(\varnothing) = \varnothing \neq A$

Para $A = \varnothing$, $\vec{p}_2(A\times B) = \vec{p}_2(\varnothing\times B) = \vec{p}_2(\varnothing) = \varnothing \neq B$

2 (ii)

ELD

Demostrar $p_1(A\times B) = A$

Traducción $x \in p_1(A\times B) \Leftrightarrow x \in A, \forall x$

(1)	**$B \neq \varnothing$**	**P**
⇒)(2)	$x \in \vec{p}_1(A\times B)$	P
(3)	$(x, y) \in A\times B$ p. a. y	trad.2, 2.12
(4)	$x \in A \wedge y \in B$	trad.3 , 2.6

(5)	$x\in A$	S4
(6)	$x\in \vec{p}_1(A\times B) \Rightarrow x\in A$	CP 2,5
$\Leftarrow$)(7)	$x\in A$	P
(8)	$\exists$ y: $y\in B$	(1) 1.6 (ii)
(9)	$x\in A \wedge y\in B$	A 7,8
(10)	$(x, y)\in A\times B$	trad. 9, 2.6
(11)	$x\in \vec{p}_1(A\times B)$	trad.10, 2.12
(12)	$x\in A \Rightarrow x\in \vec{p}_1(A\times B)$	CP 7,10
(13)	$x\in \vec{p}_1(A\times B) \Leftrightarrow x\in A$	LB 6,11
(14)	$\vec{p}_1(A\times B) = A$	traducción 12

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) Sea $x\in p_1(A\times B)$. **(3)** Entonces $(x, y)\in A\times B$ para algún $y\in B$ (2.6). **(4)**O sea que $x\in A$ y $y\in B$. **(5)**En particular $x\in A$. **(6)** Por lo tanto, se tiene la implicación

$$x\in \vec{p}_1(A\times B) \Rightarrow x\in A. \text{ (I)}$$

(7) Ahora supongamos que $x\in A$. **(8)** Como $B\neq \emptyset$, existe $y\in B$ (1.6(ii)). **(9)(10)** Entonces podemos construir la pareja ordenada $(x, y)\in A\times B$(2.6); **(11)** lo que significa que $x\in p_1(A\times B)$ (2.12). **(12)** Por lo tanto también se tiene la implicación

$$x\in A \Rightarrow x\in \vec{p}_1(A\times B)\ . \text{ (II)}$$

(13) De (I) y (II) se tiene la equivalencia $x\in \vec{p}_1(A\times B) \Leftrightarrow x\in A$; **(14)** Es decir $\vec{p}_1(A\times B) = A$

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $x\in p_1(A\times B)$. Entonces $(x, y)\in A\times B$ para algún $y\in B$ (2.6). O sea que $x\in A$ y $y\in B$. En particular $x\in A$. Por lo tanto, se tiene la implicación

$$x\in \vec{p}_1(A\times B) \Rightarrow x\in A. \text{ (I)}$$

Ahora supongamos que $x\in A$. Como $B\neq \emptyset$, existe $y\in B$ (1.6(ii)). Entonces podemos construir la pareja ordenada $(x, y)\in A\times B$(2.6); lo que significa que $x\in p_1(A\times B)$ (2.12). Por lo tanto también se tiene la implicación

$$x\in A \Rightarrow x\in \vec{p}_1\,(A\times B)\ .\ (II)$$

De (I) y (II) se tiene la equivalencia $x\in \vec{p}_1\,(A\times B) \Leftrightarrow x\in A$; Lo que equivale a $\vec{p}_1\,(A\times B) = A$

3. **ELD**

Demostrar $[A \times B]^{-1} = B \times A$

Traducción $(y, x)\in [A \times B]^{-1} \Leftrightarrow (y, x)\in B \times A$

(1) **P**

$(y, x)\in [A \times B]^{-1}$	$\Leftrightarrow (x, y)\in A \times B$	2.13
	$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$	2.6
	$\Leftrightarrow y \in B \wedge x \in A$	Conm. Ax.
	$\Leftrightarrow (y, x)\in B \times A$	2.6

4. **ELD**

Demostrar $R = \emptyset$

Por RAA

(1)	$R^{-1} = \emptyset$	**P**
(2)	**R relación**	**P**
(3)	$R \neq \emptyset$	P
(4)	$\exists(x_0, y_0): (x_0, y_0)\in R$	(2),(3) 1.6 (ii)
(5)	$(y_0, x_0)\in R^{-1}$	trad.4, 2.13
(6)	$R^{-1} \neq \emptyset$	5, 1.6(ii)
(7)	$R^{-1} = \emptyset \wedge R^{-1} \neq \emptyset$	A1,6
□ (8)	$R = \emptyset$	RAA 3,7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(3) Supongamos lo contrario; es decir $R \neq \emptyset$. **(4)** **(5)**Debido a que R es una relación, existe al menos un par ordenado (x_0, y_0) tal que $(x_0, y_0)\in R$, es decir, tal que $(y_0, x_0)\in R^{-1}$; **(6)**lo que implica que $R^{-1}\neq \emptyset$ (1.6(ii)). **(7)**Pero esto contradice la hipótesis de que $R^{-1} = \emptyset$. **(8)**Luego $R = \emptyset$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario; es decir R $\neq \emptyset$. Debido a que R es una relación, existe al menos un par ordenado (x_0, y_0) tal que $(x_0, y_0)\in$R, es decir, tal que $(y_0, x_0)\in R^{-1}$; lo que implica que $R^{-1} \neq \emptyset$ (1.6(ii)).. Pero esto contradice la hipótesis de que $R^{-1} = \emptyset$. Luego R = $\emptyset$.

5. (i) $(R^{-1})^{-1} \neq R$. Sea $R = \{(1,3),(4,5),9\}$

$R^{-1} = \{(3,1),(5,4)\}$

$R^{-1^{-1}} = \{(1,3),(4,5)\}$. Claramente $(R^{-1})^{-1} \neq R$

5. (ii) . **ELD**

Demostrar $(R^{-1})^{-1} \subseteq R$

Traducción $(x,y)\in(R^{-1})^{-1} \Rightarrow (x,y)\in R$

(1)	$(x,y)\in(R^{-1})^{-1}$	P
(2)	$(y, x)\in R^{-1}$	trad.1, 2.13
(3)	$(x, y)\in R$	trad.3, 2.13
(4)	$(x,y)\in(R^{-1})^{-1} \Rightarrow (x,y)\in R$	CP 1,3
(5)	$(R^{-1})^{-1} \subseteq R$	trad. 4, 1.3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Sea $(x,y)\in(R^{-1})^{-1}$**.(2)** Por definición de relación inversa, $(y, x)\in R^{-1}$. **(3)** Nuevamente por 2.13 $(x, y)\in$R . **(4) (5)**Por lo tanto $(R^{-1})^{-1} \subseteq R$**.**

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $(x,y)\in(R^{-1})^{-1}$**.** Por definición de relación inversa, $(y, x)\in R^{-1}$. Nuevamente por 2.13 $(x, y)\in$R; y por lo tanto $(R^{-1})^{-1} \subseteq R$**.**

5. (iii) . **ELD**

Demostrar $(R^{-1})^{-1} = R$

Traducción $(R^{-1})^{-1} \subseteq R \wedge R \subseteq (R^{-1})^{-1}$

(1)	**R relación**	**P**
(2)	$(x, y)\in R$	P
(3)	$(y, x)\in R^{-1}$	trad.2, 2.13

(4)	$(x, y) \in (R^{-1})^{-1}$	trad.3, 2.13
(5)	(x, y)∈R $\Rightarrow (x, y) \in (R^{-1})^{-1}$	CP 1,3
(6)	$R \subseteq (R^{-1})^{-1}$	trad. 5, 1.3
(7)	$(R^{-1})^{-1} \subseteq R$	Ejercicio 2.3 (5(ii))
(8)	$(R^{-1})^{-1} \subseteq R \wedge R \subseteq (R^{-1})^{-1}$	A 6,7
□ (9)	$(R^{-1})^{-1} = R$	trad.8, 1.4(ii)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $(R^{-1})^{-1} = R$.
(1) (2) Como R es relación, sea (x, y)∈R.**(3)** Por definición de relación inversa, (y, x)∈ R^{-1}. **(4)**Nuevamente por 2.13, $(x, y) \in (R^{-1})^{-1}$; **(5) (6)** y por lo tanto $R \subseteq (R^{-1})^{-1}$. **(7)**Por Ejercicio 2.3 (5(ii)), $(R^{-1})^{-1} \subseteq R$. **(8) (9)**Por la proposición 1.4(ii) tenemos $(R^{-1})^{-1} = R$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $(R^{-1})^{-1} = R$.
Como R es relación, sea (x, y)∈R. Por definición de relación inversa, (y, x)∈ R^{-1}. Nuevamente por 2.13, $(x, y) \in (R^{-1})^{-1}$; y por lo tanto $R \subseteq (R^{-1})^{-1}$. (Por Ejercicio 2.3 (5(ii)), $(R^{-1})^{-1} \subseteq R$. Por proposicón 1.4(ii) tenemos que $(R^{-1})^{-1} = R$.

