CAPITULO III

F U N C I O N E S

En contraste con su importancia, el concepto de "función" es relativamente simple. Se tienen dos conjuntos (posiblemente el mismo) A y B y a cada elemento de A le asignamos un único elemento de B. A puede ser por ejemplo, el conjunto de todas las personas. A cada persona le asignamos su padre. Aquí podemos tomar B = A.

1. FUNCIONES

3.1 Definición : $(a, b, c) = ((a, b), c)$

(a, b, c) se llama **tripla** o **3-pla** y es claramente la continuación de la idea de "pareja ordenada" o "2-pla" .

3.2 Proposición : $(\text{e}, f, d) \Leftrightarrow a = e \wedge b = f \wedge c = d)$

Demostración : El sentido $\Leftarrow$) es trivial.
Veamos la implicación en el sentido $\Rightarrow$).

ELD

Demostrar $(a, b, c) = (\text{e}, f, g) \Rightarrow a = e \wedge b = f \wedge c = g)$

(1)	$(a, b, c) = (\text{e}, f, g)$	P
(2)	$(a, b, c) = ((a, b), c) \wedge (\text{e}, f, g) = ((\text{e}, f), g)$	3.1
(3)	$((a, b), c) = ((\text{e}, f), g)$	I 1,2
(4)	$(a, b) = (\text{e}, f) \wedge c = g$	(3), 2.5
(5)	$(\text{a} = \text{e} \wedge \text{b} = \text{f}) \wedge c = g$	(4), 2.5
(6)	$(a, b, c) = (\text{e}, f, d) \Rightarrow a = e \wedge b = f \wedge c = d$	CP 1,5

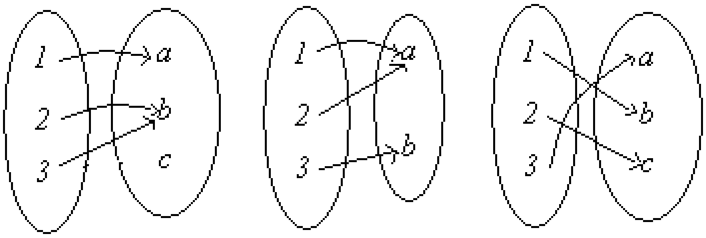
3.3 Definición : Se llama función a cada tripla (f, A, B) en donde

(i) f es una relación de A en B .
(ii) $p_1\, f = A$
(iii) $(\text{x}, \text{y}) \in f \wedge (\text{x}, \text{z}) \in f \Rightarrow \text{y} = \text{z}$.

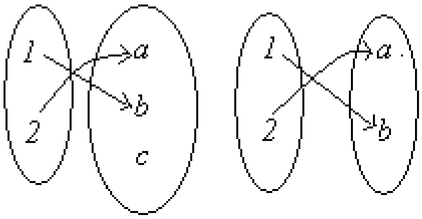
Las siguientes son funciones :

({(1, a), (2, b), (3, b)}, {1, 2, 3}, {a, b, c}) (1)
({(1, a), (2, a), (3, b)}, {1, 2, 3}, {a, b}) (2)
({(1, b), (2, c), (3, a)}, {1, 2, 3}, {a, b, c}) (3)
({(1, b), (2, a)}, {1, 2}, {a, b, c}) (4)
({(1, b), (2, a), {1, 2}, {a, b}) (5)

Las cuales las podemos apreciar mejor en los siguientes diagramas :



(1) (2) (3)



(4) (5)

De cada elemento de cada conjunto de los de la izquierda sale una flecha (condición (ii) de 3.3) pero no necesariamente a cada elemento de los conjuntos de la derecha les llega flecha y a algunos les llega más de una; en contraste con que de los elementos de la izquierda no puede salir màs de una flecha (3.3(iii)) . Obsévese también que (4) ≠ (5) , a pesar de que sus conjuntos de parejas sean iguales. La *f* no determina la función !

Nos resultará útil visualizar a las funciones con este tipo de diagrama :

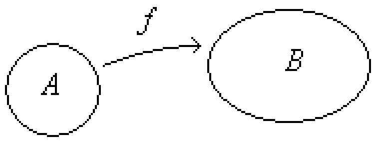


Fig. 21

Al conjunto *A* lo llamaremos **conjunto de salida** (ya lo habíamos llamado también “dominio” o **“primera proyección” de** ***f***). Al conjunto *B* lo llamaremos

conjunto de llegada, que no se debe confundir con la **"segunda proyección"**, aunque pueden resultar iguales, como en (2), (3) y (5). A la segunda proyección de una función también se le llama **recorrido** o **conjunto de valores** de la función. Usaremos indistintamente cualquiera de estos tèrminos.

Escribiremos de ahora en adelante $f : A \longrightarrow B$, en lugar de (f, A, B) por ser una notación más sugestiva. $f : A \longrightarrow B$ también representará la proposición: " f es una función de A en B ". También se escribe a veces

$$A \xrightarrow{f} B$$

La esencia del concepto de "función" está en 3.3 (iii) , que junto con (i) dice que a cada elemento x$\in A$ le asignamos un único elemento de B . Este único elemento lo llamaremos la imagen de x según f o el valor de f en x y lo notaremos fx, o $f($x$)$ como es más común y en caso de que se puedan presentar ambigüedades. Se escribe entonces f : x $\longrightarrow$ $f($x$)$ y se dice que f "envía" o "transforma" a x en $f($x$)$. A las funciones también se les llama a veces **transformaciones** o **aplicaciones.**

Una relación f que cumpla la condición 3.3 (iii) se llama **relación funcional.** Se tiene entonces que

$$f : A \longrightarrow B$$

es una función si f es una relación funcional de A en B tal que

$$\vec{p}_1\ f = A\ .$$

En la práctica aceptaremos el abuso de lenguaje de hablar de "la function".

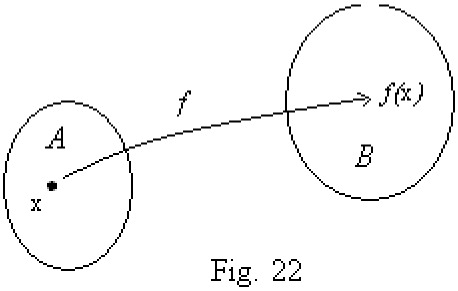


Fig. 22

Una equivalencia importante :

f(x) = y $\leftrightarrow$ (x, y)$\in f$

¿Cómo son las gráficas, del tipo introducido en la figura 11, para las relaciones funcionales? Resultan ser curvas, no necesariamente continuas, con la característica, debida a 3.3 (iii) y (i) de que cada vertical cruza a la curva en uno y en un solo punto.

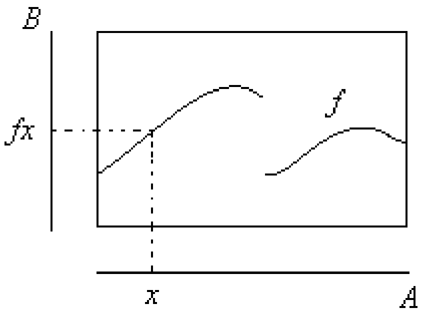
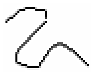


Fig. 23

Una gráfica de una función no será nunca algo así : 

Considere la función $f : R \mapsto R$, $f = \{(x, y) \in R^2 \ / \ y = x^2\}$. Su gráfica es una parábola .

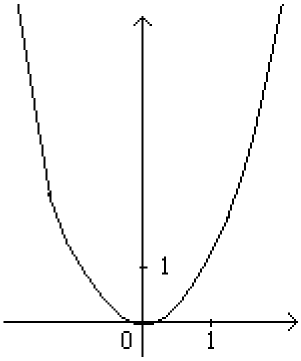


Fig. 24

$f(1) = (-1) = 1$, $f(3) = f(-3) = 9$, . . . , etc.

Varios abusos de lenguaje son aceptados en la práctica. Hablaremos por ejemplo de " la función f " , siendo que la función es la tripla

$$(f, A, B).$$

Aun más hablaremos màs simplemente de 'la función $y=x^2$' aunque $y = x^2$ es una ecuación que define (en parte) una función.

Téngase presente que no toda función está definida por una ecuación. Por ejemplo, los 5 ejemplos al principio de esta sección.Tampoco a cada función se le puede hacer una gráfica del tipo de la figura 23. Algunas funciones se pueden y conviene visualizar como transformaciones.

La función f: $R^2 \mapsto R^2$, $f(x, y) = (|x|, |y|)$ actúa como si a R^2, un plano infinito, lo plegáramos por los ejes 2 veces.

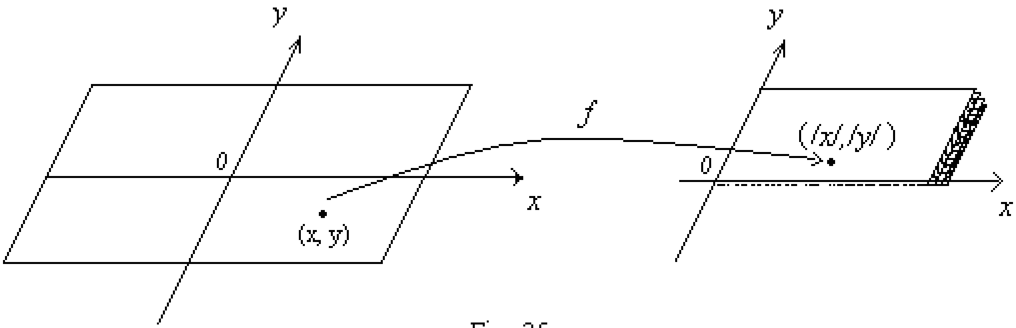


Fig. 25

La siguiente proposición nos da el criterio para demostrar que dos funciones, con iguales conjuntos de salida y de llegada son iguales.

3. 4 Proposición : $f : A \mapsto B = g : A \mapsto B \Leftrightarrow x \in A\ (f(x) = g(x))$

Demostración :

ELD

Demostrar $\boldsymbol{f : A \mapsto B = g : A \mapsto B \Leftrightarrow x \in A\ (f(x) = g(x))}$

$\Rightarrow$)**(1)**	$f : A \mapsto B = g : A \mapsto B$	**P**
(2)	$f(x) = g(x), \quad \forall\, x \in A$	trad. 1

□ (3) $f : A \mapsto B = g : A \mapsto B \Rightarrow f(x) = g(x),\ \forall\ x \in A$ CP1,2

$\Leftarrow$)(4) $f(x) = g(x),\ \forall\ x \in A$ P

(5) $B = \{ f(x) / x \in A \} = \{ g(x) / x \in A \}$ P, (4)

(6) $f : A \mapsto B = g : A \mapsto B$ (4), (5)

□$_2$ (7) $f(x) = g(x),\ \forall\ x \in A \Rightarrow f : A \mapsto B = g : A \mapsto B$ CP 4,6

□ (8) $f : A \mapsto B = g : A \mapsto B \Leftrightarrow x \in A\ (f(x) = g(x))$ LB 3,7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Sean f y g funciones de A en B tales que $f : A \mapsto B = g : A \mapsto B$. **(2)**Es evidente que $f(x) = g(x),\ \forall\ x \in A$. **(3)** Por lo tanto, se cumple la implicación

$$f : A \mapsto B = g : A \mapsto B \Rightarrow (\forall\ x \in A)(f(x) = g(x)) . \quad (I)$$

(4) Supongamos ahora que $f(x) = g(x)$, para cada $x \in A$. Sea $B = \{ f(x) / x \in A \}$.
(5) Entonces, por hipótesis, se tiene $B = \{ f(x) / x \in A \} = \{ g(x) / x \in A \}$.
(6) De donde se ve que $f : A \mapsto B = g : A \mapsto B$. **(7)**Por lo tanto, se cumple la implicación

$$(\forall\ x \in A)\ (f(x) = g(x)) \Rightarrow f : A \mapsto B = g : A \mapsto B . \quad (II)$$

(8) De (I) y (II), por la ley bicondicional, obtenemos la equivalencia

$$f : A \mapsto B = g : A \mapsto B \Leftrightarrow x \in A\ (f(x) = g(x)) \quad □$$

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sean f y g funciones de A en B tales que $f : A \mapsto B = g : A \mapsto B$. Es evidente que $f(x) = g(x)$, $\forall\ x \in A$. Por lo tanto, se cumple la implicación

$$f : A \mapsto B = g : A \mapsto B \Rightarrow (\forall\ x \in A)(f(x) = g(x)) . \quad (I)$$

Supongamos ahora que $f(x) = g(x)$, para cada $x \in A$. Sea $B = \{ f(x) / x \in A \}$.
Entonces,por nuestra hipótesis, se tiene que $B = \{ f(x) / x \in A \} = \{ g(x) / x \in A \}$.
De donde se ve *que* $f : A \mapsto B = g : A \mapsto B$. Por lo tanto, también se cumple la implicación

$$(\forall\ x \in A)\ (f(x) = g(x)) \Rightarrow f : A \mapsto B = g : A \mapsto B . \quad (II)$$

De (I) y (II), por la ley bicondicional, obtenemos la equivalencia

$$f : A \mapsto B = g : A \mapsto B \Leftrightarrow x \in A\ (f(x) = g(x)) \quad □$$

Algunas funciones famosas

A continuación daremos algunos ejemplos de funciones.

La función idéntica

3. 5 Proposición : La Δ_A es una función de A en A.

Demostración : Hay que ver que se cumplen tres condiciones:

(i) $\Delta_A = \{(x, x) / x \in A\}$. Claramente $\Delta_A \subseteq A \times A$; es decir que la diagonal Δ_A es una relación en A .
(ii) $\vec{p}_1 \Delta_A = \{ x / x \in A\} = A$. También es claro.
(iii) $(x, y) \in \Delta_A \wedge (x, z) \in \Delta_A \Rightarrow y = z$

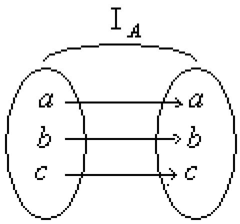
ELD

Demostrar $(x, y) \in \Delta_A \wedge (x, z) \in \Delta_A \Rightarrow y = z$

(1)	$(x, y) \in \Delta_A \wedge (x, z) \in \Delta_A$	**P**
(2)	$x = y \wedge x = z$	trad.1 Def. de Δ_A
(3)	$x = y = z$	2
(4)	$y = z$	S 3
(5)	$(x, y) \in \Delta_A \wedge (x, z) \in \Delta_A \Rightarrow y = z$	CP 1,4

A la función Δ_A también la llamaremos función de identidad de A y la notaremos I_A . Es la función que deja a todo conjunto intacto.

$$\begin{aligned} I_A : A &\longrightarrow A \\ x &\longrightarrow x \end{aligned}$$



La función constante

3. 6 Proposición : Sea $b \in B$. Si para cada $x \in A$, $f(x) = b$, $f : A \mapsto B$ es una función.

Hay que verificar las tres condiciones de la definición de función.

(i) f es una relación.

Sea $f = \{(x, b) / x\in A \wedge b\in B\}$. Claramente $f \subseteq A\times B$. Esto quiere decir que f es una relación de A en B.

(ii) Claramente $\overrightarrow{p_1} f = A$.