6 **ELD**

Demostrar $R^{-1} \subseteq S^{-1}$

Traducción (y, x)∈ $R^{-1} \Rightarrow$ (y, x)∈ S^{-1}

(1) $R \subseteq S$		**P**
(2)	(y, x)∈ R^{-1}	P
(3)	(x, y)∈R	trad. 2, def. R inversa
(4)	(x, y)∈S	(3), (1)
(5)	(y, x)∈ S^{-1}	traducción 4
(6)	(y, x)∈ $R^{-1} \Rightarrow$ (y, x)∈ S^{-1}	CP 2,5
□ (7)	$R^{-1} \subseteq S^{-1}$	traducción 6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) Sea (y, x)∈ R^{-1}. **(3)** Entonces (x, y)∈R (2.13). **(4)** Por hipótesis $R \subseteq S$, por lo tanto (x, y)$\in$S; (5)lo que implica que (y, x)$\in S^{-1}$(2.13). (6) (7)Luego $R^{-1} \subseteq S^{-1}$

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea (y, x)$\in R^{-1}$.Entonces (x, y)$\in$R (2.13). Por hipótesis R $\subseteq$ S, por lo tanto (x, y)$\in$S; lo que implica que (y, x)$\in S^{-1}$(2.13). Luego $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

7. (i). **ELD**

Demostrar $(R')^{-1} \subseteq (R^{-1})'$

Traducción $(y,x) \in (R')^{-1} \Rightarrow (y,x) \in (R^{-1})'$

(1)	$(y,x) \in (R')^{-1}$	P
(2)	(x, y)$\in R'$	I.1, 2.13
(3)	$(x,y) \notin R$	**I**.2, Def. compl.
(4)	$\rceil ((x,y) \in R)$	traducción.3
(5)	$\rceil ((y,x) \in R^{-1})$	trad.4, 2.13
(6)	$(y,x) \notin R^{-1}$	traducción 5
(7)	$(y,x) \in (R^{-1})'$	traducción 6
(8)	$(y,x) \in (R')^{-1} \Rightarrow (y,x) \in (R^{-1})'$	CP 1,7
□ (9)	$(R')^{-1} \subseteq (R^{-1})'$	trad.8, 1.3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $(R')^{-1} \subseteq (R^{-1})'$.
(1) Sea $(y,x) \in (R')^{-1}$. **(2)**Por definición de relación inversa, (x, y)$\in R'$. **(3)**Esto significa que $(x,y) \notin R$;**(4) (5) (6)** y por lo tanto $(y,x) \notin R^{-1}$ (2.13); **(7)** de donde $(y,x) \in (R^{-1})'$.**(8) (9)** Así que $(R')^{-1} \subseteq (R^{-1})'$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $(R')^{-1} \subseteq (R^{-1})'$.
Sea $(y,x) \in (R')^{-1}$. Por definición de relación inversa, (x, y)$\in R'$. Esto significa que $(x,y) \notin R$; y por lo tanto $(y,x) \notin R^{-1}$ (2.13); de donde $(y,x) \in (R^{-1})'$. Así que $(R')^{-1} \subseteq (R^{-1})'$.

7 (ii)

ELD

Demostrar $(R^{-1})' = (R')^{-1}$

Traducción $(y, x)\in(R^{-1})' \Leftrightarrow (y, x)\in(R')^{-1}$

(1)	**R relación**	**P**
(2)	$R\subseteq A\times B$ p. a. A y B conjuntos	Trad.1,2.10
$\Rightarrow$)(3)	$(y, x)\in(R^{-1})'$	P
(4)	$(y, x) \notin R^{-1}$	trad. 2, def. compl.
(5)	$(x, y) \notin R$	(4)
(6)	$(x, y)\in R'$	trad. 5 def. compl.
(7)	$(y, x)\in(R')^{-1}$	6, 2.13
□$_1$(8)	$(y, x)\in(R^{-1})' \Rightarrow (y, x)\in(R')^{-1}$	CP 3,7
$\Leftarrow$ (9)	$(y, x)\in(R')^{-1}$	P
(10)	$(x, y)\in R'$	trad. 9, 2.13
(11)	$(x, y) \notin R$	trad.10, Def. compl..
(12)	$(y, x) \notin R^{-1}$	trad. 11, 2.13
(13)	$(y, x)\in (R^{-1})'$	trad. 12 def. compl.
□$_2$ (14)	$(y, x)\in(R')^{-1} \Rightarrow (y, x)\in (R^{-1})'$	CP 9,13
□ (15)	$(y, x)\in(R^{-1})' \Leftrightarrow (y, x)\in(R')^{-1}$	LB 8,9

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

$\Rightarrow$) **(1) (2) (3)**El hecho de que R sea una relación garantiza que los elementos de R sean parejas ordenadas. Así que sea $(y, x)\in(R^{-1})'$.**(4)** De donde $(y, x)\notin R^{-1}$; **(5)** lo que implica que $(x, y) \notin R$ (2.13). **(6)** Es decir $(x, y)\in R'$. **(7)** Ahora, por definición de relación inversa, $(y, x)\in(R')^{-1}$.**(8)** Con esto se ha demostrado la implicación

$$(y, x)\in(R^{-1})' \Rightarrow (y, x)\in(R')^{-1} \quad (\text{ I })$$

$\Leftarrow$)**(9)**Sea ahora $(y, x)\in(R')^{-1}$.**(10)**Entonces $(x, y)\in R'$ (2.13);**(11)** y $(x, y)\notin R$; **(12)** de donde $(y, x) \notin R^{-1}$ (2.13); **(13)** y por lo tanto $(y, x)\in(R^{-1})'$. **(14)**Así que también se tiene la implicación

$$(y, x)\in(R')^{-1} \Rightarrow (y, x)\in (R^{-1})' \quad (\text{ II })$$

(15) De (I) y (II) se tiene $(y, x)\in(R^{-1})' \Leftrightarrow (y, x)\in(R')^{-1}$; **(16)** lo que equivale a $(R^{-1})' = (R')^{-1}$.□

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

$\Rightarrow$) El hecho de que R sea una relación garantiza que los elementos de R sean parejas ordenadas. Así que sea $(y,x)\in(R^{-1})'$. Entonces $(y,x)\notin R^{-1}$; lo cual implica que $(x,y) \notin R$ (2.13). Es decir $(x, y)\in R'$. Ahora, por definición de relación inversa, $(y, x)\in(R')^{-1}$. Con esto se ha demostrado la implicación

$$(y, x)\in(R^{-1})' \Rightarrow (y, x)\in(R')^{-1} \quad (\text{ I })$$

$\Leftarrow$) Sea ahora $(y, x)\in(R')^{-1}$. Entonces $(x, y)\in R'$ (2.13); de donde $(x, y)\notin R$; es decir $(y, x) \notin R^{-1}$ (2.13). O sea $(y, x)\in(R^{-1})'$.De donde se tiene la implicación

$$(y, x)\in(R')^{-1} \Rightarrow (y, x)\in (R^{-1})' \quad (\text{ II })$$

De (I) y (II) se tiene la equivalencia $(y, x)\in(R^{-1})' \Leftrightarrow (y, x)\in(R')^{-1}$; o sea $(R^{-1})' = (R')^{-1}$.□

8 (i)

ELD

Demostrar $\vec{p_1}\, R = \vec{p_2}\, R^{-1}$

Traducción $x\in \vec{p_1}\, R \Leftrightarrow x\in \vec{p_2}\, R^{-1}$, $\forall x$

$x\in \vec{p_1}\, R \Leftrightarrow (x, y)\in R$ p.a. y. 2.12

$\Leftrightarrow (y, x)\in R^{-1}$ 2.13

$\Leftrightarrow x\in p_2\, R^{-1}$ 2.12

8. (ii)

ELD

Demostrar $\vec{p_2}\, R = \vec{p_1}\, R^{-1}$

Traducción $y\in \vec{p_2}\, R \Leftrightarrow y\in \vec{p_1}\, R^{-1}$, $\forall y$

$y\in \vec{p_2}\, R \Leftrightarrow (x, y) \in R$ p.a. x 2.12

$\Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1}$ 2.13

$\Leftrightarrow y \in \vec{p_1}\, R^{-1}$ 2.12

9 (i)

ELD

Demostrar $(\mathbf{R} \cap \mathbf{S})^{-1} = \mathbf{R}^{-1} \cap \mathbf{S}^{-1}$

Traducción $(y, x) \in (R \cap S)^{-1} \Leftrightarrow (y, x)\in R^{-1} \cap S^{-1}$

$(y, x) \in (R \cap S)^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in (R \cap S)$ 2.13
$\Leftrightarrow (x, y) \in R \wedge (x, y) \in S$ 1.11(i)
$\Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \wedge (x, y) \in S^{-1}$ 2.13
$\Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \cap S^{-1}$ 1.11(i)

9. (ii) **ELD**

Demostrar $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

Traducción $(y, x) \in (R \cup S)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \cup S^{-1}$

$(y, x) \in (R \cup S)^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in (R \cup S)$ 2.13
$\Leftrightarrow (x, y) \in R \vee (x, y) \in S$ 1.11(ii)
$\Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \vee (x, y) \in S^{-1}$ 2.13
$\Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \cup S^{-1}$ 1.11(ii)

9.(iii) **ELD**

Demostrar $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$

Traducción $(y, x) \in (R - S)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} - S^{-1}$

$(y, x) \in (R - S)^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in (R - S)$ 2.13
$\Leftrightarrow (x, y) \in R \wedge (x, y) \notin S$ 1.16
$\Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \wedge (x, y) \notin S^{-1}$ 2.13
$\Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} - S^{-1}$ 1.16

10. $p_1(R) = \varnothing \not\Leftarrow R = \varnothing$ Considere $R = \{1, 2, 3\}$

$\vec{p}_1\{1,2,3\} = \phi$, y $\{1,2,3\} \neq \phi$

11. (i)

. **ELD**

Demostrar $\vec{p}_1(R \cap S) \subseteq \vec{p}_1 R \cap \vec{p}_1 S$

Traducción $x \in \vec{p}_1(R \cap S) \Rightarrow x \in \vec{p}_1 R \cap \vec{p}_1 S$

(1)	$x \in \vec{p}_1(R \cap S)$	**P**
(2)	$(x, y) \in R \cap S$ p.a. y	1, 2.12
(3)	$(x, y) \in R \wedge (x, y) \in S$	trad.2, 1.11(i)
(4)	$x \in \vec{p}_1 R \wedge x \in \vec{p}_1 S$	trad.3, 2.12
(5)	$x \in \vec{p}_1 R \cap \vec{p}_1 S$	trad.4, 1.11(i)

$$(6) \quad x \in \vec{p}_1(R \cap S) \Rightarrow x \in \vec{p}_1 R \cap \vec{p}_1 S \qquad \text{CP } 1,5$$

$$\square\ (7) \quad \vec{p}_1(R \cap S) \subseteq \vec{p}_1 R \cap \vec{p}_1 S \qquad \text{trad. } 6,1.3$$

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{p}_1(R \cap S) \subseteq \vec{p}_1 R \cap \vec{p}_1 S$.

(1) Sea $x \in \vec{p}_1(R \cap S)$.**(2)** Entonces $(x, y) \in R \cap S$ p.a. y (2.12),**(3)**o sea $(x, y) \in R \wedge$ $(x, y) \in S$. **(4)(5)**Por 2.12, $x \in \vec{p}_1 R \wedge$ $x \in \vec{p}_1 S$ con lo que $x \in \vec{p}_1 R \cap \vec{p}_1 S$.

(6)(7) Luego $\vec{p}_1(R \cap S) \subseteq \vec{p}_1 R \cap \vec{p}_1 S$.

Demostración en lenguaje formal sin la uda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{p}_1(R \cap S) \subseteq \vec{p}_1 R \cap \vec{p}_1 S$.

Sea $x \in \vec{p}_1(R \cap S)$. Entonces $(x, y) \in R \cap S$ p.a. y (2.12), y $(x, y) \in R \wedge$ $(x, y) \in S$. Por 2.12, $x \in \vec{p}_1 R \wedge$ $x \in \vec{p}_1 S$ y por lo tanto $x \in \vec{p}_1 R \cap \vec{p}_1 S$.

Luego $\vec{p}_1(R \cap S) \subseteq \vec{p}_1 R \cap \vec{p}_1 S$.

11(ii). **ELD**

Demostrar $\vec{p}_1(R \cup S) = \vec{p}_1 R \cup \vec{p}_1 S$

Traducción: $x \in \vec{p}_1(R \cup S) \Leftrightarrow x \in \vec{p}_1 R \cup \vec{p}_1 S$

$$\begin{aligned} x \in \vec{p}_1(R \cup S) &\Leftrightarrow (x, y) \in R \cup S && \text{p.a.y} \quad 2.12 \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in R \vee (x, y) \in S && 1.11(ii) \\ &\Leftrightarrow x \in \vec{p}_1 R \vee x \in \vec{p}_1 S && 2.12 \\ &\Leftrightarrow x \in \vec{p}_1 R \cup \vec{p}_1 S && 1.11(ii) \end{aligned}$$

11. (iii) **ELD**

Demostrar $\vec{p}_1 R - \vec{p}_1 S \subseteq \vec{p}_1(R - S)$

Traducción $x \in \vec{p}_1 R - \vec{p}_1 S \Rightarrow x \in \vec{p}_1(R - S)$

(1) $x \in \vec{p}_1 R - \vec{p}_1 S$ **P**

(2)	$x \in \overset{\rightarrow}{p_1} R \wedge x \notin \overset{\rightarrow}{p_1} S$	1, 1.16
(3)	$(x, y) \in R \wedge (x, y) \notin S \quad p.a.y$	trad.2, 1.12
(4)	$(x, y) \in R - S$	trad.3, 1.16
(5)	$x \in \overset{\rightarrow}{p_1}(R - S)$	trad.4, 2.12
(6)	$x \in \overset{\rightarrow}{p_1} R - \overset{\rightarrow}{p_1} S \Rightarrow x \in \overset{\rightarrow}{p_1}(R - S)$	CP 1,5
□ (7)	$\overset{\rightarrow}{p_1} R - \overset{\rightarrow}{p_1} S \subseteq \overset{\rightarrow}{p_1}(R - S)$	trad. 6, 1.3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overset{\rightarrow}{p_1} R - \overset{\rightarrow}{p_1} S \subseteq \overset{\rightarrow}{p_1}(R - S)$.

(1) Sea $x \in \overset{\rightarrow}{p_1} R - \overset{\rightarrow}{p_1} S$, **(2)** entonces $x \in \overset{\rightarrow}{p_1} R \wedge x \notin \overset{\rightarrow}{p_1} S$ (1.16). **(3)**Esto es $(x, y) \in R \wedge (x, y) \notin S$ para algún y (2.12); **(4)** es decir, $(x, y) \in R - S$;**(5)** lo que equivale a $x \in \overset{\rightarrow}{p_1}(R - S)$ (2:12).**(6)(7)**Así que $\overset{\rightarrow}{p_1} R - \overset{\rightarrow}{p_1} S \subseteq \overset{\rightarrow}{p_1}(R - S)$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overset{\rightarrow}{p_1} R - \overset{\rightarrow}{p_1} S \subseteq \overset{\rightarrow}{p_1}(R - S)$. Sea $x \in \overset{\rightarrow}{p_1} R - \overset{\rightarrow}{p_1} S$, entonces $x \in \overset{\rightarrow}{p_1} R \wedge x \notin \overset{\rightarrow}{p_1} S$ (1.16). Esto es $(x, y) \in R \wedge (x, y) \notin S$ p.a.y (2.12). Lo que equivale a $(x, y) \in R - S$ y $x \in \overset{\rightarrow}{p_1}(R - S)$ (2:12). Así que $\overset{\rightarrow}{p_1} R - \overset{\rightarrow}{p_1} S \subseteq \overset{\rightarrow}{p_1}(R - S)$.

11 (iii)

ELD

Demostrar $\overset{\rightarrow}{p_1}$ (R) − $\overset{\rightarrow}{p_1}$ (S) ⊂ $\overset{\rightarrow}{p_1}$ (R − S)

Traducción x ∈ $\overset{\rightarrow}{p_1}$ (R) − $\overset{\rightarrow}{p_1}$ (S) ⇒ x ∈ $\overset{\rightarrow}{p_1}$ (R − S)

(1)	x ∈ $\overset{\rightarrow}{p_1}$ (R) − $\overset{\rightarrow}{p_1}$ (S)	**P**
(2)	x ∈ $\overset{\rightarrow}{p_1}$ (R) ∧ x ∉ $\overset{\rightarrow}{p_1}$ (S)	trad.1, 1.16
(3)	(x, y)∈R ∧ (x, y) ∉S p.a. y.	trad. 2, 2.12
(4	(x, y)∈R − S	trad. 3, 1.16
(5)	x ∈ $\overset{\rightarrow}{p_1}$ (R − S)	trad. 4, 2.12
(6)	x ∈ $\overset{\rightarrow}{p_1}$ (R) − $\overset{\rightarrow}{p_1}$ (S) ⇒ x∈ $\overset{\rightarrow}{p_1}$ (R − S)	CP 1,5

□ (7) $\overrightarrow{p_1}$ (R) − $\overrightarrow{p_1}$ (S) ⊂ $\overrightarrow{p_1}$ (R − S) traducción 6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Sea x ∈ $\overrightarrow{p_1}$ (R) − $\overrightarrow{p_1}$ (S). **(2)**Entonces x ∈ $\overrightarrow{p_1}$ (R) ∧ x ∉ $\overrightarrow{p_1}$ (S), por (1.16).**(3)** De donde (x, y)∈R ∧ (x, y) ∉S para algún y.(2.12) **(4)** Pero esto es lo mismo que (x, y)∈R − S (1.16).**(5)**De donde x ∈ $\overrightarrow{p_1}$ (R − S), por (2.12). **(6)** con lo cual se ha demostrado la implicación

$$x \in \overrightarrow{p_1}(R) - \overrightarrow{p_1}(S) \Rightarrow x \in \overrightarrow{p_1}(R - S).$$

(7) O sea $\overrightarrow{p_1}$ (R) − $\overrightarrow{p_1}$ (S) ⊂ $\overrightarrow{p_1}$ (R − S). □

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea x ∈ $\overrightarrow{p_1}$ (R) − $\overrightarrow{p_1}$ (S).

Entonces

$$x \in \overrightarrow{p_1}(R) \wedge x \notin \overrightarrow{p_1}(S) \quad (1.16).$$

Esto implica

$$(x, y)\in R \wedge (x, y) \notin S \text{ para algún y.}(2.12)$$

Lo que equivale a (x, y)∈R − S (1.16).De donde x ∈ $\overrightarrow{p_1}$ (R − S) (2.12). Con lo que se ha demostrado la implicación

$$x \in \overrightarrow{p_1}(R) - \overrightarrow{p_1}(S) \Rightarrow x \in \overrightarrow{p_1}(R - S).$$

O sea $\overrightarrow{p_1}$ (R) − $\overrightarrow{p_1}$ (S) ⊂ $\overrightarrow{p_1}$ (R − S). □

4. COMPOSICIÓN

La operación de componer relaciones se entiende fácilmente si estas se escriben en forma tabular. Sea R = {(1, 8), (2,9), (2, 10)} y S = {(7,12), (8,12), (8,13), (9,14)}.

Compare los segundos elementos de R con los primeros de S. Cuando sean iguales (los únicos son 8 y 9), fórmense parejas con los primeros elementos correspondientes de R y los segundos de S. La nueva relación que así se forma se llama la composición de R y S y se denota por $S \circ R$.

R

1	8
2	9
2	10

S

7	12
8	12
8	13
9	14

$S \circ R$

1	12
1	13
2	14

El por qué escribimos $S \circ R$ en lugar de $S \circ R$, que parece más natural, quedará claro cuando hablemos de composición de funciones (Sección 2, capítulo III).

Refiriéndonos a R_2 en 2.10, $R_2 \circ R_1$ es la relación "ser abuelo de".

2.14 Definición : $S \circ R = \{(x, y) \,/\, \exists z((x, y) \in R \wedge (z, y) \in S\}$

La definición anterior no exige que R y S sean relaciones! Aunque para relaciones es que en especial se da.

Caracterización de los elementos de $S \circ R$

$$(x, y) \in S \circ R \Leftrightarrow \exists z((x, z) \in R \wedge (z, y) \in S)$$

Negación de $(x, y) \in S \circ R$

$$\begin{aligned}(x, y) \notin S \circ R &\Leftrightarrow \neg (\exists z)((x, z) \in R \wedge (z, y) \in S) \\ &\Leftrightarrow \text{No existe z tal que } (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S \\ &\Leftrightarrow (\forall z)\, [(x, z) \notin R \vee (z, y) \notin S]\end{aligned}$$

$(x, z) \notin R \vee (z, y) \notin S \Leftrightarrow [((x, z) \notin R \wedge (z, y) \in S) \vee ((x, z) \in R \wedge (z, y) \notin S) \vee ((x, z) \notin R \wedge (z, y) \notin S)]$

Ejemplo : Sean $R = \{(1, 4)\ (2, 4)\ (3, 5)\}$
$S = \{(4, 5)\ (4, 7)\ (5, 2)\}$

Determinar $S \circ R$.