(iii) $(x, y)\in f \wedge (x, z)\in f \Rightarrow y = z$

Demostraciòn:

ELD

Demostrar $(x, y)\in f \wedge (x, z)\in f \Rightarrow y = z$

(1) $f(x) = b,\ \forall x$		**P**
(2)	$(x, y)\in f \wedge (x, z)\in f$	P
(3)	$f(x) = y \wedge f(x) = z$	traducción 2
(4)	$y = b \wedge b = z$	(1)
(5)	$y = z$	I 3, ley transit. de =
(6) $(x, y)\in f \wedge (x, z)\in f \Rightarrow y = z$		CP 2,5
(7) f es relación funcional		traducción 6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar la implicaciòn $(x, y)\in f \wedge (x, z)\in f \Rightarrow y = z$, es decir que f tal que $f(x) = b\ \forall x$, es relación funcional .

(2) Sea $(x, y)\in f$ y $(x, z)\in f$. **(3)** Entonces $f(x) = y$ y $f(x) = z$. **(4)**Como $f(x) = b$ $\forall x$, entonces $y = b$ y $b = z$ **(5)** de donde y = z . **(6)**Por lo tanto se cumple la implicación $(x, y)\in f \wedge (x, z)\in f \Rightarrow y = z$, **(7)**o sea que f es relación funcional .

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar la implicaciòn $(x, y)\in f \wedge (x, z)\in f \Rightarrow y = z$, es decir que f tal que $f(x) = b\ \forall x$, es relación funcional .
Sea $(x, y)\in f$ y $(x, z)\in f$. Entonces $f(x) = y$ y $f(x) = z$. Como $f(x) = b\ \forall x$, entonces $y = b$ y $b = z$ de donde y = z . Por lo tanto se cumple la implicación

$$(x, y)\in f \wedge (x, z)\in f \Rightarrow y = z ,$$

O sea que f es relación funcional .

A las funciones del tipo del Teorema 3. 6 las llamaremos constantes y sus gráficas son de la siguiente forma :

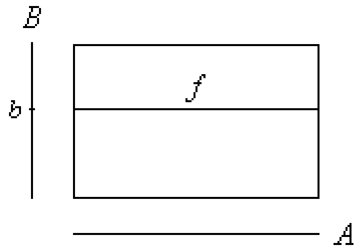


Fig. 26

La función característica

3.7 Definición : $0 = \varnothing$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$.
3. 8 Definición : Sea $B \subseteq A$, $C_B(x) = 1$ si $x \in B$ y $C_B(x) = 0$ si $x \notin B$
3. 9 Proposición : $C_B : A \mapsto 2$ es una función.

Demostración : Debemos ver que C_B cumple las tres condiciones de la definición de función :

(i) que C_B es una relación de A en 2.

$$C_B = \{(x, 1) / x \in A\} \cup \{(x, 0) / x \in A\}$$
$$= \{(x, 1), (x, 0) / x \in A\}$$

Claramente $C_B \subseteq A \times \{0, 1\}$. O sea que $C_B \subseteq A \times 2$; lo que quiere decir que C_B es una relación de A en 2 .

(ii) También es claro que $\vec{p}_1 C_B = A$.
(iii) $(x, y) \in C_B \wedge (x, z) \in C_B \Rightarrow y = z$

ELD
Demostrar $(x, y) \in C_B \wedge (x, z) \in C_B \Rightarrow y = z$

(1)	$C_B(x) = 1$ si $x \in B$ y $C_B(x) = 0$ si $x \notin B$	**3.8**
(2)	$(x, y) \in C_B \wedge (x, z) \in C_B$	P
(3)	$C_B(x) = y \wedge C_B(x) = z$	traducción 2
(4)	$C_B(x) = 0 \vee C_B(x) = 1$	1
(5)	$C_B(x) = 0$	P
(6)	$y = 0 \wedge z = 0$	I 5,3
(7)	$y = z$	6
(8)	$C_B(x) = 0 \Rightarrow y = z$	CP 5,7
(9)	$C_B(x) = 1$	P

(10)	$y = 1 \wedge z = 1$	I 3, 9
(11)	$y = z$	10
(12)	$C_B(\mathrm{x}) = 1 \Rightarrow y = z$	CP 8,11
(13)	$y = z \vee y = z$	Ds 4,8,12
(14)	$y = z$	Dp 13
□ (15)	$(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in C_B \wedge (\mathrm{x}, \mathrm{z}) \in C_B \Rightarrow y = z$	CP 2,14

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar la implicación $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in C_B \wedge (\mathrm{x}, \mathrm{z}) \in C_B \Rightarrow y = z$, es decir que C_B es una relación funcional.
(2) Supongamos que $(x, y) \in C_B$ y $(x, z) \in C_B$ **(3)**o sea $C_B(x) = y$ y $C_B(x) = z$. **(4)** Por 3.8, $C_B(x) = 0$ o $C_B(x) = 1$. **(5)** **(6)**Si $C_B(x) = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ **(7)**y por lo tanto $y = z$. **(8)** **(9)**Si $C_B(x) = 1$, $y = 1$ y $z = 1$ **(10)**esto es $y = z$. **(11)(12)(13)(14)**Entonces vemos que sea que $C_B(x) = 0$ o $C_B(x) = 1$, el resultado es el mismo, a saber, $y = z$.**(15)**Luego $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in C_B \wedge (\mathrm{x}, \mathrm{z}) \in C_B \Rightarrow y = z$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in C_B \wedge (\mathrm{x}, \mathrm{z}) \in C_B \Rightarrow y = z$ es decir que C_B es una relación funcional.

Supongamos que

$$(x, y) \in C_B \quad \text{y} \quad (x, z) \in C_B$$

o sea

$$C_B(x) = y \quad \text{y} \quad C_B(x) = \mathrm{z} .$$

Por 3.8,

$$C_B(x) = 0 \quad \text{o} \quad C_B(x) = 1.$$

Si $C_B(x) = 0$, entonces $y = 0$ y $z = 0$ y por lo tanto $y = z$.

Si $C_B(x) = 1$, entonces $y = 1$ y $z = 1$, y por lo tanto $y = z$.

Entonces vemos que sea que $C_B(x) = 0$ o $C_B(x) = 1$ el resultado es el mismo, a saber, y = z . Luego $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in C_B \wedge (\mathrm{x}, \mathrm{z}) \in C_B \Rightarrow y = z$.

La función a la que se refiere el teorema anterior se llama la **función característica de *B* en *A*.**

La restricción de una función

3.10 Definición : Sea $f : A \mapsto B$ y $C \subseteq A$. Para cada $x \in C$, $f|_C(x) = f(x)$

3.11 Proposición : Si $f : A \mapsto B$ y $C \subseteq A$ entonces $f|_C : C \mapsto B$ es una función.

Demostración : Debemos ver que $f|_C$ cumple las tres condiciones de la definición de función:

(i) $f|_C \subseteq C \times B$, *es decir*, $f|_C$ es una relación de C en B

ELD

Demostrar $f|_C \subseteq C \times B$

Traducción $(x, y) \in f|_C \Rightarrow (x, y) \in C \times B$

(1)	$\boldsymbol{f : A \mapsto B \wedge C \subseteq A}$	**P**
(2)	$(x, y) \in f|_C$	P
(3)	$f(x) = y \wedge x \in C$	traducción 2
(4)	$y \in B$	(1),(3)
(5)	$x \in C$	S 3
(6)	$x \in C \wedge y \in B$	A 5,4
(7)	$(x, y) \in C \times B$	traducción 6
(8)	$(x, y) \in f|_C \Rightarrow (x, y) \in C \times B$	CP 2,7
(9)	$f|_C \subseteq C \times B$	traducción 8
(10)	$f|_C$ es una relación de C *en* B	traducción 9

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $f|_C$ es una relación de C en B o sea que $f|_C \subseteq C \times B$.
(2) Sea $(x, y) \in f|_C$.**(3)** Entonces $f(x) = y$ con $x \in C$ (3.10). **(4)**Como $C \subseteq A$ y f es una función de A en B , $y \in B$ **(5) (6)**y entonces tenemos $x \in C \wedge y \in B$, **(7)** o sea que $(x, y) \in C \times B$ **(8) (9)**y por lo tanto $f|_C \subseteq C \times B$, **(10)** es decir que $f|_C$ es una relación de C en B, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $f|_C$ es una relación de C en B o sea que $f|_C \subseteq C \times B$.

Sea

$$(x, y)\in f\,|_C\,.$$

Entonces

$$f(x) = y \;\text{ con }\; x\in C \qquad (3.10).$$

Como $C \subseteq A$ y f es una función de A en B , entonces $y\in B$ y $x\in C \wedge y\in B$,
o sea

$$(x, y)\in C\times B\,.$$

Por lo tanto

$$f\,|_C \subseteq C\times B;$$

es decir que $f\,|_C$ es una relación de C en B, que era lo que queríamos demostrar.

(ii) $\vec{p}_1\, f\,|_C = C$, se realiza por definición de $f\,|_C$.

(iii) $(x, y)\in f\,|_C \wedge (x, z)\in f\,|_C \Rightarrow y = z$ ($f\,|_C$ es una relación funcional)

ELD

Demostrar $(x, y)\in f\,|_C \wedge (x, z)\in f\,|_C \Rightarrow y = z$

(1)	$f : A \mapsto B$ y $C \subseteq A$	**P**
(2)	$f\,\vert_C(x) = f(x)\,,\ \forall x\in C$	3.10
(3)	$(x, y)\in f\,\vert_C \wedge (x, z)\in f\vert_C$	P
(4)	$(x, y)\in f \wedge (x, z)\in f$	I 3,2
(5)	$(x, y)\in f \wedge (x, z)\in f \Rightarrow y = z$	(1)
(6)	$y = z$	PP 4,5
(7)	$(x, y)\in f\,\vert_C \wedge (x, z)\in f\,\vert_C \Rightarrow y = z$	CP 3,6
□ (8)	$f\,\vert_C$ es una relación funcional	traducción 7

La función que se refiere al teorema anterior se llama la restricción de f a C y se puede ilustrar de la siguiente manera :

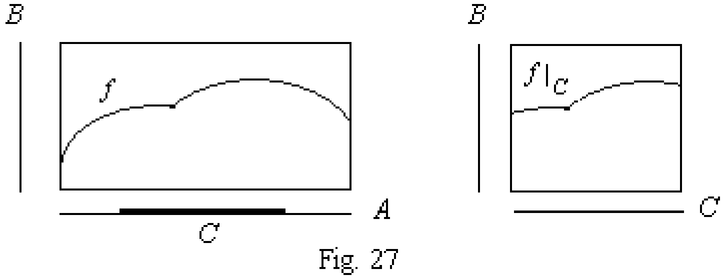


Fig. 27

La extensión de una función

3.12 Definición : Sea $f : A \mapsto B$ y $C \subseteq A$, cualquier función $g : C \mapsto B$ tal que $g|_C = f$

se llama una **extensión de f a C**.

La idea de extensión de una función se puede ilustrar de la siguiente manera :

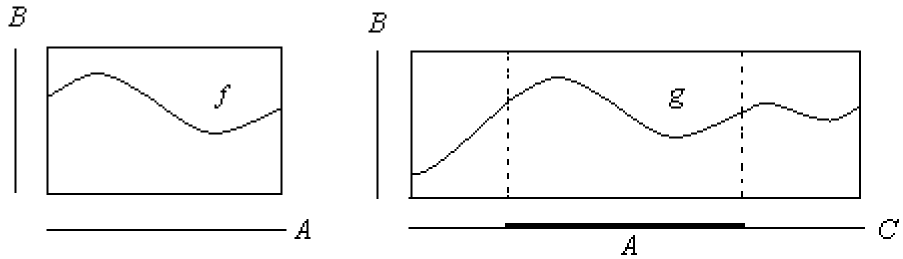


Fig. 28

Es claro que (en contraste con la situación para restricciones) dados $f : A \mapsto B$ y $C \subseteq A$ puede haber muchas extensiones de f a C.

EJERCICIO 3.1

1. 3.2
2. $(a, a, a) = ?$
3. $(a, b, c) = (a, (b, c))$?
4. $f : A \mapsto B \wedge C \subseteq A \Rightarrow f : A \mapsto C$
5. Diga por qué cada una de las siguientes triplas no son funciones :

   (i) $(\{(1, a), (2, b), (3, b)\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{a, b, c\})$
   (ii) $(\{(1, a), (2, b), (3, b)\}, \{1, 2, 3\}, \{a, c\})$
   (iii) $(\{(1, a), (2, b), (2, c)\}, \{1, 2\}, \{a, b, c\})$

Obsérvese que las relaciones de (i) y (ii) son funcionales.

6. Modifique los conjuntos de salida o los de llegada en (i) y (ii) del ejercicio anterior para que el resultado sí sea función.
7. 3.4
8. $f : A \cup B \mapsto C \Rightarrow f = f|_A \cup f|_B$
9.(i) $f : A \to C \wedge g : B \to C \wedge f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B} \wedge h = f \cup g$

$\Rightarrow h : A \cup B \mapsto C \ \wedge \ h|_A = f \ \wedge \ h|_B = g$

(ii) $f : A \mapsto C \ \wedge \ g : B \mapsto C \ \wedge A \cap B = \varnothing \ \wedge \ h = f \cup g$

$\Rightarrow h : A \cup B \mapsto C \ \wedge \ h|_A = f \ \wedge \ h|_B = g$

10. $\varnothing : \varnothing \mapsto B$ (que la podemos llamar función vacía. La función vacía es la función $\varnothing : \varnothing \mapsto \varnothing$)

11. Sea $f : A \mapsto C \ \wedge \ g : B \mapsto C \ \wedge f \subseteq g \Rightarrow f = g$

12. (a) ¿Cuántas funciones existen de un conjunto con n elementos en uno con m elementos (n, m naturales) ?

(b) ¿Cuántas funciones características existen a partir de un conjunto con n elementos?

ACTIVIDAD PRÁCTICA – PROCESO IMITATIVO

2. $(a, a, a) = ?$

$(a, a, a) = ((a, a), a)$ 3.1

$= \{\{(a, a)\}, \{(a, a), a\}\}$ 2.4

$= \{ \{\{\{a\}, \{a, a\}\}\}, \{\{\{ a \}, \{a, a\}\}, a \} \}$ 2.4

$= \{ \{\{\{a\}, \{a\}\}\}, \{\{\{a\}, \{a\}\}, a \} \}$

$= \{ \{\{\{a\}\}\}, \{\{\{a\}\}, a\}\}$

3. $(a, b, c) = (a, (b, c))$?

$(a, (b, c)) = \{\{a\}, \{a, (b, c)\}\}$ 2.4

$= \{\{a\}, \{a, \{\{b\}, \{b, c\}\}\}$ 2.4

$(a, b, c) = ((a, b), c))$ 3.1

$= \{\{(a, b)\}, \{(a, b), c\}\}$ 2.4

$= \{\{\{a\}, \{a, b\}\},\{\{\{a\}, \{a, b\}\}, c\}\}$ 2.4

Se ve que $(a, (b, c)) \neq ((a, b), c))$. Por lo tanto $(a, b, c) \neq (a, (b, c))$.

4. $f : A \mapsto B \ \wedge \ B \subseteq C \Rightarrow f : A \mapsto C$

ELD

Demostrar $f : A \mapsto C$

Traducción (i) $f \subseteq A \times C$ (ii) $\vec{p}_1 f = A$ (iii) f es funcional

(1)	$f : A \mapsto B$	**P**
(2)	$B \subseteq C$	**P**
(3)	$f \subseteq A \times B$	1
(4)	$A \times B \subseteq A \times C$	I 2, Ejercicio 2.2 (5)

□$_i$ (5) $f \subseteq A \times C$ 3,4

□$_{ii}$ (6) $\vec{p}_1 f = A$ 1

□$_{iii}$ (7) f es relación funcional 1

□ (8) $f : A \mapsto C$ 5,6,7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(3) (4)*Por hipótesis,* $f \subseteq A \times B$ *y* $B \subseteq C$ *; de donde* $f \subseteq A \times$ C . Esto quiere decir que f es una relación de A en C.