$(1, 4)\in R \wedge (4, 5)\in S \Rightarrow (1, 5)\in S\circ R$
$(1, 4)\in R \wedge (4, 7)\in S \Rightarrow (1, 7)\in S\circ R$
$(2, 4)\in R \wedge (4, 5)\in S \Rightarrow (2, 5)\in S\circ R$
$(2, 4)\in R \wedge (4, 7)\in S \Rightarrow (2, 7)\in S\circ R$
$(3, 5)\in R \wedge (5, 2)\in S \Rightarrow (3, 2)\in S\circ R$

Entonces $S\circ R = \{(1, 5), (1, 7), (2, 5), (2, 7), (3, 2)\}$

$(1, 2)\notin S\circ R$ porque $\rceil(\exists z)((1, z)\in R \wedge (z, 2)\in S)$. $(1, 4)\in R$, pero $(4, 2)\notin S$

Hallemos ahora $R\circ S$.

$(3, 5)\in R \wedge (5, 2)\in S \Rightarrow (3, 2)\in S\circ R$

$R\circ S$ tiene solamente un elemento.

Por lo tanto $R\circ S = \{(3, 2)\}$. En general $S\circ R \neq R\circ S$.

2.15 Proposición : $S\circ R$ es una relación

2.16 Proposición : **(i)** $T\circ(S\circ R) = (T\circ S)\circ R$
(ii) $(S\circ R)^{-1} = R^{-1}\circ S^{-1}$

Demostración de (i):

ELD

Demostrar $T\circ(S\circ R) = (T\circ S)\circ R$

Traducción $(x, y)\in T\circ(S\circ R) \Leftrightarrow (x,y)\in(T\circ S)\circ R$

$(x,y)\in T\circ(S\circ R) \Leftrightarrow \exists z((x,z)\in S\circ R \wedge (z,y)\in T$ 2.14
$\Leftrightarrow \exists z(\exists w((x,w)\in R\wedge(w,z)\in S)\wedge(z,y)\in T)$ 2.14
$\Leftrightarrow \exists z(\exists w(x,w)\in R\wedge \exists w(w,z)\in S)\wedge(z,y)\in T)$
$\Leftrightarrow \exists z (\exists w (x, w)\in R \wedge (\exists w (w, z)\in S \wedge(z, y)\in T))$ p. Asoc.
$\Leftrightarrow \exists w((x,w)\in R\wedge(w,y)\in T\circ S)$ 2.14
$\Leftrightarrow (x,y)\in(T\circ S)\circ R$ 2.14

Demostración de (ii)

ELD

Demostrar $(S\circ R)^{-1} = R^{-1}\circ S^{-1}$

Traducción $(y, x)\in(S\circ R)^{-1} \Leftrightarrow (y, x)\in R^{-1}\circ S^{-1}$

$(y, x) \in (S \circ R)^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in S \circ R$ 2.13
$\Leftrightarrow \exists z((x, z) \in R \wedge (z, y) \in S)$ 2.14
$\Leftrightarrow \exists z\ ((z, x) \in R^{-1} \wedge (y, z) \in S^{-1})$ 2.13
$\Leftrightarrow \exists z\ ((y, z) \in S^{-1} \wedge (z, x) \in R^{-1})$ Conm. Ax.
$\Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \circ S^{-1}$ 2.14

EJERCICIO 2.4

1. $R \circ \varnothing = \varnothing \circ R = \varnothing$
2. $\{1, 2\} \circ \{1, 2\} = ?$
3. $R \subseteq A \times B \Rightarrow \Delta_B \circ R = R \wedge R \circ \Delta_A = R$
4. (i) $p_1(S \circ R) \subseteq p_1 R$
   (ii) $p_2(S \circ R) \subseteq p_2(S)$
   (iii) $p_2 R \subseteq p_1 S \Rightarrow p_1(S \circ R) = p_1 R$
5. 2.15
6. (i) $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$
   (ii) $(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$
   (iii) $(S - T) \circ R \supseteq (S \circ R) - (T \circ R)$
7. ¿Què es $(A \times A) \circ (A \times A)$?
8. (i) $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow (A \times B) \circ (A \times B) = A \times B$
   (ii) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow (A \times B) \circ (A \times B) = \varnothing$
   (iii) $B \neq \varnothing \Rightarrow (B \times C) \circ (A \times B) = A \times C$

ACTIVIDAD PRÁCTICA – PROCESO IMITATIVO

1. $R \circ \varnothing = \varnothing \circ R = \varnothing$

ELD
Demostrar $R \circ \varnothing = \varnothing$
Por RAA

(1)	$R \circ \varnothing \neq \varnothing$	**P**
(2)	$\exists (x_0, y_0): (x_0, y_0) \in R \circ \varnothing$	(1), 1.6 (ii)
(3)	$\exists z\ ((x_0, z) \in \varnothing \wedge (z, y_0) \in R)$	I 2, 2.14
(4)	$(x_0, z) \in \varnothing$	S3
(5)	$\varnothing$ tiene elementos	(4)

(6)	$\varnothing$ no tiene elementos	P 1.6 (i)
(7)	$\varnothing$ tiene elementos $\wedge$ $\varnothing$ no tiene elementos	A 5,6
(8)	$R\circ\varnothing = \varnothing$	RAA 1,4

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Supongamos lo contrario; esto es, $R\circ\varnothing \neq \varnothing$.**(2)** Entonces, por 1.6 (ii), existe un par ordenado (x_0,y_0) tal que $(x_0,y_0)\in R\circ\varnothing$;**(3)**lo que implica que $(x_0,z)\in\varnothing$ y $(z, y_0)\in R$ para algún z (2.14). **(4)** **(5)**En particular $(x_0,z)\in\varnothing$, lo cual quiere decir que $\varnothing$ posee elementos, al menos tiene la pareja (x_0,z). **(6)** **(7)** Pero esto contradice el teorema 1.6 (i) que dice que el conjunto vacío no tiene elementos. **(8)** Luego $R\circ\varnothing = \varnothing$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario; esto es, $R\circ\varnothing \neq \varnothing$. Entonces , por 1.6 (ii), existe un par ordenado (x_0,y_0) tal que $(x_0,y_0)\in R\circ\varnothing$; lo que implica que $(x_0,z)\in\varnothing$ y $(z, y_0)\in R$ para algún z (2.14). En particular $(x_0, z)\in\varnothing$, lo cual quiere decir que $\varnothing$ posee elementos, al menos tiene la pareja (x_0,z). Pero esto contradice el teorema 1.6 (i) que dice que el conjunto vacío no tiene elementos. Luego $R\circ\varnothing = \varnothing$.

(Similar para demostrar $\varnothing\circ R = \varnothing$).

2. $\{1, 2\}\circ\{1, 2\} = ?$

ELD

Demostrar $\{1, 2\}\circ\{1, 2\} = \varnothing$

Por RAA

(1)	$\{1, 2\}\circ\{1, 2\} \neq \varnothing$	**P**
(2)	$\exists\,(x, y)\in \{1, 2\}\circ\{1, 2\}$	2, 2.14, 1.6(ii)
(3)	$\exists\,z((x, z)\in \{1, 2\} \wedge (z, y)\in\{1, 2\})$	trad.2, 2.14
(4)	$(x, z)\in \{1, 2\}$	S 3
(5)	$(x, z) = 1\vee (x, z) = 2$	4
□ (6)	$\{1, 2\}\circ\{1, 2\} = \varnothing$	RAA 1,5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Supongamos lo contrario, es decir, $\{1, 2\}\circ\{1, 2\} \neq \varnothing$. **(2)** Entonces existe $(x, y)\in \{1, 2\}\circ\{1, 2\}$ (2.14,1.6(ii)); **(3)** de donde $\exists\ z((x, z)\in \{1, 2\}$ y $(z, y)\in\{1, 2\})$ (2.14). **(4)**En particular $(x, z)\in \{1, 2\}$; **(5)**lo que implica que $(x, z) = 1$ ó $(x, z) = 2$, que es un absurdo. **(6)** Luego, $\{1, 2\}\circ\{1, 2\} = \varnothing$. □

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario:

$$\{1, 2\}\circ\{1, 2\} \neq \varnothing .$$

Entonces existe (x, y) tal que

$$(x, y)\in \{1, 2\}\circ\{1, 2\}, \quad \text{por} \quad (2.14,1.6(ii)).$$

Lo que implica que existe un z :

$$(x, z)\in \{1, 2\} \text{ y } (z, y)\in\{1, 2\}), \quad \text{por} \ (2.14).$$

En particular

$$(x, z)\in \{1, 2\};$$

lo que implica que

$$(x, z) = 1 \text{ ó } (x, z) = 2 ,$$

que es un absurdo.
Luego,

$$\{1, 2\}\circ\{1, 2\} = \varnothing . \ \square$$

3. $R \subseteq A\times B \Rightarrow \Delta_B \circ R = R \wedge R\circ\Delta_A = R$

ELD

Demostrar $\Delta_B \circ R = R \wedge R\circ\Delta_A = R$

Traducción $(x, y)\in\Delta_B \circ R \Leftrightarrow (x, y)\in R$

(1)	**$R \subseteq A\times B$**	**P**

ELD1

Demostrar $\Delta_B \circ R = R$

Traducción $(x, y)\in\Delta_B \circ R \Leftrightarrow (x, y)\in R$

(1)	**$R \subseteq A\times B$**	**P**
⇒)(2)	$(x, y)\in\Delta_B \circ R$	P
(3)	$\exists\ z ((x, z)\in R \wedge (z, y)\in\Delta_B)$	I. 2, def. de compuesta
(4)	$(z, y)\in\Delta_B$	S3
(5)	$z = y$	traducción 4

(6)	$(x, z)\in R$	S3
(7)	$(x, y)\in R$	I 5,6
□$_1$ (8)	$(x, y)\in \Delta_B \circ R \Rightarrow (x, y)\in R$	CP2,7
⇐)(9)	$(x, y)\in R$	P
(10)	$(y, y)\in \Delta_B$	P (1)
(11)	$(x, y)\in R \wedge (y, y)\in \Delta_B$	A10,9
(12)	$(x, y)\in \Delta_B \circ R$	traducción 11
□$_2$ (13)	$(x, y)\in R \Rightarrow (x, y)\in \Delta_B \circ R$	CP 9,12
(14)	$(x, y)\in \Delta_B \circ R \Leftrightarrow (x, y)\in R$	LB 8,13
□ (15)	$\Delta_B \circ R = R$	traducción 14