(5) Debido a que f es una función de A en B, entonces $\vec{p}_1 f = A$. **(7)**Por la misma razón, f es una relación funcional . **(8)**Por lo tanto, f es una función de A en C.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Por hipótesis, $f \subseteq A \times B$ *y* $B \subseteq C$ *;* de donde $f \subseteq A \times$ C . Esto quiere decir que f es una relación de A en C.

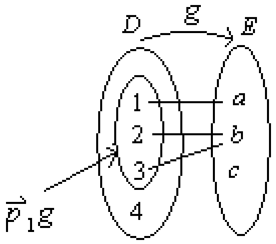
Debido a que f es una función de A en B, entonces $\vec{p}_1 f = A$. Por la misma razón, f es una relación funcional . Por lo tanto, f es una función de A en C.

5. Diga por qué cada una de las siguientes triplas no son funciones :

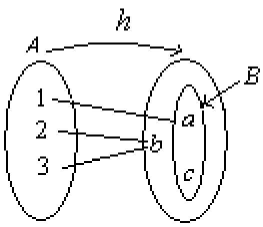
(i) $(\{(1, a), (2, b), (3, b)\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{a, b, c\})$

(ii) $(\{(1, a), (2, b), (3, b)\}, \{1, 2, 3\}, \{a, c\})$

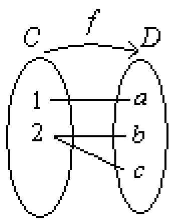
(iii) $(\{(1, a), (2, b), (2, c)\}, \{1, 2\}, \{a, b, c\})$



(i)



(ii)



(iii)

Para (i):

Veamos en qué falla la tripla (g, D, E) para que no sea función, donde

$g = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$, $D = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{a, b, c\}$.

$\vec{p_1}\, g = \{1, 2, 3\} \neq D$. O sea que falla en la segunda condición de la definición de función.

Para (ii) :
¿En qué falla la tripla (h, D, E) para que no sea función, donde

$h = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, c\}$?

$h \not\subset A \times B$ ya que, por ejemplo, $(1, a) \in$ h y $(2, b) \notin A \times B$. Esto significa que h no es una relación de A en B; es decir que falla en la primera condición de la definición de función.

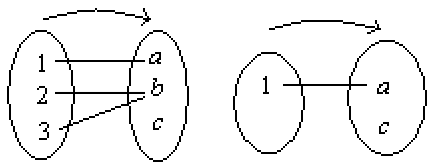
Para (iii)

Sea $f = \{(1, a), (2, b), (2, c)\}$ $C = \{1, 2\}$, $D = \{a, b, c\}$

Observemos que $(2, b) \in f$ y $(2, c) \in f$ pero $b \neq c$; lo que quiere decir que f no es relación funcional y por lo tanto no es función.

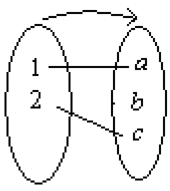
6. Modifique los conjuntos de salida o los de llegada en (i) y (ii) del ejercicio anterior para que el resultado sí sea función.

En (i) eliminamos el 4 y en (ii) eliminamos el 2 y el 3, los diagramas nos quedan



Se ve claramente que estas dos relaciones son funciones.

En (iii), eliminando la pareja ordenada (2, b) de f, el diagrama nos queda :



que claramente es una función.

8. $f : A\cup B \mapsto C \;\;\Rightarrow\;\; f = f\,|_A \cup f\,|_B$

ELD

Demostrar $\boldsymbol{f = f\,|_A \cup f\,|_B}$

Traducción $(x, y)\in f \Leftrightarrow (x, y)\in f\,|_A \cup f\,|_B$

(1)	$\boldsymbol{f : A\cup B \mapsto C}$	**P**
⇒) (2)	$(x, y)\in f$	P
(3)	$f(x) = y \wedge x\in A\cup B$	1,2
(4)	$f(x) = y \wedge (x\in A\vee x\in B)$	traducción 3
(5)	$(f(x) = y \wedge x\in A)\vee (f(x) = y \wedge x\in B)$	ley dist. (4)
(6)	$(x, y)\in f\,|_A \vee (x, y)\in f\,|_B$	5
(7)	$(x, y)\in f\,|_A \cup f\,|_B$	traducción 6
□$_1$ (8)	$(x, y)\in f \Rightarrow (x, y)\in f\,|_A \cup f\,|_B$	CP 2,7
⇐) (9)	$(x, y)\in f\,|_A \cup f\,|_B$	P
(10)	$(x, y)\in f\,|_A \vee (x, y)\in f\,|_B$	traducción 9
(11)	$(f(x) = y \wedge x\in A) \vee (f(x) = y \wedge x\in B)$	I 10, 3.10
(12)	$(f(x) = y \wedge x\in A\cup B) \vee (f(x) = y \wedge x\in A\cup B)$	11, 1.13(ii)
(13)	$f(x) = y \wedge x\in A\cup B$	Dp 12
(14)	$(x, y)\in f$	13,1
□$_2$ (15)	$(x, y)\in f|_A \cup f|_B \Rightarrow (x, y)\in f$	CP 9,14
(16)	$(x, y)\in f \Leftrightarrow (x, y)\in f\,|_A \cup f\,|_B$	LB 8,15
(17)	$f(x) = (f\,|_A \cup f\,|_B)(x)$	traducción 16
□ (18)	$f = f\,|_A \cup f\,|_B$	I 17, 3.4

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $f = f\,|_A \cup f\,|_B$.**(2)**Sea $(x, y)\in f$**. (3)** Como f es una función de $A\cup B$ en C, $f(x) = y \wedge x\in A\cup B$; **(4)**de donde resulta la conjunción $f(x) = y \wedge (x\in A\vee x\in B)$ **(5)**que es equivalente a la disyunción $(f(x) = y \wedge x\in A)\vee (f(x) = y \wedge x\in B)$; **(6)**o sea $(x, y)\in f\,|_A \vee (x, y)\in f\,|_B$ **(7)**de donde $(x, y)\in f\,|_A \cup f\,|_B$.
(8) Por lo tanto

$$(x, y)\in f \Rightarrow (x, y)\in f\,|_A \cup f\,|_B . \quad (\mathrm{I})$$

(9) Sea ahora $(x, y)\in f\,|_A \cup f\,|_B$ **(10)** o sea $(x, y)\in f\,|_A \vee (x, y)\in f\,|_B$.**(11)** Entonces $(f(x) = y \wedge x\in A) \vee (f(x) = y \wedge x\in B)$ (3.10)
(12) y por lo tanto $(f(x) = y \wedge x\in A\cup B) \vee (f(x) = y \wedge x\in A\cup B)$, **(13)** de donde $f(x) = y \wedge x\in A\cup B$.**(14)** Como f es una función de $A \cup B$ en C, entonces $(x, y)\in f$.
(15) Así que

$$(x, y) \in f|_A \cup f|_B \Rightarrow (x, y) \in f \ . \qquad (\text{ II })$$

(16) De (I) y (II) se tiene la equivalencia $(x, y) \in f \Leftrightarrow (x, y) \in f|_A \cup f|_B$; **(17)**
(18)o es decir $f = f|_A \cup f|_B$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $f = f|_A \cup f|_B$. Sea $(x, y) \in f$**.** Como f es una función de $A \cup B$ en C, entonces $f(x) = y \wedge x \in A \cup B$, es decir $f(x) = y \wedge (x \in A \vee x \in B)$, que es equivalente a la disyunción $(f(x) = y \wedge x \in A) \vee (f(x) = y \wedge x \in B)$; por lo que $(x, y) \in f|_A \vee (x, y) \in f|_B$, de donde $(x, y) \in f|_A \cup f|_B$. Así que se cumple la implicación

$$(x, y) \in f \Rightarrow (x, y) \in f|_A \cup f|_B . \quad (\text{ I })$$

Sea ahora $(x, y) \in f|_A \cup f|_B$ o sea $(x, y) \in f|_A \vee (x, y) \in f|_B$. Por (3.10), esto equivale a la disjunción $(f(x) = y \wedge x \in A) \vee (f(x) = y \wedge x \in B)$, que a su vez es $(f(x) = y \wedge x \in A \cup B) \vee (f(x) = y \wedge x \in A \cup B)$, de donde $f(x) = y \wedge x \in A \cup B$. Como f es una función de $A \cup B$ en C, $(x, y) \in f$. Así que

$$(x, y) \in f|_A \cup f|_B \Rightarrow (x, y) \in f \ . \qquad (\text{ II })$$

De (I) y (II) se tiene $(x, y) \in f \Leftrightarrow (x, y) \in f|_A \cup f|_B$ o sea $f = f|_A \cup f|_B$.

9.(i) $f : A \rightarrow C \wedge g : B \rightarrow C \wedge f\big|_{A \cap B} = g\big|_{A \cap B} \ \wedge h = f \cup g$

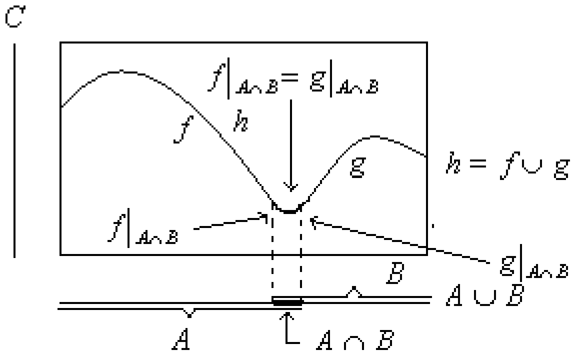
$\qquad \Rightarrow h : A \cup B \mapsto C \ \wedge \ h|_A = f \ \wedge \ h|_B = g$

1. Interpretación : Lo que la proposición quiere decir es que el razonamiento :

(1)	$f : A \rightarrow C$	P
(2)	$g : B \rightarrow C$	P
(3)	$f\big|_{A \cap B} = g\big|_{A \cap B}$	P
(4)	$h = f \cup g$	P
$\triangleright$	$h : A \cup B \mapsto C \ \wedge \ h|_A = f \ \wedge \ h|_B = g$	Conclusión

es válido.

Gráficamente :



ELD

Demostrar $h : A \cup B \mapsto C \;\wedge\; h|_A = f \;\wedge\; h|_B = g$

(1)	$f : A \to C$	P
(2)	$g : B \to C$	P
(3)	$f\|_{A\cap B} = g\|_{A\cap B}$	P
(4)	$h = f \cup g$	P

ELD1

Demostrar $h : A \cup B \mapsto C$

Traducción : (i) $h \subseteq (A \cup B) \times C$

(ii) $p_1 h = A \cup B$

(iii) (x, y)$\in h$ $\wedge$ (x, z)$\in h$ $\Rightarrow$ y = z

ELD (i)

Demostrar $h \subseteq (A \cup B) \times C$

Traducción : (x, y)$\in h$ $\Rightarrow$ (x, y)$\in (A \cup B) \times C$

(1)	$f : A \to C$	P
(2)	$g : B \to C$	P
(3)	$f\|_{A\cap B} = g\|_{A\cap B}$	P
(4)	$h = f \cup g$	P
(5)	(x, y)$\in h$	P
(6)	(x, y)$\in f \cup g$	I 4,5
(7)	(x, y)$\in f$ $\vee$ (x, y)$\in g$	I. 6, 1.11(ii)
(8)	(f(x) = y $\wedge$ x$\in$A) $\vee$ (g(x) = y $\wedge$ x$\in$B)	I. 7, (1), (2)
(9)	(x$\in$A $\wedge$ y$\in$C) $\vee$ (x$\in$B $\wedge$y$\in$C)	(8), (1), (2)
(10)	(x$\in$A$\vee$ x$\in$B) $\wedge$ y$\in$C	I 9, ley dist.

(11)	$x \in A \cup B \wedge y \in C$	I 9, 1.11(ii)
(12)	$(x, y) \in (A \cup B) \times C$	I trad.10, 2.6
(13)	$(x, y) \in h \Rightarrow (x, y) \in A \cup B) \times C$	CP 5,12
(14)	$h \subseteq (A \cup B) \times C$	I trad.13, 1.3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $h \subseteq (A \cup B) \times C$, es decir que h es una relación de $A \cup B$ en C. **(5)**Sea $(x, y) \in h$. **(6)** **(7)**Como $h = f \cup g$, $(x, y) \in f \cup g$ y $(x, y) \in f \vee (x, y) \in g$. **(8)**Como f es una función de A en C y g una función de B en C, entonces $(f(x) = y \wedge x \in A) \vee (g(x) = y \wedge x \in B)$ **(9)** y por lo tanto $(x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C)$ **(10)**o sea $(x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C$ **(11)** es decir que $x \in A \cup B \wedge y \in C$ **(12)** y $(x, y) \in (A \cup B) \times C$; **(13)** **(14)**Ldemostrándose que $h \subseteq (A \cup B) \times C$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $h \subseteq (A \cup B) \times C$ es decir que h es una relación de $A \cup B$ en C.

Sea $(x, y) \in h$.

Como

$$h = f \cup g,$$

entonces

$$(x, y) \in f \cup g$$

Es decir

$$(x, y) \in f \vee (x, y) \in g.$$

Como f es una función de A en C y g una función de B en C, entoces

$$(f(x) = y \wedge x \in A) \vee (g(x) = y \wedge x \in B)$$

y por lo tanto

$$(x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C)$$

o sea

$$(x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C,$$

es decir

$$x \in A \cup B \wedge y \in C$$

y por lo tanto

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C;$$

demostrándose que

$$h \subseteq (A \cup B) \times C.$$

ELD (ii)

Demostrar $\vec{p}_1 h = A \cup B$

Traducción $x \in \vec{p}_1 h \Leftrightarrow x \in A \cup B$

	(1)	$f : A \to C$	P
	(2)	$g : B \to C$	P
	(3)	$f\big\|_{A\cap B} = g\big\|_{A\cap B}$	P
	(4)	$h = f \cup g$	P
$\Rightarrow$)	(5)	$x \in \vec{p}_1\, h$	P
	(6)	$(x, y) \in h$ p.a. y	I trad.5, 2.12
	(7)	$h \subseteq (A \cup B) \times C$	P ELD (i)
	(8)	$(x, y) \in (A \cup B) \times C$	(6), (7)
	(9)	$x \in (A \cup B) \wedge y \in C$	I trad.8, 2.12
	(10)	$x \in A \cup B$	S 9
$□_1$	(11)	$x \in \vec{p}_1\, h \Rightarrow x \in A \cup B$	CP 5, 10
$\Leftarrow$)	(12)	$x \in A \cup B$	P
	(13)	$y = f(x) \wedge y = g(x)$	P, 1, 2,3
	(14)	$x \in A \cup B \wedge (y = f(x) \wedge y = g(x))$	A 12,13
	(15)	$(x \in A \vee x \in B) \wedge (y = f(x) \wedge y = g(x))$	traducción 14
	(16)	$(x \in A \wedge (y=f(x) \wedge y=g(x))) \vee (x \in B \wedge (y=f(x) \wedge y=g(x)))$	I 15, Ley Dist.
	(17)	$(x \in A \wedge y = f(x)) \vee (x \in B \wedge y = g(x))$	3, 16
	(18)	$(x, y) \in f \vee (x, y) \in g$	traducción 17
	(19)	$(x, y) \in f \cup g$	traducción 18
	(20)	$h = f \cup g$	I 19,4
	(21)	$(x, y) \in h$	I 19,20
	(22)	$x \in \vec{p}_1\, h$	I trad.20, 2.12
$□_2$	(23)	$x \in A \cup B \Rightarrow x \in \vec{p}_1\, h$	CP 12,22
	(24)	$x \in \vec{p}_1\, h \Leftrightarrow x \in A \cup B$	LB 11,23
□	(25)	$\vec{p}_1\, h = A \cup B$	traducción 24

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{p}_1\, h = A \cup B$.