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) Sea $(x, y)\in \Delta_B \circ R$.**(3)P**or definición de compuesta, existe z tal $(x, z)\in R$ y $(z, y)\in \Delta_B$ para algún z.**(4)**En particular $(z, y)\in \Delta_B$. **(5)**De donde $z = y$ (2.11). **(6)(7)**Reemplazando este valor de z en $(x, z)\in R$ se obtiene $(x, y)\in R$, **(8)** dándose la implicación

$$(x, y)\in \Delta_B \circ R \Rightarrow (x, y)\in R \qquad (\text{I})$$

(9) Sea ahora $(x, y)\in R$. **(10)** **(11)** Como R es una relación de A en B, se tiene $(y, y)\in \Delta_B$ y también la conjunción $(x, y)\in R \wedge (y, y)\in \Delta_B$.**(12)** Pero esto significa que $(x, y)\in \Delta_B \circ R$, **(13)**cumpliéndose la implicación

$$(x, y)\in R \Rightarrow (x, y)\in \Delta_B \circ R. \qquad (\text{II})$$

(14) De (I) y (II) se tiene la equivalencia $(x, y)\in \Delta_B \circ R \Leftrightarrow (x, y)\in R$.
(15) O sea $\Delta_B \circ R = R$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $(x, y)\in \Delta_B \circ R$.Por definición de compuesta, existe un z tal que $(x, z)\in R$ y $(z, y)\in \Delta_B$ para algún z. En particular $(z, y)\in \Delta_B$. De donde $z = y$ (2.11). Reemplazando este valor de z en $(x, z)\in R$, se obtiene $(x, y)\in R$, dándose la implicación

$$(x, y)\in \Delta_B \circ R \Rightarrow (x, y)\in R \qquad (\text{I})$$

Sea ahora (x, y)$\in$R. Como R es una relación de A en B, se tiene (y, y)$\in\Delta_B$ y también la conjunción (x, y)$\in$R $\wedge$ (y, y)$\in\Delta_B$. Pero esto significa que (x, y)$\in\Delta_B \circ$ R, cumpliéndose la implicación

$$(x, y)\in R \Rightarrow (x, y)\in \Delta_B \circ R. \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) se tiene la equivalencia (x, y)$\in\Delta_B \circ$ R $\Leftrightarrow$ (x, y)$\in$R.
O sea $\Delta_B \circ$ R = R.

4. (i) **ELD**

Demostrar $\vec{p}_1$ (S$\circ$R) $\subseteq$ $\vec{p}_1$ R

Traducción x$\in \vec{p}_1$ (S$\circ$R) $\Rightarrow$ x$\in \vec{p}_1$ R

(1)	x$\in \vec{p}_1$ (S$\circ$R)	**P**
(2)	(x, y)$\in$S$\circ$R) p.a. y	traducción 1
(3)	$\exists$ z((x, z)$\in$R $\wedge$ (z, y)$\in$S)	traducción 2
(4)	(x, z)$\in$R	S 3
(5)	x$\in \vec{p}_1$ R	traducción 4
(6)	x$\in \vec{p}_1$ (S$\circ$R) $\Rightarrow$ x$\in \vec{p}_1$ R	CP 1,5
(7)	$\vec{p}_1$ (S$\circ$R) $\subseteq \vec{p}_1$ R	traducción 5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{p}_1$ (S$\circ$R) $\subseteq \vec{p}_1$ R

(1) Sea x$\in \vec{p}_1$ (S$\circ$R). **(2)** Por 2.12, (x, y)$\in$S$\circ$R p. a. y. **(3)** Por 2.14, (x, z)$\in$R y (z, y)$\in$S p.a.z. **(4)** En particular, (x, z)$\in$R. **(5)** Por 2.12, x$\in \vec{p}_1$ R.**(6)** **(7)** Luego, $\vec{p}_1$ (S$\circ$R) $\subseteq$ $\vec{p}_1$ R.

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Sea x$\in \vec{p}_1$ (S$\circ$R). Por 2.12, (x, y)$\in$S$\circ$R p. a. y. Por 2.14, (x, z)$\in$R y (z, y)$\in$S p.a.z. En particular, (x, z)$\in$R. Por 2.12, x$\in \vec{p}_1$ R.
Luego, $\vec{p}_1$ (S$\circ$R) $\subseteq$ $\vec{p}_1$ R.

4 (iii) **ELD**

Demostrar $\vec{p}_1\,(\mathbf{S}\circ\mathbf{R}) = \vec{p}_1\,\mathbf{R}$

Traducción $x\in \vec{p}_1\,(S\circ R) \Leftrightarrow x\in \vec{p}_1\,R$

(1)	$\vec{p}_2\,\mathbf{R} \subseteq \vec{p}_1\,\mathbf{S}$	**P**
⇒)(2)	$x\in \vec{p}_1\,(S\circ R)$	**P**
(3)	$(x, y)\in S\circ R)$ p.a. y	traducción 2
(4)	$\exists z((x, z)\in R \wedge (z, y)\in S\ )$	traducción 3
(5)	$(x, z)\in R$	S 4
(6)	$x\in \vec{p}_1\,R$	traducción 5
□$_1$(7)	$x\in \vec{p}_1\,(S\circ R) \Rightarrow x\in \vec{p}_1\,R$	CP 2,6
⇐)(8)	$x\in \vec{p}_1\,R$	P
(9)	$(x, y)\in R$ p.a.y	traducción 8
(10)	$y\in \vec{p}_2\,R$	traducción 9
(11)	$y\in \vec{p}_1\,S$	10,1
(12)	$(y, z)\in S$ p.a.z	traducción 11
(13)	$(x, y)\in R \wedge (y, z)\in S$	A 9,12
(14)	$(x, z)\in S\circ R$	traducción 13
(15)	$x\in \vec{p}_1\,(S\circ R)$	traducción 14
□$_2$ (16)	$x\in \vec{p}_1\,R \Rightarrow x\in \vec{p}_1\,(S\circ R)$	CP 8,15
(17)	$x\in \vec{p}_1\,(S\circ R) \Leftrightarrow x\in \vec{p}_1\,R$	LB 7,16
□ (18)	$\vec{p}_1\,(S\circ R) = \vec{p}_1\,R$	traducción 17

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2)Sea $x\in \vec{p}_1\,(S\circ R)$. (3)Entonces, $(x, y)\in S\circ R)$ para algún y (2.12). (4) Es decir $(x, z)\in R$ y $(z, y)\in S$ para algún y, por 2.14. (5)En particular se tiene que $(x, z)\in R$. (6)Esto implica que $x\in \vec{p}_1\,R$ (2.12). (7) Por lo tanto se cumple la implicación

$$x\in \vec{p}_1\,(S\circ R) \Rightarrow x\in \vec{p}_1\,R \quad (\mathrm{I})$$

(8) Sea ahora x$\in \vec{p}_1$ R. **(9)** Entonces (x, y)$\in$R para algún y, por definición de primera proyección. **(10)**Es decir que y$\in \vec{p}_2$ R (2.12). **(11)** Debido a que $\vec{p}_2$ R $\subseteq \vec{p}_1$ S, por hipòtesis, entonces y$\in \vec{p}_1$ S. **(12)** Es decir (y, z)$\in$S para algún z (2.12). **(13)**Por lo tanto, adjuntando (x, y)$\in$R y (y, z)$\in$S **(14)**se tiene (x, z)$\in$S$\circ$R, por definIción de compuesta. **(15)**De donde x$\in \vec{p}_1$ (S$\circ$R) (2.14), **(16)** cumpliéndose así la implicación

$$x\in \vec{p}_1\, R \Rightarrow x\in \vec{p}_1\, (S\circ R) \qquad (\ II\ )$$

(17) De (I) y (II) se cumple la equivalencia x$\in \vec{p}_1$ (S$\circ$R) $\Leftrightarrow$ x$\in \vec{p}_1$ R.

(18) Esto es $\vec{p}_1$ (S$\circ$R) = $\vec{p}_1$ R . □

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea x$\in \vec{p}_1$ (S$\circ$R). Entonces (x, *y*)$\in$S$\circ$R) p.a. *y*. (2.12). Es decir (x, z)$\in$R y (z, y)$\in$S para algún y por 2.14. En particular se tiene que (x, z)$\in$R. Esto implica que x$\in \vec{p}_1$ R (2.12). Por lo tanto se cumple la implicación

$$x\in \vec{p}_1\, (S\circ R) \Rightarrow x\in \vec{p}_1\, R \qquad (\ I\ )$$

Sea ahora x$\in \vec{p}_1$ R. Entonces (x, y)$\in$R para algún y, por definción de primera proyección. Es decir que y$\in \vec{p}_2$ R (2.12). Debido a que $\vec{p}_2$ R $\subseteq \vec{p}_1$ S, por hipòtesis, entonces y$\in \vec{p}_1$ S. Es decir (y, z)$\in$S para algún z (2.12). Por lo tanto, adjuntando (x, y)$\in$R y (y, z)$\in$S se tiene (x, z)$\in$S$\circ$R, por definción de compuesta. De donde x$\in \vec{p}_1$ (S$\circ$R) (2.14), cumpliéndose así la implicación

$$x\in \vec{p}_1\, R \Rightarrow x\in \vec{p}_1\, (S\circ R) \qquad (\ II\ )$$

De (I) y (II) se cumple la equivalencia $x \in \vec{p}_1 (S \circ R) \Leftrightarrow x \in \vec{p}_1 R$. Es decir $\vec{p}_1 (S \circ R) = \vec{p}_1 R$. □

5. $S \circ R$ es una relación debido a que, por definición, sus elementos son parejas ordenadas; lo que significa que $S \circ R$ es subconjunto de un producto cartesiano.