(5) Sea $x \in \vec{p}_1\, h$. **(6)** Entonces existe y tal que $(x, y) \in h$ (2.12). **(7)**Se demostró que

$h \subseteq (A \cup B) \times C$, **(8)**luego (x, y)$\in(A\cup B) \times$ C **(9)**es decir $x\in(A \cup B) \wedge y\in$C **(10)** de donde x$\in A \cup B$. **(11)**Por lo tanto

$$x\in \overrightarrow{p_1}\, h \Rightarrow x\in A \cup B \quad (\mathrm{I})$$

(12) Sea ahora x$\in A \cup B$. **(13)** **(14)**Como f es una función de A en C y g una función de B en C y f restringido $A\cap B$ es igual a g restringido $A\cap B$, entonces x$\in A \cup B \wedge (y = f(x) \wedge y = g(x))$ **(15)** **(16)**que es equivalente a la disyunción

$$(x\in A \wedge (y = f(x) \wedge y = g(x))) \vee (x\in B \wedge (y = f(x) \wedge y = g(x))) .$$

(17) **(18)** **(19)**Como f restringido $A\cap B$ es igual a g restringido $A\cap B$, se tiene la disyunción

$$(x\in A \wedge y = f(x)) \vee (x\in B \wedge y = g(x))$$

que es equivalente a (x, y)$\in f \vee$ (x, y)$\in g$, que significa que (x, y)$\in f \cup g$. **(20)** **(21)**
(22) Como $h = f \cup g$, entonces (x, y)$\in h$ y x$\in \overrightarrow{p_1}\, h$. **(23)**Por lo tanto

$$x\in A \cup B \Rightarrow x\in \overrightarrow{p_1}\, h . \quad (\mathrm{II})$$

(24) De (I) y (II) se tiene x$\in \overrightarrow{p_1}\, h \Leftrightarrow x\in A \cup B$ **(25)** o sea $\overrightarrow{p_1}\, h = A \cup B$, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overrightarrow{p_1}\, h = A \cup B$.

Sea $x\in \overrightarrow{p_1}\, h$. Entonces existe y tal que $(x, y)\in h$ (2.12). Se demostró que $h \subseteq (A \cup B) \times C$, luego (x, y)$\in(A\cup B) \times$ C es decir $x\in(A \cup B) \wedge y\in$C de donde x$\in A \cup B$. Por lo tanto

$$x\in \overrightarrow{p_1}\, h \Rightarrow x\in A \cup B \quad (\mathrm{I})$$

Sea ahora x$\in A \cup B$. Como f es una función de A en C y g una función de B en C y f restringido $A\cap B$ es igual a g restringido $A\cap B$, entonces

$$x\in A \cup B \wedge (y = f(x) \wedge y = g(x))$$

que equivale a la disyunción

$$(x\in A \wedge (y = f(x) \wedge y = g(x))) \vee (x\in B \wedge (y = f(x) \wedge y = g(x))) .$$

Como f restringido $A\cap B$ es igual a g restringido $A\cap B$, se tiene la disyunción

$$(x \in A \wedge y = f(x)) \vee (x \in B \wedge y = g(x))$$

que es equivalente a

$$(x, y) \in f \vee (x, y) \in g,$$

que significa que

$$(x, y) \in f \cup g .$$

Como

$$h = f \cup g ,$$

entonces

$$(x, y) \in h \ \text{ y } \ x \in \vec{p}_1\, h.$$

Por lo tanto

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in \vec{p}_1\, h . \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) se tiene la equivalencia

$$x \in \vec{p}_1\, h \Leftrightarrow x \in A \cup B$$

o sea

$$\vec{p}_1\, h = A \cup B$$

que era lo que queríamos demostrar.

ELD (iii)

Demostrar $(x, y) \in h \wedge (x, z) \in h \Rightarrow y = z$

(1)	$f : A \to C$	P
(2)	$g : B \to C$	P
(3)	$f\vert_{A \cap B} = g\vert_{A \cap B}$	P
(4)	$h = f \cup g$	P
(5)	$(x, y) \in h \wedge (x, z) \in h$	P
(6)	$(x, y) \in f \cup g \wedge (x, z) \in f \cup g$	I 4,5
(7)	$((x, y) \in f \vee (x, y) \in g) \wedge ((x, z) \in f \vee (x, z) \in g)$	traducción 6
(8)	$[((x, y) \in f \vee (x, y) \in g) \wedge (x, z) \in f]$ $\vee$ $[((x, y) \in f \vee (x, y) \in g) \wedge (x, z) \in g]$	I. Ley. dist., 7
(9)	$[((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f) \vee ((x, y) \in g \wedge (x, z) \in f)]$ $\vee$	

	$[((x, y)\in f\wedge (x, z)\in g) \vee ((x, y)\in g \wedge (x, z)\in g)]$	I. Ley Dist, 8
(10)	$[((x, y)\in f\wedge (x, z)\in f) \vee ((x, y)\in f \wedge (x, z)\in f)]$ $\vee$ $[((x, y)\in g\wedge (x, z)\in g) \vee ((x, y)\in g \wedge (x, z)\in g)]$	I 9, 3
(11)	$[(x, y)\in f \wedge (x, z)\in f] \vee [(x, y)\in g \wedge (x, z)\in g]$	Dp 10
(12)	$(x, y)\in f \wedge (x, z)\in f \Rightarrow x = z$	(1)
(13)	$(x, y)\in g \wedge (x, z)\in g \Rightarrow x = z$	(2)
(14)	$x = z \vee x = z$	Hs 11,12,13
(15)	$x = z$	Dp 14
(16)	$(x, y)\in h \wedge (x, z)\in h \Rightarrow y = z$	CP 5,15
(17)	*h* es una relación funcional.	Traducciòn 16

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $(x, y)\in h \wedge (x, z)\in h$ implica $y = z$, es decir que *h* es una relación funcional.

(5) Sea $(x, y)\in h \wedge (x, z)\in h$. **(6)** Entonces $(x, y)\in f \cup g \wedge (x, z)\in f \cup g$ ya que por hipótesis $h = f \cup g$. **(7)** **(8)**De esto resulta la conjunción

$$((x, y)\in f \vee (x, y)\in g) \wedge ((x, z)\in f \vee (x, z)\in g)$$

que es equivalente a la disyunción

$$[((x, y)\in f \vee (x, y)\in g) \wedge (x, z)\in f]$$
o
$$[((x, y)\in f \vee (x, y)\in g) \wedge (x, z)\in g]$$

(9) que genera la disyunción

$$[((x, y)\in f\wedge (x, z)\in f) \vee ((x, y)\in g \wedge (x, z)\in f)]$$
o
$$[((x, y)\in f\wedge (x, z)\in g) \vee ((x, y)\in g \wedge (x, z)\in g)]$$

(10)que a su vez es equivalente a la disyunción

$$[((x, y)\in f\wedge (x, z)\in f) \vee ((x, y)\in g \wedge (x, z)\in f)]$$
o
$$[((x, y)\in g\wedge (x, z)\in g) \vee ((x, y)\in g \wedge (x, z)\in g)]$$

(11)de la cual, por simplificación disyuntiva , se obtiene la disyunción :

$$(x, y)\in f \wedge (x, z)\in f \qquad (*)$$
o
$$(x, y)\in g \wedge (x, z)\in g \qquad (**)$$

(12) De (*) se desprende que $x = z$ ya que f es una relación funcional . **(13)**De (**) también se desprende que $x = z$ por ser igualmente g una relación funcional. **(14)(15)**De todas formas, cualquiera sea la alternativa que consideremos, ya sea (*) o (**), el resultado es el mismo, a saber, $x = z$. **(16)(17)**Así que entonces se tiene la implicación $(x, y)\in h \wedge (x, z)\in h \Rightarrow y = z$, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $(x, y)\in h \wedge (x, z)\in h \Rightarrow y = z$, es decir que h es una relación funcional.

Sea $(x, y)\in h \wedge (x, z)\in h$. Entonces $(x, y)\in f \cup g \wedge (x, z)\in f \cup g$ ya que por hipótesis $h = f \cup g$. De esto resulta la conjunción

$$((x, y)\in f \vee (x, y)\in g) \wedge ((x, z)\in f \vee (x, z)\in g)$$

que es equivalente a la disyunción

$$[((x, y)\in f \vee (x, y)\in g) \wedge (x, z)\in f]$$
o
$$[((x, y)\in f \vee (x, y)\in g) \wedge (x, z)\in g],$$

la cual genera la disyunción

$$[((x, y)\in f\wedge (x, z)\in f)\vee ((x, y)\in g \wedge (x, z)\in f)]$$
o
$$[((x, y)\in f\wedge (x, z)\in g) \vee ((x, y)\in g \wedge (x, z)\in g)]$$

que a su vez equivale a la disyunción

$$[((x, y)\in f\wedge (x, z)\in f)\vee ((x, y)\in g \wedge (x, z)\in f)]$$
o
$$[((x, y)\in g\wedge (x, z)\in g) \vee ((x, y)\in g \wedge (x, z)\in g)]$$

de la cual, por simplificación disyuntiva , se obtiene la disyunción :

$$(x, y)\in f \wedge (x, z)\in f \qquad (*)$$
o
$$(x, y)\in g \wedge (x, z)\in g \qquad (**)$$

De (*) se desprende que $x = z$ ya que f es una relación funcional . De (**) también se desprende que $x = z$ por ser igualmente g una relación funcional. De todas formas, cualquiera sea la alternativa que consideremos, ya sea (*) o (**), el resultado es el mismo, a saber, $x = z$. Así que entonces se tiene la implicación

$$(x, y)\in h \wedge (x, z)\in h \Rightarrow y = z,$$

que era lo que queríamos demostrar.

ELD 2

Demostrar $h|_A = f$

Traducción : $(x, y)\in h|_A \Leftrightarrow (x, y)\in f$

(1)	$f : A \to C$	P
(2)	$g : B \to C$	P
(3)	$f\|_{A\cap B} = g\|_{A\cap B}$	P
(4)	$h = f \cup g$	P
⇒)(5)	$(x, y)\in h\|_A$	P
(6)	$(x, y)\in (f \cup g)\|_A$	I 4,5
(7)	$(f \cup g)\|_A = f$	(1),(2),(3),(4), 3.12
(8)	$(x, y)\in f$	I 6,7
□$_1$(9)	$(x, y)\in h\|_A \Rightarrow (x, y)\in f$	CP5,8
⇐)(10)	$(x, y)\in f$	P
(11)	$(x, y)\in f \wedge x\in A$	(1)
(12)	$(x, y)\in f \cup g \wedge x\in A$	(11), 1.13(ii)
(13)	$(x, y)\in h \wedge x\in A$	I 12,4
(14)	$(x, y)\in h\|_A$	(13), 3.12
□$_2$ (15)	$(x, y)\in f \Rightarrow (x, y)\in h\|_A$	CP 10, 14
(16)	$(x, y)\in h\|_A \Leftrightarrow (x, y)\in f$	LB 9,15
□ (17)	$h\|_A = f$	traducción 16

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $h|_A = f$.

(5) Sea $(x, y)\in h|_A$.**(6)** Como $h = f\cup g$, $(x, y)\in(f\cup g)|_A$. **(7)(8)** Como *f* es una función de A en C, g una función de B en C y *f* restringido $A\cap B$ es igual a *g* restringido $A\cap B$, entonces $f\cup g$ es una extensión tanto de *f* como de *g;* en particular $f\cup g$ es una extensión de *f*, o sea $(f\cup g)|_A = f$ y por lo tanto $(x, y)\in f$. **(9)** Entonces se tiene la implicación

$$(x, y)\in h|_A \Rightarrow (x, y)\in f \ . \qquad (*)$$

(10) Sea ahora $(x, y)\in f$. **(11)**Entonces $(x, y)\in f \wedge x\in A$ ya que *f* es una función de A en C; **(12)**de donde se tiene que $(x, y)\in f\cup g \ \wedge x\in A$. **(13)** Como $h = f\cup g$, entonces $(x, y)\in h \wedge x\in A$ **(14)**y esto quiere decir que $(x, y)\in h|_A$. **(15)**O sea que se cumple la implicación

$$(x, y)\in f \Rightarrow (x, y)\in h|_A . \qquad (**)$$

(16) De (*) y (**) se tiene la equivalencia $(x, y)\in h|_A \Leftrightarrow (x, y)\in f$ **(17)** o sea $h|_A = f$, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $h|_A = f$.

Sea

$$(x, y)\in h|_A .$$

Como

$$h = f\cup g ,$$

entonces

$$(x, y)\in(f\cup g)|_A .$$

Como *f* es una función de A en C, g una función de B en C y *f* restringido $A\cap B$ es igual a *g* restringido $A\cap B$ (hipótesis), entonces $f\cup g$ es una extensión tanto de *f* como de *g*. En particular $f\cup g$ es una extensión de *f*, o sea

$$(f\cup g)|_A = f,$$

y por lo tanto

$$(x, y)\in f .$$

Entonces se tiene la implicación

$$(x, y)\in h|_A \Rightarrow (x, y)\in f \ . \qquad (*)$$

Sea ahora (x, y)$\in f$. Entonces (x, y)$\in f \wedge$ x$\in$A ya que f es una función de A en C; de donde se tiene que (x, y)$\in f \cup g \wedge$ x$\in$A. Como $h = f \cup g$, (x, y)$\in h \wedge$ x$\in$A. Pero esto quiere decir que (x, y)$\in h|_A$. O sea que se cumple la implicación

$$(x, y)\in f \Rightarrow (x, y)\in h|_A. \quad (**)$$

De (*) y (**) se tiene

$$(x, y)\in h|_A \Leftrightarrow (x, y)\in f$$

o sea

$$h|_A = f,$$

que era lo que queríamos demostrar.

9. (ii) $f : A \mapsto C \;\wedge\; g : B \mapsto C \;\wedge A \cap B = \varnothing \;\wedge\; h = f \cup g$
$\Rightarrow h : A \cup B \mapsto C \;\wedge\; h|_A = f \;\wedge\; h|_B = g$

1. Interpretación: Lo que la proposición quiere decir es que el razonamiento:

(1)	$f : A \rightarrow C$	P
(2)	$g : B \rightarrow C$	P
(3)	$A \cap B = \varnothing$	P
(4)	$h = f \cup g$	P
$\triangleright$	$h : A \cup B \mapsto C \;\wedge\; h\|_A = f \;\wedge\; h\|_B = g$	Conclusión

Es válido.

ELD1

Demostrar $h : A \cup B \mapsto C$

Traducción : (i) $h \subseteq (A \cup B) \times C$

(ii) $\vec{p}_1\, h = A \cup B$

(iii) (x, y)$\in h \wedge$ (x, z)$\in h \Rightarrow$ y = z

ELD (i)

Demostrar $h \subseteq (A \cup B) \times C$

Traducción : (x, y)$\in h \Rightarrow$ (x, y)$\in (A \cup B) \times C$

(1)	$f : A \rightarrow C$	P
(2)	$g : B \rightarrow C$	P
(3)	$A \cap B = \varnothing$	P
(4)	$h = f \cup g$	P

(5)	$(x, y) \in h$	P
(6)	$(x, y) \in f \cup g$	I 4,5
(7)	$(x, y) \in f \lor (x, y) \in g$	I trad.6, 1.11(ii)
(8)	$(f(x) = y \land x \in A) \lor (g(x) = y \land x \in B)$	trad. 7, 1, 2
(9)	$(x \in A \land y \in C) \lor (x \in B \land y \in C)$	8, 1, 2
(10)	$(x, y) \in A \times C \lor (x, y) \in B \times C$	I trad.9, 2.6
(11)	$(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$	I trad.10, 1.11(ii)
(12)	$(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$	P
(13)	$(x, y) \in (A \cup B) \times C$	I 11,12
(14)	$(x, y) \in h \Rightarrow (x, y) \in A \cup B) \times C$	CP 5,13
(15)	$h \subseteq (A \cup B) \times C$	traducción 14

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $h \subseteq (A \cup B) \times C$, es decir que h es una relación de $A \cup B$ en C.

(5) Sea $(x, y) \in h$. **(6) (7)**Debido a que $h = f \cup g$, entonces $(x, y) \in f \cup g$ y $(x, y) \in f$ o $(x, y) \in g$. **(8)** Como f es una función de A en C y g es una función de B en C, $(f(x) = y \land x \in A) \lor (g(x) = y \land x \in B)$.
(9) (10) Entonces $(x \in A \land y \in C) \lor (x \in B \land y \in C)$ o sea $(x, y) \in A \times C \lor (x, y) \in B \times C$ (2.6); **(11)**de donde $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.
(12)(13) Como $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$, $(x, y) \in (A \cup B) \times C$; **(14)**cumpliéndose entonces que $(x, y) \in h \Rightarrow (x, y) \in (A \cup B) \times C$, **(15)** es decir $h \subseteq (A \cup B) \times C$, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $h \subseteq (A \cup B) \times C$ es decir que h es una relación de $A \cup B$ en C.
Sea

$$(x, y) \in h.$$

Debido a que

$$h = f \cup g ,$$

entonces

$$(x, y) \in f \cup g$$

y por lo tanto

$$(x, y) \in f \lor (x, y) \in g .$$

Como f es una función de A en C y g es una función de B en C, entonces

$$(f(x) = y\in C \wedge x\in A) \vee (g(x) = y\in C \wedge x\in B).$$

De donde

$$(x\in A \wedge y\in C) \vee (x\in B \wedge y\in C)$$

o sea

$$(x, y) \in A\times C \vee (x, y)\in B\times C \qquad (2.6);$$

Y por lo tanto

$$(x, y) \in (A\times C)\cup(B\times C).$$

Como

$$(A\times C)\cup(B\times C) = (A\cup B) \times C,$$

entonces

$$(x, y)\in(A\cup B) \times C ;$$

cumpliéndose entonces que

$$(x, y)\in h \Rightarrow (x, y)\in A \cup B) \times C$$

es decir

$$h \subseteq (A \cup B) \times C.$$

ELD (ii)

Demostrar $\vec{p}_1 h = A \cup B$

Traducción $x\in\vec{p}_1 h \Leftrightarrow x\in A \cup B$

(1)	$f : A \to C$	P
(2)	$g : B \to C$	P
(3)	$A \cap B = \varnothing$	P
(4)	$h = f\cup g$	P

⇒) (5)	$x\in \vec{p}_1\, h$	P
(6)	$(x, y)\in h$ p.a.y	I trad.5, 2.12
(7)	$(x, y)\in f \cup g$	I 4,6
(8)	$(x, y)\in f \vee (x, y)\in g$	I trad.7, 1.11(ii)
(9)	$(x\in A \wedge y = f(x)) \vee (x\in B \wedge y = g(x))$	8,1,2
(10)	$x\in A \vee x\in B$	S 9 (ambos miembros)
(11)	$x\in A \cup B$	I trad.10, 1.11(ii)
□$_1$(12)	$x\in \vec{p}_1\, h \Rightarrow x\in A \cup B$	CP 5, 10
⇐) (13)	$x\in A \cup B$	P
(14)	$x\in A \vee x\in B$	I trad.13, 1.11(ii)
(15)	$x\in A \Rightarrow fx = y$	1
(16)	$x\in B \Rightarrow gx = y$	2
(17)	$fx = y \vee gx = y$	Ds 14,15,16

	(18)	$(x, y)\in f \vee (x, y)\in g$	17
	(19)	$(x, y)\in f\cup g$	I 18, 1.11(ii)
	(20)	$(x, y)\in h$	I 4,19
	(21)	$x\in \vec{p}_1\, h$	I trad.19, 2.12
□$_2$	(22)	$x\in A\cup B \Rightarrow x\in \vec{p}_1\, h$	CP 13,21
	(23)	$x\in \vec{p}_1\, h \Leftrightarrow x\in A\cup B$	LB 12,22
□	(24)	$\vec{p}_1\, h = A\cup B$	traducción 22

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{p}_1\, h = A\cup B.$

(5) Sea $x\in \vec{p}_1\, h$. **(6)** Entonces $(x, y)\in h$ para algún y (2.12). **(7)**Como $h = f\cup g$, $(x, y)\in f\cup g$ **(8)**es decir $(x, y)\in f \vee (x, y)\in g$ **(9)**de donde $(x\in A \wedge y = f(x)) \vee (x\in B \wedge y = g(x))$, ya que f es una función de A en C y g una función de B en C, **(10)** y por lo tanto $x\in A \vee x\in B$; **(11)** o sea $x\in A\cup B$, **(12)** cumpliéndose la implicación

$$x\in \vec{p}_1\, h \Rightarrow x\in A\cup B . \quad (*)$$

(13) Sea ahora $x\in A\cup B$. **(14)** Entonces se tiene la siguiente disyunción :

$$x\in A \text{ o } x\in B .$$

(15) Si $x\in A$, entonces $fx = y$, ya que $f: A\mapsto C$

(16) Si $x\in B$, entonces $gx = y$, ya que $g: B\mapsto C$

(17) Por tanto, $fx = y \vee gx = y$ (silogismo hipotético)

(18) y $(x, y)\in f \vee (x, y)\in g$ **(19)** o sea $(x, y)\in f\cup g$. **(20)**Como $h = f\cup g$, entonces $(x, y)\in h$ **(21)** y $x\in \vec{p}_1\, h$. **(22)**Así que

$$x\in A\cup B \Rightarrow x\in \vec{p}_1\, h \qquad (**)$$

(23) De (*) y (**), se tiene la equivalencia $x\in \vec{p}_1\, h \Leftrightarrow x\in A\cup B$,

(24) o sea $\vec{p}_1\, h = A\cup B$, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{p}_1\, h = A\cup B.$

Sea $x\in \vec{p}_1\, h.$

Entonces

$$(x, y)\in h \qquad \text{para algún } y \quad (2.12).$$

Como

$$h = f \cup g\ ,$$

entonces

$$(x, y)\in f \cup g,$$

O sea

$$(x, y)\in f \vee (x, y)\in g$$

de donde

$$(x\in A \wedge y = f(x)\in C) \vee (x\in B \wedge y = g(x)\in C),$$

ya que f es una función de A en C y g una función de B en C. Por lo tanto

$$x\in A \vee x\in B\ ;\ \text{o sea } x\in A \cup B\ ,$$

cumpliéndose la implicación

$$x\in \vec{p}_1\, h \Rightarrow x\in A \cup B\ . \quad (*)$$

Sea ahora $x\in A \cup B$. Entonces se tiene la siguiente disyunción :

$$x\in A \ \text{ o } \ x\in B\ .$$

Si $x\in A$, entonces $fx = y$, ya que $f : A \mapsto C$
Si $x\in B$, entonces $gx = y$, ya que $g : B \mapsto C$

Por tanto,

$$fx = y \ \vee \ gx = y \quad \text{(silogismo hipotético)}$$

y

$$(x, y)\in f \vee (x, y)\in g$$

o sea

$$(x, y)\in f \cup g\ .$$

Como

$$h = f \cup g\ ,$$

entonces

$$(x, y)\in h \ \text{ y } \ x\in \vec{p}_1\, h.$$

Así que

$$x\in A \cup B \Rightarrow \ x\in \vec{p}_1\, h \qquad (**)$$

De (*) y (**) se tiene la equivalencia $x\in \vec{p}_1\, h \Leftrightarrow x\in A \cup B$

o sea $\overrightarrow{p_1}\, h = A \cup B$, que era lo que queríamos demostrar.

ELD(iii)

Demostrar $(x, y) \in h \wedge (x, z) \in h \Rightarrow$ $\boldsymbol{y = z}$

(1) $f : A \to C$ P

(2) $g : B \to C$ P

(3) $A \cap B = \varnothing$ P

(4) $h = f \cup g$ P

(5) $(x, y)\in h \wedge (x, z)\in h$ P

(6) $(x, y)\in f \cup g \wedge (x, z)\in f \cup g$ I 4,5

(7) $((x, y)\in f \vee (x, y)\in g) \wedge ((x, z)\in f \vee (x, z)\in g)$ 6

(8) $[((x, y)\in f \vee (x, y)\in g) \wedge (x, z)\in f]$
$\vee$
$[((x, y)\in f \vee (x, y)\in g) \wedge (x, z)\in g]$ I. ley dist., 7

(9) $[((x, y)\in f\wedge (x, z)\in f) \vee ((x, y)\in g \wedge (x, z)\in f)]$
$\vee$
$[((x, y)\in f\wedge (x, z)\in g) \vee ((x, y)\in g \wedge (x, z)\in g)]$ I. ley dist., 8

(10) $\neg\ [(x, y)\in g \wedge (x, z)\in f]$ (3)

(11) $[(x, y)\in f \wedge (x, z)\in f]$
$\vee$
$[((x, y)\in f \wedge (x, z)\in g) \vee ((x, y)\in g \wedge (x, z)\in g)]$ TP 9(primer miembro),10

(12) $[(x, y)\in f \wedge (x, z)\in g)]$ (3)

(13) $[(x, y)\in f\wedge (x, z)\in f] \vee [((x, y)\in g \wedge (x, z)\in g)]$ TP 11(segundo miembro),12

(14) $(x, y)\in f \wedge (x, z)\in f \Rightarrow y = z$ (1)

(15) $(x, y)\in g \wedge (x, z)\in g \Rightarrow y = z$ (2)

(16) $y = z \vee y = z$ Ds 13,14,15

(17) $y = z$ Dp 16

(18) $(x, y)\in h \wedge (x, z)\in h \Rightarrow y = z$ CP 5,17

(19) h es una relación funcional traducciòn 18

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $(x, y)\in h \wedge (x, z)\in h \Rightarrow y = z$ es decir que h es una relación funcional.

(5) Sea (x, y)$\in h$ $\wedge$ (x, z)$\in h$. **(6)** Entonces (x, y)$\in f\cup g$ $\wedge$ (x, z)$\in f\cup g$, ya que $h = f\cup g$. **(7)**Esto es ((x, y)$\in f$ $\vee$ (x, y)$\in g$) $\wedge$ ((x, z)$\in f$ $\vee$ (x, z)$\in g$) , **(8)** lo que, por la ley distributiva, se convierte en

$$[((x, y)\in f \vee (x, y)\in g) \wedge (x, z)\in f] \vee [((x, y)\in f \vee (x, y)\in g) \wedge (x, z)\in g] .$$

(9) De donde resulta la siguiente disyunción :

$$\begin{array}{c} [((x, y)\in f\wedge (x, z)\in f)\vee ((x, y)\in g \wedge (x, z)\in f)] \\ \text{o} \\ [((x, y)\in f\wedge (x, z)\in g) \vee ((x, y)\in g \wedge (x, z)\in g)] \end{array} \qquad (*)$$

(10) Debido a que $A\cap B=\phi$ y siendo que f es una función de A en C y g una función de B en C no puede ocurrir que (x, y)$\in g$ $\wedge$ (x, z)$\in f$, **(11)**por lo tanto el primer miembro de la disyunción (*) se reduce a ((x, y)$\in g$ $\wedge$ (x, z)$\in f$. **(12)** Por el mismo argumento no puede ocurrir que (x, y)$\in f$ $\wedge$ (x, z)$\in g$, luego el segundo miembro de la disyunción (*) se reduce a (x, y)$\in g$ $\wedge$ (x, z)$\in g$) . **(13)**Así que (*) queda reducida a la disyunción :

$$((x, y)\in f \wedge (x, z)\in f) \text{ o } (((x, y)\in g \wedge (x, z)\in g))$$

(14) Si $(x, y)\in f$ y $(x, z)\in f$, entonces $y = z$; ya que f es relación funcional.
(15) Si $(x, y)\in g$ y $(x, z)\in g$, entonces $y = z$; ya que g es relación funcional.
(16) Por lo tanto, $y = z$ o $y = z$. **(17)**O sea $y = z$.
(18) (19) Así que h es una relación funcional.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que (x, y)$\in h$ $\wedge$ (x, z)$\in h$ $\Rightarrow$ y = z es decir que h es una relación funcional.
Sea (x, y)$\in h$ $\wedge$ (x, z)$\in h$. Entonces (x, y)$\in f\cup g$ $\wedge$ (x, z)$\in f\cup g$ ya que $h = f\cup g$. O sea ((x, y)$\in f$ $\vee$ (x, y)$\in g$) $\wedge$ ((x, z)$\in f$ $\vee$ (x, z)$\in g$), lo que por la ley distributiva se convierte en

$$[((x, y)\in f \vee (x, y)\in g) \wedge (x, z)\in f] \vee [((x, y)\in f \vee (x, y)\in g) \wedge (x, z)\in g] .$$

De esto resulta la siguiente disyunción :

$$\begin{array}{c} [((x, y)\in f\wedge (x, z)\in f)\vee ((x, y)\in g \wedge (x, z)\in f)] \\ \text{o} \\ [((x, y)\in f\wedge (x, z)\in g) \vee ((x, y)\in g \wedge (x, z)\in g)] \end{array} \qquad (*)$$

Debido a que $A \cap B = \phi$ y siendo que *f* es una función de *A* en *C* y g una función de *B* en *C*, no puede ocurrir que (x, y)$\in g \wedge$ (x, z)$\in f$; por lo tanto, el primer miembro de la disyunción (*) se reduce a ((x, y)$\in g \wedge$ (x, z)$\in f$. Por el mismo argumento no puede ocurrir que (x, y)$\in f \wedge$ (x, z)$\in g$; luego el segundo miembro de la disyunción (*) se reduce a (x, y)$\in g \wedge$ (x, z)$\in g$) . Así que (*) queda reducida a la disyunción :

$$((x, y)\in f \wedge (x, z)\in f\,) \text{ o } (((x, y)\in g \wedge (x, z)\in g))$$

Si $(x, y)\in f$ y $(x, z)\in f$, entonces $y = z$, ya que *f* es relación funcional.
Si $(x, y)\in g$ y $(x, z)\in g$, entonces $y = z$, ya que *g* es relación funcional.
Por lo tanto, $y = z$ o $y = z$. O sea $y = z$. Así que *h* es una relación funcional.