6.(i)

.   **ELD**

Demostrar $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$

Traducción $(x, y) \in (S \cup T) \circ R \Leftrightarrow (x, y) \in (S \circ R) \cup (T \circ R)$

$(x,y) \in (S \cup T) \circ R$	$\Leftrightarrow \exists z ((x, z) \in R \wedge (z, y) \in S \cup T)$	2.14
	$\Leftrightarrow \exists z ((x, z) \in R \wedge ((z, y) \in S \vee (z, y) \in T)$	1.11(ii)
	$\Leftrightarrow ((x, z) \in R \wedge (z, y) \in S) \vee ((x, z) \in R \wedge (z, y) \in T)$	p. distrib.
	$\Leftrightarrow (x, y) \in (S \circ R) \vee (x, y) \in (T \circ R)$	2.14
	$\Leftrightarrow (x, y) \in (S \circ R) \cup (T \circ R)$	1.11(ii)

6 (ii)

ELD

Demostrar $(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$

Traducción $(x, y) \in (S \cap T) \circ R \Rightarrow (x, y) \in (S \circ R) \cap (T \circ R)$

(1)	$(x, y) \in (S \cap T) \circ R$	**P**
(2)	$\exists z ((x, z) \in R \wedge (z, y) \in S \cap T)$	I.1, 2.14
(3)	$(x, z) \in R \wedge ((z, y) \in S \wedge (z, y) \in T))$	I. 2, 1.11
(4)	$((x, z) \in R \wedge (z, y) \in S) \wedge ((x, z) \in R \wedge (z, y) \in T))$	A3
(5)	$(x, y) \in (S \circ R) \wedge (x, y) \in (S \circ R)$	I. 4,2.14
(6)	$(x, y) \in (S \circ R) \cap (T \circ R)$	I 3,1.11
(7)	$(x, y) \in (S \cap T) \circ R \Rightarrow (x, y) \in (S \circ R) \cap (T \circ R)$	CP 1,6
(8)	$(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$	traducción 7

La demostración en lenguaje formal se deja al lector.

6 (iii)

ELD

Demostrar $(S \circ R) - (T \circ R) \subseteq (S - T) \circ R$

Traducción $(x, y) \in (S \circ R) - (T \circ R) \Rightarrow (x, y) \in (S - T) \circ R$

(1)	$(x, y) \in (S \circ R) - (T \circ R)$	**P**
(2)	$(x, y) \in (S \circ R) \wedge (x, y) \notin (T \circ R)$	I 1,1.16

(3)	$\exists z((x, z)\in R \wedge (z, y)\in S) \wedge \neg(\exists z)((x, z)\in R \wedge (z, y)\in T)$	I 2,2.14
(4)	$((x, z)\in R \wedge (z, y)\in S) \wedge ((x, z)\notin R \vee (z, y)\notin T)$	I 3, DL
(5)	$[((x, z)\in R \wedge (z, y)\in S) \wedge (x, z)\notin R)] \vee [((x, z)\in R\wedge(z, y)\in S) \wedge (z, y)\notin T]$ (4)	4
(6)	$\neg\ [((x, z)\in R \wedge (z, y)\in S) \wedge (x, z)\notin R)]$	P
(7)	$[((x, z)\in R\wedge(z, y)\in S) \wedge (z, y)\notin T]$	TP 5,6
(8)	$(x, z)\in R \wedge ((z, y)\in S) \wedge (z, y)\notin T)$	I 7, Asoc. Ax.
(9)	$(x, z)\in R \wedge (z, y)\in S - T$	I 8, 1.16
(10)	$(x, y)\in (S - T)\circ R$	I 9, 1.16
(11)	$(x, y)\in (S\circ R) - (T\circ R) \Rightarrow (x, y)\in (S - T)\circ R$	CP 1,10
(12)	$(S\circ R) - (T\circ R) \subseteq (S - T)\circ R$	traducción 11

7. ¿ Qué es $(A\times A)\circ(A\times A)$ = ?

$(A\times A)\circ(A\times A) = A\times A$

ELD

Demostrar $(A\times A)\circ(A\times A) = A\times A$

Traducción $(x, y)\in(A\times A)\circ(A\times A) \Leftrightarrow (x, y)\in A\times A$

⇒)(1)	$(x, y)\in (A\times A)\circ(A\times A)$	P
(2)	$\exists z\ ((x, z)\in A\times A \wedge (z, y)\in A\times A)$	I. 1, 2.14
(3)	$x\in A \wedge z\in A \wedge z\in A \wedge y\in A$	I trad.2, 2.6
(4)	$x\in A \wedge y\in A$	S 3
(5)	$(x, y)\in A\times A$	I trad.4, 2.6
□$_1$ (6)	$(x, y)\in (A\times A)\circ(A\times A) \Rightarrow (x, y)\in A\times A$	CP 1,5
⇐)(7)	$(x, y)\in A\times A$	P
(8)	$x\in A \wedge y\in A$	I.8, 2.6
(9)	$x\in A \wedge y\in A \wedge y\in A \wedge y\in A$	I 8, A
(10)	$(x, y)\in A\times A \wedge (y, y)\in A\times A$	I 9, 2.6
(11)	$(x, y)\in (A\times A)\circ(A\times A)$	I 10, 2.14
□$_2$ (12)	$(x, y)\in A\times A \Rightarrow (x, y)\in(A\times A)\circ(A\times A)$	CP 7,11
(13)	$(x, y)\in(A\times A)\circ(A\times A) \Leftrightarrow (x, y)\in A\times A$	LB 6,12
□ (14)	$(A\times A)\circ(A\times A) = A\times A$	I.13, 2.6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $(A\times A)\circ(A\times A) = A\times A$.
(1) Sea $(x, y)\in (A\times A)\circ(A\times A)$. **(2)**Por 2.14 existe z tal que $(x, z)\in A\times A \wedge (z, y)\in A\times A$, **(3)(4)**de donde $x\in A \wedge y\in A$ **(5)**o sea $(x, y)\in A\times A$ **(6)** y se tiene la implicación

$$(x, y)\in (A\times A)\circ(A\times A) \Rightarrow (x, y)\in A\times A \quad (\text{ I })$$

(7) Sea ahora $(x, y)\in A\times A$, **(8)** sea $x\in A \wedge y\in A$. **(9)**Entonces x∈A∧y∈A ∧ y∈ A ∧ y∈ A **(10)** y por lo tanto $(x,y)\in A\times A \wedge (y,y)\in A\times A$ **(11)**y $(x,y)\in(A\times A)\circ(A\times A)$ (2.14). **(12)**O sea que también se tiene la implicación

$$(x, y)\in A\times A \Rightarrow (x, y)\in(A\times A)\circ(A\times A) \quad (II)$$

(13) De (I) y (II) se tiene la equivalencia (x, y)∈(A×A)∘(A×A) ⇔ (x, y)∈ A×A **(14)**o sea (A×A)∘(A×A) = A×A .

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que (A×A)∘(A×A) = A×A .
Sea (x, y)∈ (A×A)∘(A×A). Por 2.14 existe z tal que (x, z)∈ A×A ∧ (z, y)∈ A×A , de donde x∈A ∧ y∈ A o sea (x, y)∈ A×A y se tiene la implicación

$$(x, y)\in (A\times A)\circ(A\times A) \Rightarrow (x, y)\in A\times A \quad (I)$$

Sea ahora (x, y)∈ A×A , o sea x∈A ∧ y∈ A . Entonces
x∈A ∧ y∈ A ∧ y∈ A ∧ y∈ A y por lo tanto $(x,y)\in A\times A \wedge (y,y)\in A\times A$ y $(x,y)\in(A\times A)\circ(A\times A)$ (2.14). O sea que también se tiene la implicación

$$(x, y)\in A\times A \Rightarrow (x, y)\in(A\times A)\circ(A\times A) \quad (II)$$

De (I) y (II) se tiene la equivalencia (x, y)∈(A×A)∘(A×A) ⇔ (x, y)∈ A×A o sea (A×A)∘(A×A) = A×A .

8.(i)

ELD

Demostrar (A×B)∘(A×B) = A×B

Traducción (x, y)∈(A×B)∘(A×B) ⇔ (x, y)∈ A×B

	(1)	**$A\cap B\neq\varnothing$**	**P**
⇒	(2)	(x, y)∈ (A×B)∘(A×B)	P
	(3)	∃ z ((x, z)∈ A×B ∧ (z, y)∈ A×B	I 2, 2.14
	(4)	x∈A ∧z∈ B ∧ z∈A ∧ y∈B	I. 3, 2.6
	(5)	x∈A ∧ y∈ B	S 4
	(6)	(x, y)∈ A×B	I .5,2.6
□$_1$	(7)	(x, y)∈ (A×B)∘(A×B) ⇒ (x, y)∈ A×B	CP 2,6
⇐)	(8)	(x, y)∈ A×B	P
	(9)	x∈A ∧ y∈ B	I.8,2.6

(10)	$\exists$ z: z$\in$ A $\cap$ B	(1)
(11)	z$\in$A $\wedge$ z$\in$ B	I .10, 1.11(i)
(12)	x$\in$A $\wedge$ y$\in$ B $\wedge$ z$\in$A $\wedge$ z$\in$ B	A9,11
(13)	x$\in$A $\wedge$z$\in$ B $\wedge$ z$\in$A $\wedge$ y$\in$B	I 12, Conm. Ax.
(14)	(x, z)$\in$ A$\times$B $\wedge$ (z, y)$\in$ A$\times$B	I .13, 2.6
(15)	(x, y)$\in$ (A$\times$B)$\circ$(A$\times$B)	I..14, 2.14
□$_2$ (16)	(x, y)$\in$ A$\times$B $\Rightarrow$ (x, y)$\in$ (A$\times$B)$\circ$(A$\times$B)	CP 8,15
(17)	(x, y)$\in$(A$\times$B)$\circ$(A$\times$B) $\Leftrightarrow$ (x, y)$\in$ A$\times$B	LB 7,16
□ (18)	(A$\times$B)$\circ$(A$\times$B) = A$\times$B	I 17, 1.1

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que (A×B)∘(A×B) = A×B .
(2) Sea (x, y)∈ (A×B)∘(A×B). **(3)**Por 2.14 existe z : ((x, z)∈ A×B ∧ (z, y)∈ A×B, **(4)(5)**de donde x∈A ∧ y∈ B (2.6) **(6)**o sea (x, y)∈ A×B, **(7)**cumpliéndose la implicación

$$(x, y)\in (A\times B)\circ(A\times B) \Rightarrow (x, y)\in A\times B . \quad (I)$$

(8) Sea ahora (x, y)∈ A×B. **(9)**Entonces x∈A ∧ y∈ B. **(10) (11)(12) (13)** Como A ∩ B ≠ ∅, existe z tal que z∈ A ∩ B y se tiene x∈A ∧ z∈ B ∧ z∈A ∧ y∈B; **(14) (15)**de donde (x, z)∈ A×B ∧ (z, y)∈ A×B o sea (x, y)∈ (A×B)∘(A×B), **(16)**cumpliéndose la implicación

$$(x, y)\in A\times B \Rightarrow (x, y)\in (A\times B)\circ(A\times B) . \quad (II)$$

(17) De (I) y (II) se tiene la equivalencia (x, y)∈(A×B)∘(A×B) ⇔ (x, y)∈ A×B**(18)** o sea (A×B)∘(A×B) = A×B .

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que (A×B)∘(A×B) = A×B. Sea (x, y)∈ (A×B)∘(A×B). Por 2.14 existe z:((x, z)∈ A×B ∧ (z, y)∈ A×B, de donde x∈A ∧ y∈ B (2.6) o sea (x, y)∈ A×B, cumpliéndose la implicación

$$(x, y)\in (A\times B)\circ(A\times B) \Rightarrow (x, y)\in A\times B . \quad (I)$$

Sea ahora (x, y)∈ A×B. Entonces x∈A ∧ y∈ B. Como A ∩ B ≠ ∅, existe z tal que z∈ A ∩ B y se tiene x∈A ∧ z∈ B ∧ z∈A ∧ y∈B; de donde (x, z)∈ A×B ∧ (z, y)∈ A×B o sea (x, y)∈ (A×B)∘(A×B), cumpliéndose la implicación

$$(x, y)\in A\times B \Rightarrow (x, y)\in (A\times B)\circ(A\times B) . \qquad (\text{ II })$$

De (I) y (II) se tiene la equivalencia $(x, y)\in(A\times B)\circ(A\times B) \Leftrightarrow (x, y)\in A\times B$ o sea $(A\times B)\circ(A\times B) = A\times B$.

8 (iii)

.

ELD

Demostrar $(B\times C)\circ(A\times B) = A\times C$

Traducción $(x, y)\in(B\times C)\circ(A\times B) \Leftrightarrow (x, y)\in A\times C$

	(1)	**$B \neq \varnothing$**	**P**
$\Rightarrow$)	(2)	$(x, y)\in (B\times C)\circ(A\times B)$	P
	(3)	$\exists$ z ((x, z)$\in$ A$\times$B $\wedge$ (z, y)$\in$ B$\times$C	I .2, 2.14
	(4)	$x\in A \wedge z\in B \wedge z\in B \wedge y\in C$	I .3, 2.6
	(5)	$x\in A \wedge y\in C$	S 4
	(6)	$(x, y)\in A\times C$	I .4, 2.6
$\square_1$	(7)	$(x, y)\in (B\times C)\circ(A\times B) \Rightarrow (x, y)\in A\times C$	CP 2,6
$\Leftarrow$)	(8)	$(x, y)\in A\times C$	P
	(9)	$x\in A \wedge y\in C$	I .8, 2.6
	(10)	$\exists$ z: $z\in B$	I .1, 1.6(ii)
	(11)	$x\in A \wedge z\in B \wedge z\in B \wedge y\in C$	A 9,10
	(12)	$\exists$ z ((x, z)$\in$ A$\times$B $\wedge$ (z, y)$\in$ B$\times$C	I .11, 2.6
	(13)	$(x, y)\in (B\times C)\circ(A\times B)$	I 12, 2.14
$\square_2$	(14)	$(x, y)\in A\times C \Rightarrow (x, y)\in (B\times C)\circ(A\times C)$	CP 8,13
	(15)	$(x, y)\in(B\times C)\circ(A\times C) \Leftrightarrow (x, y)\in A\times C$	LB 7,14
$\square$	(16)	$(B\times C)\circ(A\times C) = A\times C$	I.15, 1.1

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $(B\times C)\circ(A\times B) = A\times C$ si $B \neq \varnothing$.

(2) Sea $(x, y)\in (B\times C)\circ(A\times B)$. **(3)** Entonces, según 2.14 existe un z tal que $(x, z)\in A\times B \wedge (z, y)\in B\times C$; **(4)** de donde $(x\in A \wedge z\in B) \wedge (z\in B \wedge y\in C)$, por 2.6. **(5)** En particular $x\in A \wedge x\in C$. **(6)** Por 2.6 se tiene $(x, y)\in A\times C$; **(7)** cumpliéndose, con esto, la implicación

$$(x, y)\in (B\times C)\circ(A\times B) \Rightarrow (x, y)\in A\times C \qquad (\text{ I })$$

(8) Sea ahora $(x, y)\in A\times C$. **(9)** Por 2.6 $x\in A \wedge x\in C$. **(10)** **(11)**Debido a que, por hipótesis, $B \neq \varnothing$, podemos construir la fórmula lógica $(x\in A \wedge z\in B) \wedge (z\in B$

$\wedge$ y$\in$C); **(12)**de donde (x, z)$\in$A$\times$B $\wedge$ (z, y)$\in$B$\times$C (2.6). **(13)** Según 2.14, (x, y)$\in$(B$\times$C)$\circ$(A$\times$B), **(14)**cumpliéndose la implicación

$$(x, y)\in(B\times C)\circ(A\times C) \Rightarrow (x, y)\in A\times C. \qquad (\text{ II })$$

(15) De (I) y (II) se tiene la equivalencia (x, y)$\in$(B$\times$C)$\circ$(A$\times$C) $\Leftrightarrow$ (x, y)$\in$ A$\times$C.**(16)** O sea (B$\times$C)$\circ$(A$\times$B) = A$\times$C.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar (B$\times$C)$\circ$(A$\times$B) = A$\times$C si B $\neq \varnothing$.

Sea (x, y)$\in$ (B$\times$C)$\circ$(A$\times$B). Entonces, según 2.14 existe un z tal que (x, z)$\in$ A$\times$B $\wedge$ (z, y)$\in$B$\times$C, o sea z tal que (x$\in$A $\wedge$ z$\in$ B) $\wedge$ (z$\in$B $\wedge$ y$\in$C), por 2.6.En particular x$\in$A $\wedge$ y$\in$C. Por 2.6 se tiene (x, y)$\in$A$\times$C; cumpliéndose, con esto, la implicación

$$(x, y)\in (B\times C)\circ(A\times B) \Rightarrow (x, y)\in A\times C \qquad (\text{ I })$$

Sea ahora (x, y)$\in$ A$\times$C. Por 2.6, x$\in$A $\wedge$ x$\in$C. Debido a que, por hipótesis, B $\neq \varnothing$, podemos construir la fórmula lógica (x$\in$A $\wedge$ z$\in$B) $\wedge$ (z$\in$B $\wedge$ y$\in$C); de donde (x, z)$\in$A$\times$B $\wedge$ (z, y)$\in$B$\times$C (2.6). Según la definición de compuesta (2.14), se tiene (x, y)$\in$(B$\times$C)$\circ$(A$\times$B); cumpliéndose la implicación

$$(x, y)\in(B\times C)\circ(A\times C) \Rightarrow (x, y)\in A\times C. \qquad (\text{ II })$$

De (I) y (II), se tiene (x, y)$\in$(B$\times$C)$\circ$(A$\times$C) $\Leftrightarrow$ (x, y)$\in$ A$\times$C. O sea que (B$\times$C)$\circ$(A$\times$B) = A$\times$C.

Una ilustración diagramática de la "composición"

Interrumpimos los ejercicios para presentar una manera de ilustrar la "composición". El método es algo engorroso, lo cual lo limita en su utilidad. El método usa dibujos en tres dimensiones. Vamos a ilustrar una composición S$\circ$R siendo S $\subseteq$ B$\times$C y R $\subseteq$ A$\times$B. Dibújese primero R dentro del rectángulo A$\times$B en la forma que lo hemos venido haciendo (Fig. 15) . Excepto que ahora y para simplificar el dibujo, hemos hecho coincidir a y B con los de los lados de A$\times$B . Dibújese ahora S dentro de B$\times$C , el cual es un rectángulo que sale hacia delante perpendicularmente a A$\times$B (Fig. 16) . Ahora queda fijado el plano horizontal y perpendicular a los dos anteriores en donde quedará el rectángulo A$\times$C y la relación S$\circ$R.

Proyéctese ahora R sobre B y S también sobre B. Interséctense estas dos proyecciones $\vec{p}_2\,R \cap \vec{p}_1\,S$. Por cada punto b de esta intersección se trazan 2 horizontales; una que cortará a R y otra a S . Estos cortes se proyectan sobre A y C (Obteniéndose respectivamente $\vec{p}_1\,\vec{p}_2\,b$ y $\vec{p}_2\,\vec{p}_1\,b$. Se obtienen así dos subconjuntos de A y B respectivamente. Formamos ahora el producto cartesiano de estos dos conjuntos:

$$\text{el rectángulo } \overrightarrow{p}_1\overleftarrow{p}_2\,b \times \overrightarrow{p}_2\overleftarrow{p}_1\,b$$

Hacemos lo mismo para cada $b \in \vec{p}_2\,R \cap \vec{p}_1\,S$, unimos todos estos rectángulos y obtenemos $S \circ R$:

$$S \circ R = \bigcup_{b \in I} (\overrightarrow{p}_1\overleftarrow{p}_2\,b \times \overrightarrow{p}_2\overleftarrow{p}_1\,b), \quad I = \overrightarrow{p}_2 R \cap \overrightarrow{p}_1 S$$

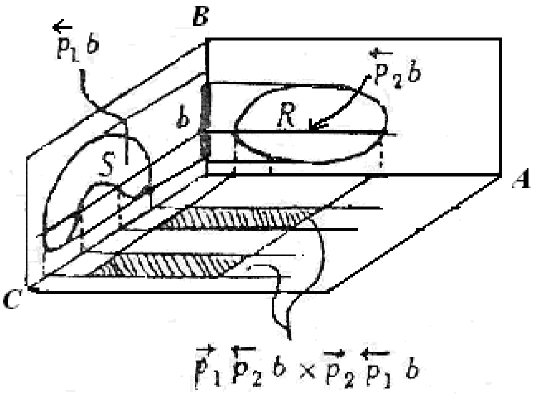


Fig. 18

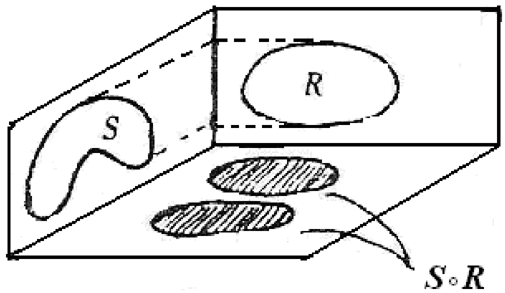


Fig. 19

Ilustremos por ejemplo el ejercicio 2.4, 6.(ii)

Como $T \cap S = \varnothing$, $(T \cap S) \circ R = \varnothing$.