ELD 2

Demostrar $h|_A = f$

Traducción : $(x, y)\in h|_A \Leftrightarrow (x, y)\in f$

(1)	$f : A \to C$	P
(2)	$g : B \to C$	P
(3)	$A \cap B = \varnothing$	P
(4)	$h = f \cup g$	P
⇒)(5)	$(x, y)\in h|_A$	P
(6)	$(x, y)\in h \wedge x\in A$	5, 3.10
(7)	$(x, y)\in f \cup g \wedge x\in A$	I 6,4
(8)	$((x, y)\in f \vee (x, y)\in g) \wedge x\in A$	I trad.7, 1.11(ii)
(9)	$((x, y)\in f \wedge x\in A) \vee ((x, y)\in g \wedge x\in A)$	I 8, ley dist.
(10)	$(y = f(x) \wedge x\in A) \vee (y = g(x) \wedge x\in A)$	traducción 9
(11)	$(y = f(x) \wedge x\in A) \vee (y = g(x) \wedge x\in B \wedge x\in A)$	10, 2
(12)	$\neg\, (y = g(x) \wedge x\in B \wedge x\in A)$	3
(13)	$(y = f(x) \wedge x\in A)$	TP 11,12
(14)	$(x, y)\in f$	traducción 13
□$_1$(15)	$(x, y)\in h|_A \Rightarrow (x, y)\in f$	CP 5,14
(16)	$(x, y)\in f$	P
(17)	$(x, y)\in f \cup g$	5
(18)	$x\in A$	1, 16
(19)	$(x, y)\in f \cup g \wedge x\in A$	A 17,18
(20)	$(x, y)\in h \wedge x\in A$	I 4,19
(21)	$(x, y)\in h|_A$	I trad. 20, 3.12
□$_2$ (22)	$(x, y)\in f \Rightarrow (x, y)\in h|_A$	CP 16,21
(23)	$(x, y)\in h|_A \Leftrightarrow (x, y)\in f$	LB 9,15
□ (24)	$h|_A = f$	traducción 23

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $h|_A = f$.

(5) Sea $(x, y)\in h|_A$.**(6)**Entonces $(x, y)\in h \wedge x\in A$ (3.10). **(7)**Como $h = f\cup g$, entonces $(x, y)\in f\cup g \wedge x\in A$ **(8)**o sea $((x, y)\in f \vee (x, y)\in g) \wedge x\in A$, **(9)**que es equivalente a

$$((x, y)\in f \wedge x\in A) \vee ((x, y)\in g \wedge x\in A) ,$$

(10)que es lo mismo que

$$(y = f(x) \wedge x\in A) \vee (y = g(x) \wedge x\in A).$$

(11) Como g es una función de B en C, de lo anterior se tiene la disyución

$$\begin{array}{c} y = f(x) \wedge x\in A \\ \text{o} \\ y = g(x) \wedge x\in B \wedge x\in A. \end{array} \qquad (*)$$

(12) Como $A\cap B=\phi$, no ocurre que $y = g(x) \wedge x\in B \wedge x\in A$ **(13)** luego se verifica el primer miembro de (*), esto es $y = f(x) \wedge x\in A$ **(14)** o sea $(x, y)\in f$. **(15)**Y por lo tanto

$$(x, y)\in h|_A \Rightarrow (x, y)\in f \qquad (\text{ I })$$

(16) Sea ahora $(x, y)\in f$. **(17)** **(18)** **(19)** Entonces $(x, y)\in f \cup g$ y $x\in A$ ya que f es una función de A en C.

(20) Como $h = f\cup g$ se tiene que $(x, y)\in h \wedge x\in A$, **(21)** esto es $(x, y)\in h|_A$ (3.12), **(22)** y entonces se cumple la implicación

$$(x, y)\in f \Rightarrow (x, y)\in h|_A . \qquad (\text{ II })$$

(23) De (I) y (II) se tiene la equivalencia $(x, y)\in h|_A \Leftrightarrow (x, y)\in f$. **(24)** Esto es $h|_A = f$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $h|_A = f$.

Sea $(x, y)\in h|_A$ .Entonces $(x, y)\in h \wedge x\in A$ (3.10). Como $h = f\cup g$, entonces $(x, y)\in f\cup g \wedge x\in A$ o sea $((x, y)\in f \vee (x, y)\in g) \wedge x\in A$ que es equivalente a

$$((x, y)\in f \wedge x\in A) \vee ((x, y)\in g \wedge x\in A),$$

que es lo mismo que

$$(y = f(x) \wedge x \in A) \vee (y = g(x) \wedge x \in A).$$

Como g es una función de B en C, de lo anterior se tiene la disyución

$$\begin{array}{c} y = f(x) \wedge x \in A \\ \text{o} \\ y = g(x) \wedge x \in B \wedge x \in A. \end{array} \qquad (*)$$

Como $A \cap B = \phi$, no ocurre que $y = g(x) \wedge x \in B \wedge x \in A$ luego se verifica el primer miembro de (*) esto es $y = f(x) \wedge x \in A$ o sea $(x, y) \in f$. Y por lo tanto

$$(x, y) \in h|_A \Rightarrow (x, y) \in f \qquad (\text{ I })$$

Sea ahora $(x, y) \in f$. Entonces $(x, y) \in f \cup g$ y $x \in A$ ya que f es una función de A en C. Como $h = f \cup g$ se tiene que $(x, y) \in h \wedge x \in A$ esto es $(x, y) \in h|_A$ (3.12), y entonces se cumple la implicación

$$(x, y) \in f \Rightarrow (x, y) \in h|_A \,. \qquad (\text{ II })$$

De (I) y (II) se tiene la equivalencia $(x, y) \in h|_A \Leftrightarrow (x, y) \in f$. Esto es $h|_A = f$.

10. $\varnothing : \varnothing \mapsto B$ (que la podemos llamar función vacía)
. La función vacía es la función $\varnothing : \varnothing \mapsto \varnothing$.

ELD

Demostrar $\varnothing : \varnothing \mapsto B$

Traducción : (i) $\varnothing \subseteq \varnothing \times B$

(ii) $\vec{p}_1\, \varnothing = \varnothing$

(iii) $(x, y) \in \varnothing \wedge (x, z) \in \varnothing \Rightarrow y = z$

Demostración de (i) : $\varnothing \subseteq \varnothing \times B$, debido a que $\varnothing$ es subconjunto de todo conjunto.

Demostración de (ii)

ELD (ii)

Demostrar $\vec{p}_1\, \varnothing = \varnothing$

Por RRA

(1) $\vec{p}_1\, \varnothing \neq \varnothing$ **P**

(2)	$\exists$ x: x$\in \overrightarrow{p_1}\ \varnothing$	(1), 1.6(ii)
(3)	$(x, y)\in\varnothing$ p.a.y	traducción 2
(4)	$\varnothing\subseteq\varnothing\times B$	P (i)
(5)	$(x, y)\in\varnothing\times B$	(3), (4)
(6)	$x\in\varnothing\wedge$ y$\in B$	traducción 5
(7)	$x\in\varnothing$	S6
(8)	$x\neq x$	trad. 7,1.5
□ (9)	$\overrightarrow{p_1}\ \varnothing = \varnothing$	RAA 1,8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overrightarrow{p_1}\ \varnothing = \varnothing$.

(1) Supongamos lo contrario, esto es, $\overrightarrow{p_1}\ \varnothing \neq \varnothing$. **(2)** Entonces existe $x\in \overrightarrow{p_1}\ \varnothing$ (1.6(ii)). **(3)**Esto implica que $(x, y)\in\varnothing$ para algún y (2.12). **(4)**Hemos demostrado que $\varnothing\subseteq\varnothing\times B$, **(5)**luego $(x, y)\in\varnothing\times B$ **(6)(7)** de donde $x\in\varnothing$ (2.6). **(8)**Pero esto significa que $x\neq x$, lo cual es un absurdo. **(9)**Por lo tanto $\overrightarrow{p_1}\ \varnothing = \varnothing$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overrightarrow{p_1}\ \varnothing = \varnothing$.

Supongamos lo contrario, esto es, $\overrightarrow{p_1}\ \varnothing \neq \varnothing$. Entonces existe $x\in \overrightarrow{p_1}\ \varnothing$, por (1.6(ii)). Esto implica que $(x, y)\in\varnothing$ para algún y (2.12). Hemos demostrado que $\varnothing\subseteq\varnothing\times B$, luego $(x, y)\in\varnothing\times B$ de donde $x\in\varnothing$ (2.6). Pero esto significa que $x\neq x$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto $\overrightarrow{p_1}\ \varnothing = \varnothing$.

Demostración de (iii) :

La implicación $(x, y)\in\varnothing \wedge (x, z)\in\varnothing \Rightarrow y = z$ es verdadera ya que el antecedente es falso, y no importa qué valor de certeza tome el consecuente, verdadero o falso, la condicional es verdadera.

11. Sea $f : A \mapsto$ B $\wedge\ g : A \mapsto B \wedge f \subseteq g \Rightarrow f = g$

ELD
Demostrar *f* = *g*
Por RAA

(1)	$\boldsymbol{f : A \mapsto}$ **B**	**P**
(2)	$\boldsymbol{g : A \mapsto B}$	**P**

(3) $f \subseteq g$		**P**
(4)	$f \neq g$	P
(5)	$\exists (x_0, y_0): (x_0, y_0) \in f \wedge (x_0, y_0) \notin g$	traducción (1)
(6)	$(x_0, y_0) \in f$	S 2
(7)	$(x_0, y_0) \in g$	6,3
(8)	$(x_0, y_0) \notin g$	S 5
(9)	$(x_0, y_0) \in g \wedge (x_0, y_0) \notin g$	A 7,8
(10) $f = g$		RAA 4,9

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(4) Supongamos lo contrario; esto es $f \neq g$. **(5)** Entonces existe una pareja (x_0, y_0) tal que $(x_0, y_0) \in f$ y $(x_0, y_0) \notin g$. **(6)** En particular $(x_0, y_0) \in f$. **(7)** Debido a que por hipótesis $f \subseteq g$, *entonces* $(x_0, y_0) \in$g. **(8)** **(9)**Pero esto contradice el hecho de que $(x_0, y_0) \notin g$. **(10)**Luego, $f = g$. □

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario; o sea $f \neq g$. Entonces existe una pareja (x_0, y_0) tal que $(x_0, y_0) \in f$ y $(x_0, y_0) \notin g$. En particular $(x_0, y_0) \in f$. Debido a que por hipótesis $f \subseteq g$, *entonces* $(x_0, y_0) \in$g . Pero esto contradice el hecho de que $(x_0, y_0) \notin g$. Luego $f = g$. □

2. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

El concepto de “composición de relaciones” que introdujimos en la sección 4 del capítulo anterior, es especialmente fácil de ver cuando las relaciones son funcionales. Aunque la definición 2.14 no impone restricciones, la composición de funciones nos interesa especialmente cuando la situación es la siguiente:

Sea $f : A \mapsto B$ y $g : C \mapsto D$ de manera que $p_2 f \subseteq C$. Ahora, f transforma a cada x de A en fx que está en $p_2 f$ y por lo tanto en C . g transforma a fx en gfx (o g(f(x)) con la notación más común) . En definitiva se obtiene una tercera función de A en D cuya relación funcional es $g \circ f$, $(g \circ f)x = g(fx)$ para cada $x \in A$.

3.13 Proposición : Sea $f : A \mapsto B$ y $g : C \mapsto D$ tal que $p_2 f \subseteq C$, entonces $g \circ f : A \mapsto D$ es una función .

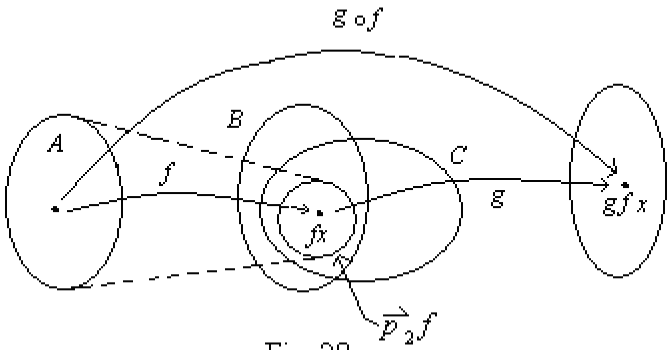


Fig. 28

Demostración :

(i) Por 2.15 $g \circ f$ es una relación de A en B.

(ii) Por el ejercicio 2.4, 4 (ii), $p_1(g \circ f) = p_1 f = A$.

(iii) $(x, y) \in g \circ f \wedge (x, z) \in g \circ f \Rightarrow y = z$

ELD

Demostrar $(x, y) \in g \circ f \wedge (x, z) \in g \circ f \Rightarrow y = z$

(1)	$\boldsymbol{f : A \mapsto B}$	**P**
(2)	$\boldsymbol{g : C \mapsto D}$	**P**
(3)	$\boldsymbol{p_2 f \subseteq C}$	**P**
(4)	$(x, y) \in g \circ f \wedge (x, z) \in g \circ f$	P
(5)	$\exists\, u, v \in p_2 f : [(x,u) \in f \wedge (u, y) \in g] \wedge [(x,v) \in f \wedge (v,z) \in g]$	4
(6)	$[(x, u) \in f \wedge (x, v) \in f] \wedge [(u, y) \in g \wedge (v, z) \in g]$	CL 5
(7)	$(x, u) \in f \wedge (x, v) \in f$	S6
(8)	$(x, u) \in f \wedge (x, v) \in f \Rightarrow u = v$	(1)
(9)	$u = v$	PP 7,8
(10)	$(u, y) \in g \wedge (v, z) \in g$	S 6
(11)	$(u, y) \in g \wedge (u, z) \in g$	I 10,9
(12)	$(u, y) \in g \wedge (u, z) \in g \Rightarrow y = z$	(2)
(13)	$y = z$	PP 12,11
(14)	$(x, y) \in g \circ f \wedge (x, z) \in g \circ f \Rightarrow y = z$	CP 4,13
□(15)	$g \circ f$ es relación funcional	trad. 14

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(4) (5) (6)
Si (x, y) $\in g\circ f$ y (x, z)$\in g\circ f$ entonces (x, u), (x, v)$\in f$ y (u, y), (v, z)$\in g$ para algunos $u,v\in p_2 f$. **(7) (8) (9) (10) (11)** Como f es function, entonces $u = v$ y se tiene que $(u, y), (u, z)\in g$. **(12) (13)** Como g también es function, $y = z$. **(14) (15)** Por lo tanto $g\circ f$ es relación functional. □

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea

$$(x, y) \in g\circ f \quad y \quad (x, z)\in g\circ f.$$

Entonces

$$(x, u) \in f, (x, v)\in f \quad y \quad (u, y) \in g, (v, z)\in g \qquad p.\ a.\ u,v\in p_2 f .$$

Como f es function, $u = v$ y se tiene que $(u, y) \in g, (u, z)\in g$. Como g también es function, entonces $y = z$. Por lo tanto $g\circ f$ es relación functional. □

3.14 Definición : La función $g\circ f : A \mapsto D$ a que se refiere la proposición anterior se llama la **composición** de las dos funciones f, g **.**

Existe una manera de visualizar el concepto de "función" que resulta especialmente útil para acabar de comprender la composición de funciones. Una función $f : A \mapsto B$ es como una máquina que al introducirle un objeto x de A lo transforma en un objeto fx de B . La funciones de identidad x dejan a los objetos intactos y las funciones constantes transforman a todos los objetos en un mismo objeto.

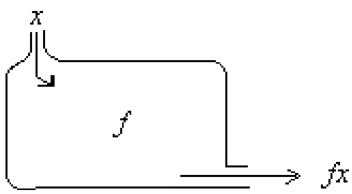


Fig. 29

Si ahora tenemos dos máquinas una f y otra g de tal naturaleza que la máquina g acepta los objetos elaborados por f, las dos se pueden ensamblar para obtener otra máquina, la máquina $g\circ f$. (Fig. 30)

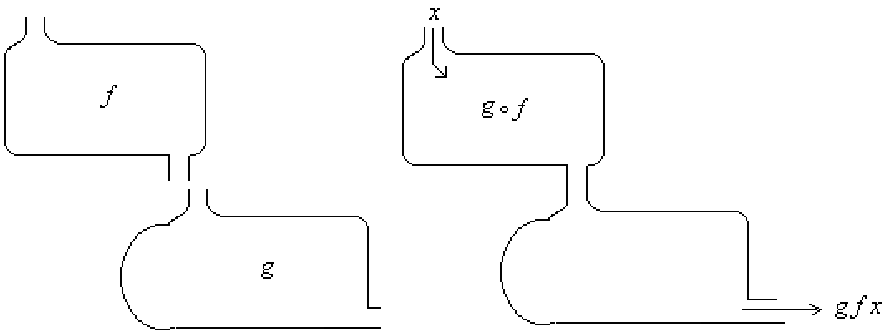


Fig. 30

Como casos especiales de proposiciones ya demostradas se tienen las dos afirmaciones siguientes :

Sea $f : A \mapsto B$. Por el ejercicio 2.4 (3) : $I_B \circ f = f \wedge f \circ I_A = f$

Sea $f : A \mapsto B$, $g : C \mapsto D$ y $h : E \mapsto$ tales que $\vec{p}_2\, f \subseteq C$, $\vec{p}_2\, g \subseteq E$, por la proposición 2.17 : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

EJERCICIOS : 3.2

1. Sea f **: R**$\mapsto$ **R ,** f x = senx y g**: R**$\mapsto$ **R ,** g x = x^2 . $f \circ g \neq g \circ f$.

2. Sean $g : A \mapsto B$, $f : A \mapsto C$

   (a) Existe $h : \vec{p}_2\, g \mapsto C$ *tal que* $f = h \circ g$ si y solamente si para todo x, y $\in A$, g(x) = g(y) $\Rightarrow$ f(x) = f(y) .

   (b) Tal *h* es única.

3. Sea $B \subseteq A$. Definimos la función de inclusión , $E_B : B \mapsto A$ por E_B x = x para cada x$\in B$.

   (i) *Si* $B = A$, $E_B = I_A$

   (ii) $f|_B = f \circ E_B$ *para cualquier* $f : A \mapsto C$

4. De ejemplos de funciones diferentes $f: A \mapsto A$, $g: A \mapsto A$ (diferentes de la identidad y sin ser el inverso de g) tales que $f \circ g = g \circ f$

ACTIVIDAD PRÁCTICA – PROCESO IMITATIVO

1. Sea f **: R**$\mapsto$ **R ,** $f\,x = senx$ y g**: R**$\mapsto$ **R ,** $g\,x = x^2$. $f \circ g \neq g \circ f$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = sen(g(x)) = senx^2$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(senx) = sen^2 x$$

$\therefore\ f \circ g \neq g \circ f$

2. Sean $g : A \mapsto B$, $f : A \mapsto C$

(a) Existe $h : \vec{p}_2\, g \mapsto C$ tal que $f = h \circ g$ si y solamente si para todo x, y $\in A$, $g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$.

Demostración de (a) en el sentido $\Leftarrow$) :

ELD

Demostrar : $\exists\, \boldsymbol{h} : \vec{p}_2\, \boldsymbol{g} \mapsto \boldsymbol{C}$ ***tal que*** $\boldsymbol{f = h \circ g}$

Traducción : (i) $h \subseteq \vec{p}_2\, g \times C$

(ii) $\vec{p}_1\, h = \vec{p}_2\, g$

(iii) (x, y)$\in h \wedge$ (x, z)$\in h \Rightarrow$ y = z

(1)	$\boldsymbol{g : A \mapsto B}$	**P**
(2)	$\boldsymbol{f : A \mapsto C}$	**P**
(3)	$\boldsymbol{g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y)}$	**P**

Demostración de (i) :

ELD(i)

Demostrar : $\boldsymbol{h \subseteq \vec{p}_2\, g \times C}$

Traducción : (x, y)$\in h \Rightarrow$ (x, y)$\in \vec{p}_2\, g \times C$

(1)	$\boldsymbol{g : A \mapsto B}$	**P**
(2)	$\boldsymbol{f : A \mapsto C}$	**P**
(3)	$\boldsymbol{g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y)}$	**P**
(4)	$h: \vec{p}_2\, g \mapsto C \wedge f = h \circ g$	P
(5)	(x, y)$\in h$	P
(6)	$h: \vec{p}_2\, g \mapsto C$	S 4

(7)	x$\in \vec{p_2}\, g$	5,6
(8)	y$\in C$	5,6
(9)	x$\in \vec{p_2}\, g \wedge$ y$\in C$	A7,8
(10)	(x, y)$\in \vec{p_2}\, g \times C$	traducción 9
(11)	(x, y)$\in h \Rightarrow$ (x, y)$\in \vec{p_2}\, g \times C$	CP 5,10
□ (12)	$h \subseteq \vec{p_2}\, g \times C$	traducción 11

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $h \subseteq \vec{p_2}\, g \times C$

(1) (2) (3) (4) Sea h: $\vec{p_2}\, g \mapsto C$ tal que $f = h \circ g$, con $g : A \mapsto B$ y $f : A \mapsto C$.

(5) Supongamos que (x, y)$\in h$. **(6) (7) (8) (9)** Entonces x$\in \vec{p_2}\, g$ e y$\in C$; **(10)** de donde (x, y)$\in \vec{p_2}\, g \times C$. **(11) (12)** Por lo tanto $h \subseteq \vec{p_2}\, g \times C$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $h \subseteq \vec{p_2}\, g \times C$

Sea h: $\vec{p_2}\, g \mapsto C$ tal que $f = h \circ g$, con $g : A \mapsto B$ y $f : A \mapsto C$.

Supongamos

$$(x, y)\in h.$$

Entonces

$$x\in \vec{p_2}\, g \quad \text{con } y\in C;$$

Esto implica

$$(x, y)\in \vec{p_2}\, g \times C. \qquad (2.6)$$

Por lo tanto

$$h \subseteq \vec{p_2}\, g \times C$$

Demostración de (ii) : **ELD(ii)**

Demostrar $\vec{p_1}\, h = \vec{p_2}\, g$

Traducción : x$\in \vec{p_1}\, h \Leftrightarrow$ x$\in \vec{p_2}\, g$

(1)	$\boldsymbol{g : A \mapsto B}$	**P**

(2)	$\boldsymbol{f : A \mapsto C}$	**P**
(3)	$\boldsymbol{g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y)}$	**P**
(4)	$h\!: \vec{p}_2\, g \mapsto C \wedge f = h \circ g$	P
$\Rightarrow$)(5)	$x \in \vec{p}_1\, h$	P
(6)	$(x, y) \in h$ p.a.y	I trad.5, 2,12
(7)	$h \subseteq \vec{p}_2\, g \times C$	I 6, ELD (i)
(8)	$(x, y) \in \vec{p}_2\, g \times C$	6, 7
(9)	$x \in \vec{p}_2\, g \wedge y \in C$	I trad.8, 2.6
(10)	$x \in \vec{p}_2\, g$	S 9
□$_1$(11)	$x \in \vec{p}_1\, h \Rightarrow x \in \vec{p}_2\, g$	CP 5,10
$\Leftarrow$) (12)	$x \in \vec{p}_2\, g$	P
(13)	$(y, x) \in g$ p.a.y	traducción 12
(14)	$x = g(y)$	traducción 13
(15)	$f(y) = (h \circ g)(y)$	4
(16)	$f(y) = h(g(y))$	traducción 15
(17)	$f(y) = h(x)$	I 14,16
(18)	$(x, f(y)) \in h$	traducción 17
(19)	$x \in p_1 h$	I trad.18, 2.12
□$_2$(20)	$x \in \vec{p}_2\, g \Rightarrow x \in \vec{p}_1\, h$	CP 12,19
(21)	$x \in \vec{p}_1\, h \Leftrightarrow x \in \vec{p}_2\, g$	LB 11,20
□ (22)	$\vec{p}_1\, h = \vec{p}_2\, g$	traducción 21

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{p}_1\, h = \vec{p}_2\, g$.

(4)*Sea* $h\!: \vec{p}_2\, g \mapsto C$ tal que $f = h \circ g$. **(5)**Supongamos que $x \in \vec{p}_1\, h$.

(6) Entonces $(x, y) \in h$ para algún y . **(7) (8)**Debido a que $h \subseteq \vec{p}_2\, g \times C$ (por (i)), $(x, y) \in \vec{p}_2\, g \times C$; **(9)** es decir**,** $x \in \vec{p}_2\, g$ e $y \in C$. **(10)**En particular $x \in \vec{p}_2\, g$. **(11)**Así que se tiene la implicación :

$$x \in \vec{p}_1\, h \Rightarrow x \in \vec{p}_2\, g \qquad (\mathrm{I})$$

(12) Sea ahora $x\in \overrightarrow{p_2}\, g$. **(13)** Entonces (y, x)$\in g$ para algún y. **(14)** **(15)** **(16)** Expresando esto en la forma x = g(y), por construcción de h, f (y) = h(g(y)); **(17)** es decir f (y) = h(x). **(18)** O sea (x, f(y))$\in h$. **(19)**Esto significa que $x\in \overrightarrow{p_1}\, h$. **(20)** Por tanto, también se tiene la implicación:

$$x\in \overrightarrow{p_2}\, g \Rightarrow x\in \overrightarrow{p_1}\, h \qquad (\text{ II })$$

(21) De (I) y (II) se tiene $x\in \overrightarrow{p_1}\, h \Leftrightarrow x\in \overrightarrow{p_2}\, g$. **(22)** O sea $p_1 h = \overrightarrow{p_2}\, g$. □

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overrightarrow{p_1}\, h = \overrightarrow{p_2}\, g$.

Sea h: $\overrightarrow{p_2}\, g \mapsto C$ tal que $f = h\circ g$.

Supongamos

$$x\in \overrightarrow{p_1}\, h.$$

Entonces

$$(x, y)\in h \quad p.a.\ y .$$

Debido a que

$$h \subseteq \overrightarrow{p_2}\, g \times C \qquad \text{(por (i))},$$

entonces

$$(x, y)\in \overrightarrow{p_2}\, g \times C .$$

Esto quiere decir que $x\in \overrightarrow{p_2}\, g$ y $y\in C$. En particular $x\in \overrightarrow{p_2}\, g$. Así que se tiene la implicación :

$$x\in \overrightarrow{p_1}\, h \Rightarrow x\in \overrightarrow{p_2}\, g \qquad (\text{ I })$$

Sea ahora $x\in \overrightarrow{p_2}\, g$. Entonces (y, x)$\in g$ para algún y. Expresando esto en la forma x = g(y), por construcción de h, f (y) = h(g(y)); es decir que f (y) = h(x). O sea que (x, f(y))$\in h$. Esto significa que $x\in \overrightarrow{p_1}\, h$. Por tanto, también se tiene la implicación:

$$x\in \overrightarrow{p_2}\, g \Rightarrow x\in \overrightarrow{p_1}\, h \qquad (\text{ II })$$

De (I) y (II) se tiene $x\in \overrightarrow{p_1}\, h \Leftrightarrow x\in \overrightarrow{p_2}\, g$. O sea $\overrightarrow{p_1}\, h = \overrightarrow{p_2}\, g$. □

Demostración de (iii) :

ELD(iii)

Demostrar : (x, y)$\in h$ $\wedge$ (x, z)$\in h \Rightarrow$ y = z

(1)	$g : A \mapsto B$	**P**
(2)	$f : A \mapsto C$	**P**
(3)	$g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$	**P**
(4)	$h: \vec{p}_2\, g \mapsto C \wedge f = h \circ g$	**P**
(5)	(x, y)$\in h$ $\wedge$ (x, z)$\in h$	P
(6)	x$\in \vec{p}_1\, h$	I 5, 2.12
(7)	$\vec{p}_1\, h = \vec{p}_2\, g$	(ii)
(8)	x$\in \vec{p}_2\, g$	I 6,7
(9)	$(\exists$ u,v)[(g(u) = x $\wedge$ y = h(x)) $\wedge$ (g(v) = x $\wedge$ z = h(x))]	5,8
(10)	g(u) = g(v)	9
(11)	g(u) = g(v) $\Rightarrow$ f(u) = f(v)	3
(12)	f(u) = f(v)	PP 11,10
(13)	h(g(u)) = h(g(v))	I 4,12
(14)	y = h(x) = h(g(u))	5,9
(15)	z = h(x) = h(g(v))	5,9
(16)	y = z	13,14,15
□ (17)	(x, y)$\in h$ $\wedge$ (x, z)$\in h \Rightarrow$ y = z	CP 5,16

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que *h* es una realción funcional.

(5) Sea (x, y)$\in h$ $\wedge$ (x, z)$\in h$. **(6)** Entonces x$\in \vec{p}_1\, h$. **(7) (8)**Debido a que $\vec{p}_1\, h = \vec{p}_2\, g$ entonces x$\in \vec{p}_2\, g$. **(9)**Por lo tanto g(u) = x tal que y = h(x)) y g(v) = x tal que z = h(x) para algunos u y v; **(10)**de donde g(u) = g(v)**.** **(11) (12)**Por la condición de la hipótesis g(u) = g(v) $\Rightarrow$ f(u) = f(v), se tiene la igualdad f(u) = f(v). **(13) (14) (15)**Por construcción de *h*, se tienen las igualdades:

h(g(u)) = h(g(v))
y = h(x) = h(g(u))
z = h(x) = h(g(v))**,**

(16)de donde se obtiene que y = z . Por lo tanto *h* es una relación funcional.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que h es una relación funcional.

Sea $(x, y) \in h \;\wedge\; (x, z) \in h$. Entonces $x \in \overrightarrow{p_1} h$. Debido a que $\overrightarrow{p_1} h = \overrightarrow{p_2} g$, entonces $x \in \overrightarrow{p_2} g$ Por lo tanto g(u) = x tal que y = h(x) y g(v) = x tal que z = h(x) para algunos u y v; de donde g(u) = g(v)**.** Por la condición de la hipótesis $g(u) = g(v) \Rightarrow f(u) = f(v)$, se tiene la igualdad f(u) = f(v). Por construcción de h, se tienen las igualdades:

$$h(g(u)) = h(g(v))$$
$$y = h(x) = h(g(u))$$
$$z = h(x) = h(g(v)),$$

de donde se obtiene que y = z . Por lo tanto h es una relación funcional.

Demostración de (a) en el sentido ⇒) :

ELD

Demostrar : $g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$

(1) $g : A \mapsto B$		**P**
(2) $f : A \mapsto C$		**P**
(3) $\exists h : \overrightarrow{p_2} g \mapsto C$ ***tal que*** $f = h \circ g$		**P**
(4)	$g(x) = g(y)$	P
(5)	$h(g(x)) = h(g(y))$	4
(6)	$f(x) = f(y)$	5,3
□ (7) $g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$		CP 4,6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$.

(4) Sea $g(x) = g(y)$. **(5)** Entonces $h(g(x)) = h(g(y))$. **(6)** Como $f = h \circ g$ (hipótesis), $f(x) = f(y)$. **(7)**Luego $g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$.

Sea $g(x) = g(y)$. Entonces $h(g(x)) = h(g(y))$. Como $f = h \circ g$ (hipótesis), $f(x) = f(y)$. Luego $g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$.