Continuamos con los ejercicios.

9. (i) $(S \cap T) \circ R = (S \circ R) \cap (T \circ R)$

   (ii) $(S - T) \circ R = (S \circ R) - (T \circ R)$ (Véase Ejercicio 3.4 (7)).

$$\begin{aligned}
\text{(i)}\,(x,y)\in(S\cap T)\circ R &\Leftrightarrow (\exists z)((x,z)\in R\wedge(z,y)\in(S\cap T)) \\
&\Leftrightarrow (x,z)\in R\wedge((z,y)\in S\wedge(z,y)\in T) \quad \text{2.14,1.11(i)} \\
&\Leftrightarrow ((x,z)\in R\wedge(z,y)\in S)\wedge(z,y)\in T \quad \text{Asoc. Ax.} \\
&\Leftrightarrow ((x,z)\in R\wedge(z,y)\in S)\wedge((x,z)\in R\wedge(z,y)\in T) \\
&\Leftrightarrow (x,y)\in S\circ R\wedge(x,y)\in T\circ R \quad 2.14 \\
&\Leftrightarrow (x,y)\in(S\circ R)\cap(T\circ R) \quad \text{1.11(i)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)}\,(x,y)\in(S-T)\circ R &\Leftrightarrow (\exists z)((x,z)\in R\wedge(z,y)\in(S-T)) \quad 2.14 \\
&\Leftrightarrow (x,z)\in R\wedge((z,y)\in S\wedge(z,y)\notin T) \quad 1.16 \\
&\Leftrightarrow ((x,z)\in R\wedge(z,y)\in S)\wedge(z,y)\notin T \quad \text{Asoc. Ax.} \\
&\Leftrightarrow ((x,z)\in R\wedge(z,y)\in S)\wedge((x,z)\in R\wedge(z,y)\notin T) \\
&\Leftrightarrow (x,y)\in S\circ R\wedge(x,y)\notin T\circ R \quad 2.14 \\
&\Leftrightarrow (x,y)\in(S\circ R)-(T\circ R) \quad 1.16
\end{aligned}$$

10 (i) $\Delta_{\vec{p}_1 S}\subseteq S^{-1}\circ S$

(ii) $\Delta_{\vec{p}_2 S}\subseteq S\circ S^{-1}$

(iii) $S^{-1}\circ S\neq\Delta_{\vec{p}_1 S}$

(iv) $S\circ S^{-1}\neq\Delta_{\vec{p}_2 S}$

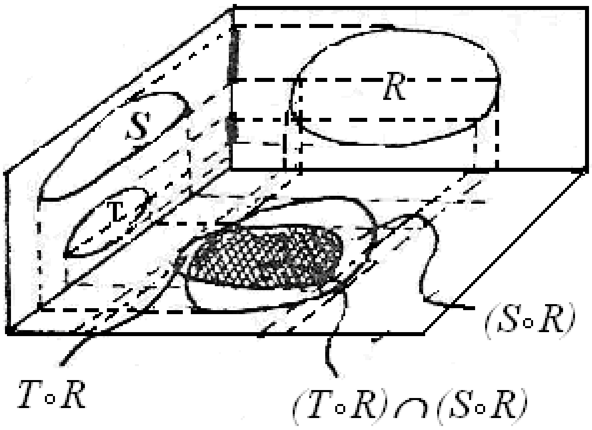


Fig. 20

(i)

ELD

Demostrar $\Delta_{\vec{p}_1 S}\subseteq S^{-1}\circ S$

Traducción $(x,x)\in\Delta_{\vec{p}_1 S}\Rightarrow(x,x)\in S^{-1}\circ S$

(1)	$(x,x)\in\Delta_{\vec{p}_1 S}$		P
(2)	$x\in\vec{p}_1 S$		I trad.1, 2.11
(3)	$(x,y)\in S$	p. a. y	I trad.2, 2.12
(4)	$(y,x)\in S^{-1}$		I trad.3, 2.13

(5) $(x, y)\in S \wedge (y, x)\in S^{-1}$ A 3,4
(6) $(x, x)\in S^{-1}\circ S$ I trad.5, 2.14
(7) $(x, x)\in \Delta_{\vec{p}_1 S} \Rightarrow (x, x)\in S^{-1}\circ S$ CP 1,6
(8) $\Delta_{\vec{p}_1 S}\subseteq S^{-1}\circ S$ I trad.7, 1.3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\Delta_{\vec{p}_1 S}\subseteq S^{-1}\circ S$

(1) Sea $(x, x)\in \Delta_{\vec{p}_1 S}$. **(2)** Entonces $x\in \vec{p}_1 S$ (2.11) **(3)** o sea $(x, y)\in S$ para algún y.
(4) Es decir $(y, x)\in S^{-1}$ **(5)** Adjuntando estos dos resultados, $(x, y)\in S \wedge (y, x)\in S^{-1}$,
(6) se tiene $(x, x)\in S^{-1}\circ S$ **(7)** **(8)** que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\Delta_{\vec{p}_1 S}\subseteq S^{-1}\circ S$
Sea $(x, x)\in \Delta_{\vec{p}_1 S}$. Entonces $x\in \vec{p}_1 S$ (2.11) o sea $(x, y)\in S$ para algún y.
Es decir $(y, x)\in S^{-1}$ Adjuntando estos dos resultados, $(x, y)\in S \wedge (y, x)\in S^{-1}$,
se tiene $(x, x)\in S^{-1}\circ S$, que era lo que queríamos demostrar.

(ii) Similar a (i).

(iii) Ejemplo. Sea S = { (1, 4) (1, 5) (2, 5) (3, 1)}

Entonces S^{-1} = { (4, 1) (5, 1) (5, 2) (1, 3)}

$S^{-1}\circ S$ ={(1, 1) (2, 2) (3, 3)} $\vec{p}_1$ S = {1, 2, 3}

$\Delta_{p_1 S}$ ={(1, 1) (2, 2) (3, 3)}. Se observa que $\Delta_{p_1 S} = S^{-1}\circ S$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Sean R = {(2, 3) (2, 5) (4, 7) (4, 9) (4, 11)}
S = {(3, 10) (3, 11) (5, 12) (7, 13) }

a) Determine SoR
b) ¿ Existe x : $(4, x)\in R \wedge (x, 13)\in S$? ¿Cuál es x?
c) ¿ Existe x : $(3, x)\in S \wedge (x, 3)\in R$? ¿Cuál es x?

d) ¿ $(2,3) \in R - S$? $\wedge$ $(3, 10) \in S - R$?

2. Dadas $R = \{(1, 10), (2, 13), (5, 9), (9, 12), (6, 7)\}$
$S = \{(10, 5), (2, 13), (9, 12), (8, 11), (2, 1)\}$
$T = \{(10, 5), (9, 12), (2, 1), (7, 14), (13, 1)\}$

Hallar

a) $T \circ (S \circ R)$ y $(T \circ S) \circ R$
b) $(S \circ R)^{-1}$ y $R^{-1} \circ S^{-1}$
c) $\vec{p_1}(S \circ R)$ y $\vec{p_1}(R)$
d) $\vec{p_2}(S \circ R)$ y $\vec{p_2}(S)$
e) $(S \cup T) \circ R$ y $(S \circ R) \cup (T \circ R)$
f) $(S \cap T) \circ R$ y $(S \circ R) \cap (T \circ R)$
g) $(S - T) \circ R$ y $(S \circ R) - (T \circ R)$

3. Compare los resultados de cada enciso en el ejercicio anterior, y utilice los signos = ó $\subseteq$ para describir la relación que hay entre ellos.

4. Escriba verdadero o falso (como corresponda) al frente de cada una de las siguientes proposiciones y justifique la respuesta.

a) $(1, 5) \notin S \circ R$
b) $(1, 5) \in T \circ R$
c) $(5, 1) \in (S \circ R)^{-1}$
d) $(10, 5) \in S \cup T$
e) $10 \in \vec{p_1}(S \cup T)$
f) $(5, 12) \in (S \circ R)$
g) $(5, 12) \in (T \circ R)$
h) $(8, 11) \in (S - T)$
i) $8 \in \vec{p_1}(S - T)$
j) $5 \in \vec{p_1}(R)$
k) $5 \in \vec{p_2}(S)]$
l) $5 \in \vec{p_2}(T)$

Ejemplo. $10 \in \vec{p}_1$ (S $\cup$ T) es cierta ya que $(10, 5) \in S \cup T$

$(5, 12) \in S \text{ o } R$ es cierta ya que $(5, 9) \in R \wedge (9, 12) \in S$

5. Desarrolle cada expresión hasta escribirla completamente en el lenguaje lógico:

- $x \in \vec{p}_1$ (S o R) $\Leftrightarrow$
- $(x, y) \in (S \cup T)$ o R $\Leftrightarrow$
- $(x, y) \in (S \cap T)$ o T $\Leftrightarrow$
- $y \in \vec{p}_2$ (S o R) $\Leftrightarrow$
- $(x, y) \in$ (S o R) $\cup$ (T o R) $\Leftrightarrow$
- $(x, y) \in$ (S o R) $-$ (T o R) $\Leftrightarrow$