3. Sea $B \subseteq A$. Definimos la función de inclusión , $E_B : B \mapsto A$ por $E_B x = x$ para cada $x \in B$.

(*i*) *Si* $B = A$, $E_B = I_A$
(ii) $f|_B = f \circ E_B$ *para cualquier* $f : A \mapsto C$

Demostración de (i) :

ELD

Demostrar : $\boldsymbol{B = A \Rightarrow E_B = I_A}$

(1)	$\boldsymbol{B \subseteq A}$	**P**
(2)	$\boldsymbol{E_B : B \mapsto A}$	**P**
(3)	$\boldsymbol{E_B x = x , \forall x \in B}$	**P**
(4)	$B = A$	P
(5)	$E_B x = E_A x = x , \forall x \in A$	3, 4
(6)	$E_A x = x = I_A x , \forall x \in A$	P
(7)	$E_B x = I_A x , \forall x \in A$	I 5,6
(8)	$E_B = I_A$	7
□ (9)	$B = A \Rightarrow E_B = I_A$	CP4,8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $E_B = I_A$.
(3) $E_B x = x, \forall x \in B$. **(4) (5)** Como $B = A$, $E_B x = E_A x = x, \forall x \in A$. **(6) (7)** Pero como $E_A x = x = I_A x$, $E_B x = I_A x$. **(8)** Es decir $E_B = I_A$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $E_B = I_A$.

$E_B x = x, \forall x \in B$. Como $B = A$, $E_B x = E_A x = x, \forall x \in A$.
Pero $E_A x = x = I_A x$, luego $E_B x = I_A x$. Es decir $E_B = I_A$.

Demostración de (ii) :

ELD

Demostrar : $\boldsymbol{f|_B = f \circ E_B}$

(1) $\boldsymbol{B \subseteq A}$ **P**

	(2) $\boldsymbol{f: A \mapsto C}$	**P**
	(3) $f\,|_B\, x = f(x)\ ,\ \ \forall\, x \in B$	3.10
	(4) $E_B\, x = x\ , \forall\, x \in B$	func. inclusión
	(5) $f\,|_B\, x = f(E_B\, x)\ , \forall\, x \in B$	I 3,4
	(6) $f\,|_B\, x = (f \circ E_B)(x)\ , \forall\, x \in B$	traducción 5
□	(7) $f\,|_B = f \circ E_B$	traducción 6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2) Sean $B \subseteq A$ y f una función cualquiera de A en C. **(3)** $f\,|_B\, x = f(x)$ para cada $x \in B$ (3.10). **(4) (5)** Esta igualdad es equivalente a $f\,|_B\, x = f(E_B\, x)$ para cada $x \in B$, siendo E_B la función de inclusión. **(6) (7)**Pero esta última igualdad no es otra cosa que $f\,|_B = f \circ E_B$.□

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sean $B \subseteq A$ y f una función cualquiera de A en C. Entonces $f|_B\, x = f(x)$ para cada $x \in B$. Esta igualdad es equivalente a $f|_B\, x = f(E_B\, x)$ para cada $x \in B$, siendo E_B la función de inclusión. Pero esta última igualdad no es otra cosa que $f|_B = f \circ E_B$.

3. IMÁGENES DIRECTAS E INVERSAS

3.15 Defínción : Sea $f: A \mapsto B$, $C \subseteq A$, $D \subseteq B$

$$\vec{f}\, C = \{\, y \,/\, \exists\, x \in C\ (y = fx)\}$$

$$\overleftarrow{f}\, D = \{x \,/\, x \in A \wedge fx \in D\}$$

$\vec{f}$ C se llama la **imagen directa de C** y sus elementos tienen la siguiente caracterización:

$$y \in \vec{f}\, C \Leftrightarrow \exists\, x \in C : y = f\,(x)$$

$\overleftarrow{f}\, D$ **la imagen indirecta de** D y sus elementos tienen la siguiente caracterización :

$$x \in \overleftarrow{f}\, D \Leftrightarrow f\,(x) \in C$$

$\vec{f}\{a\}$ y $\overleftarrow{f}\{b\}$ lo escribiremos $\vec{f}a$ y $\overleftarrow{f}b$ a no ser que se puedan presentar confusiones. Obsérvese que $\vec{f}\{a\} = \{fa\}$.

Ejemplo : Considere la función (1) de la sección 1. Si llamamos f a esta función :

$$\vec{f}\{1,2\} = \{a, b\},\ \vec{f}1 = \{a\},\ \vec{f}\{3\} = \{b\},$$
$$\overleftarrow{f}\{a,b\} = \overleftarrow{f}\{a,b,c\} = \{1, 2, 3\},\ \overleftarrow{f}c = \varnothing$$

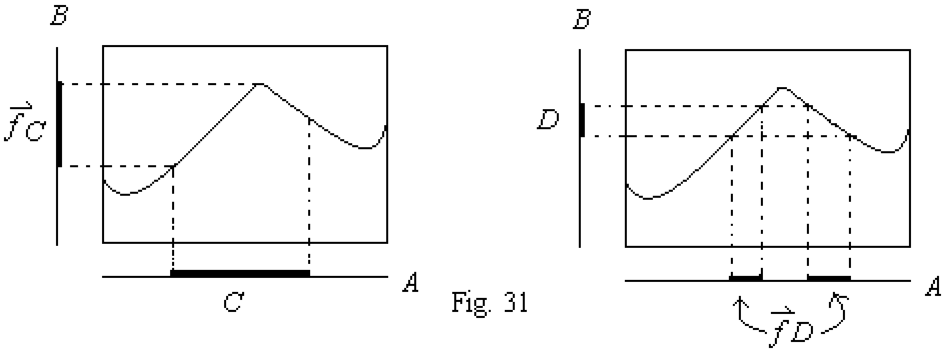


Fig. 31

3.16 Proposición : Sea $f: A \mapsto B$

(i) $\vec{f}C \subseteq B$ (iv) $\overleftarrow{f}B = A$

(ii) $\overleftarrow{f}D \subseteq A$ (v) $C_1 = C_2 \Rightarrow C_1 = \vec{f}C_2$

(ii) $\vec{f}A = \vec{p}_2 f$ (vi) $D_1 = D_2 \Rightarrow \overleftarrow{f}D_1 = \overleftarrow{f}D_2$

Demostración de (i) :

ELD

Demostrar $\vec{f}(C) \subseteq B$

Traducción : $y \in \vec{f}C \Rightarrow y \in B$

(1)	$f: A \mapsto B$	P
(2)	$y \in \vec{f}C$	P
(3)	$\exists x \in C : y = f(x)$	I trad.2, 3.15
(4)	$y \in B$	1,3
(5)	$y \in \vec{f}C \Rightarrow y \in B$	CP 2,4
□(6)	$\vec{f}(C) \subseteq B$	I Trad.5, 1.3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $\vec{f}(C) \subseteq B$.

(2) Sea $y \in \vec{f}\,C$. **(3)**Entonces $\exists\, x \in C$: $y = f(x)$ (1.6(ii)). **(4)**Como f es una función de A en B, entonces $y \in B$. **(5)** **(6)**De donde $\vec{f}(C) \subseteq B$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $\vec{f}(C) \subseteq B$.

Sea $y \in \vec{f}\,C$. Entonces $\exists\, x \in C$: $y = f(x)$ (1.6(ii)). Como f es una función de A en B, entonces $y \in B$. De donde $\vec{f}(C) \subseteq B$.

(ii) **ELD**

Demostrar $\overleftarrow{f}\,D \subseteq A$

Traducción : $x \in \overleftarrow{f}\,D \Rightarrow x \in A$

(1)	$f: A \mapsto B$	P
(2)	$x \in \overleftarrow{f}\,D$	P
(3)	$y = f(x) \in D$	I trad.2, 3.15
(4)	$D \subseteq B$	P
(5)	$y = f(x) \in B$	3,4
(6)	$x \in A$	1,5, 3.15
(7)	$x \in \overleftarrow{f}\,D \Rightarrow x \in A$	CP 2,6
□(8)	$\overleftarrow{f}\,D \subseteq A$	I Trad.7, 1.3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overleftarrow{f}\,D \subseteq A$.

(2) Sea $x \in \overleftarrow{f}\,D$. **(3)** Por 3.15, $y = f(x) \in D$. **(4)** **(5)** Como $D \subseteq B$, $f(x) \in B$. **(6)**Como f es una función de A en B, $x \in A$. **(7)** **(8)** O sea $\overleftarrow{f}\,D \subseteq A$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overleftarrow{f}\,D \subseteq A$.

Sea x$\in \overleftarrow{f}\,D$. Por 3.15, y = f (x)$\in D$. Como $D \subseteq B$, f (x)$\in B$. Como f es una función de A en B, x$\in A$. O sea $\overleftarrow{f}\,D \subseteq A$.

(iii) :

ELD

Demostrar $\overrightarrow{f}\,(A) = \overrightarrow{p_2}\,f$

Traducción : y$\in \overrightarrow{f}\,(A) \Leftrightarrow$ y$\in \overrightarrow{p_2}\,f$

y$\in \overrightarrow{f}\,(A)$	$\Leftrightarrow \exists$ x$\in A$: y = f (x)	3.15
	$\Leftrightarrow \exists$ x$\in A$: (x, y)$\in f$	traducción
	$\Leftrightarrow$ y$\in \overrightarrow{p_2}\,f$	2.12

Demostración de (iv) :

ELD

Demostrar $B = A$

Traducción : $\overleftarrow{f}\,B \subseteq A \wedge A \subseteq \overleftarrow{f}\,B$

Por (ii), $\overleftarrow{f}\,B \subseteq A$.

Demostremos $A \subseteq \overleftarrow{f}\,B$

ELD

Demostrar $A \subseteq \overleftarrow{f}\,B$

Traducción : x$\in A \Rightarrow$ x$\in \overleftarrow{f}\,B$

(1)	f: $A \mapsto B$	P
(2)	x$\in A$	P
(3)	y = f (x)$\in$B	1, 2 , 3.15
(4)	x$\in \overleftarrow{f}$ (B)	trad.3 ,3.15
(5)	x$\in A \Rightarrow$ x$\in \overleftarrow{f}\,(B)$	CP 2,4
(6)	$A \subseteq \overleftarrow{f}\,B$	traducción 5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $A \subseteq \overleftarrow{f}\,B$.

(2) Sea x$\in A$. **(3)** Por 3.15 y por hipótesis, y $= f$ (x)$\in B$. **(4)**De donde x$\in \overleftarrow{f}$ (B) (3.15) . **(5)** **(6)** Así que $A \subseteq \overleftarrow{f} B$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $A \subseteq \overleftarrow{f} B$.

Sea x$\in A$. Por 3.15 y por hipótesis, y $= f$ (x)$\in B$. De donde x$\in \overleftarrow{f}$ (B) (3.15) .Así que $A \subseteq \overleftarrow{f} B$.

(v) :

ELD

Demostrar $\overrightarrow{f}\, \boldsymbol{C_1} = \overrightarrow{f}\, \boldsymbol{C_2}$

Traducción : y$\in \overrightarrow{f}\, C_1 \Leftrightarrow$ y$\in \overrightarrow{f}\, C_2$

(1) $\boldsymbol{C_1 = C_2}$ **P**

y$\in \overrightarrow{f}\, C_1$	$\Leftrightarrow \exists$ x$\in$C$_1$: y $= f$ (x)	(3.15)
	$\Leftrightarrow \exists$ x$\in$C$_2$: y $= f$ (x)	$C_1 = C_2$
	$\Leftrightarrow$ y$\in \overrightarrow{f}$ C$_2$	(3.15)

Demostración de (vi) : similar a (v).

Sea f: $A \mapsto B$ .Para cada C$\in \mathcal{P}$(A), $\overrightarrow{f}\, C \in \mathcal{P}$(B) y teniendo en cuenta (v) de la proposición anterior resulta que $\overrightarrow{f} : \mathcal{P}(A) \mapsto \mathcal{P}(B)$ es una función.

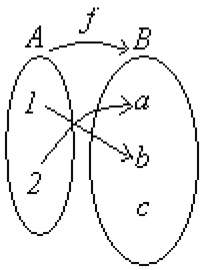
Similarmente para cada $D \in \mathcal{P}$(B), $\overleftarrow{f}\, D \in \mathcal{P}$(A) y por (vi) se tiene la función $\overleftarrow{f} : \mathcal{P}(B) \mapsto \mathcal{P}(A)$.

3.17 Proposición : $f\!: A \mapsto B \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{f} : \mathcal{P}(A) \mapsto \mathcal{P}(B) \\ \overleftarrow{f} : \mathcal{P}(B) \mapsto \mathcal{P}(A) \end{cases}$

Demostración :

Sea $f\colon A \mapsto B$. Para cada $C \in \mathcal{P}(A)$, $f(C) \in \mathcal{P}(B)$. O sea que $\vec{f} \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. También está claro que $\vec{p}_1\, \vec{f} = \mathcal{P}(A)$. La condición (iii) de la definición de función (3.3) también se cumple, teniendo en cuanta (v) de la proposición anterior. Por lo tanto $\vec{f}\ \colon \mathcal{P}(A) \mapsto \mathcal{P}(B)$ es una función .

Ejemplo. Tomemos la función (4) de la sección 1, función que llamaremos f .



$A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$f(\varnothing) = \varnothing$

$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{b\}$

$f(\{2\}) = \{f(2)\} = \{a\}$

(4) $f(\{1,2\}) = \{f(1), f(2)\} = \{b, a\}$

$\overleftarrow{f}\{a\} = \{2\}$ $\overleftarrow{f}\{a,b\} = \{1,2\}$

$\overleftarrow{f}\{b\} = \{1\}$ $\overleftarrow{f}\{a,b,c\} = \{1,2\}$

$1 \in \overleftarrow{f}\{a,b,c\}$ ya que $f(1) \in \{a,b,c\}$

$2 \in \overleftarrow{f}\{a,b,c\}$ ya que $f(2) \in \{a,b,c\}$

Las funciones $\vec{f}$ y $\overleftarrow{f}$ están dadas en los siguientes diagramas :

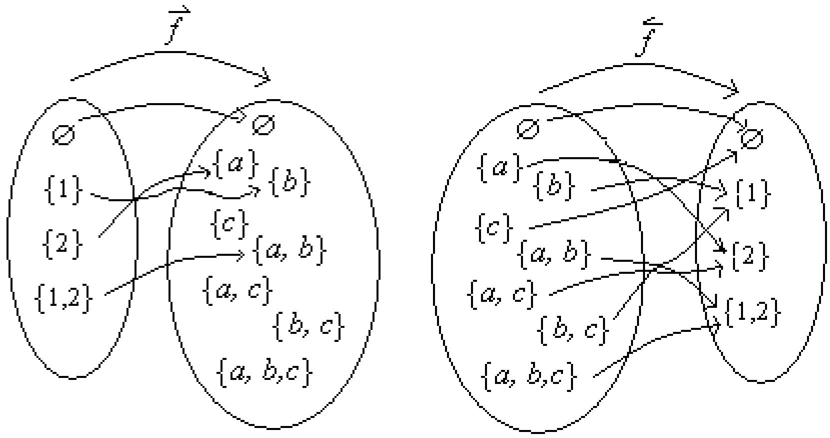


Fig. 32

3.18 Definición : $p_1(a, b) = a$ $\qquad p_2(a, b) = b$

Para conjuntos A y B cualesquiera 3.18 determina dos funciones :

$p_1\colon A \times B \mapsto A$ y $p_2\colon A \times B \mapsto B$.

Obsérvese ahora que la notación introducida en 2.12 concuerda muy bien con 3.18 y 3.15. Las funciones p_1 y p_2 se llaman respectivamente primera y segunda proyección de $A \times B$

3.19 Proposición : Sea f una función ,

(i) $\vec{f}(C_1 \cap C_2) \subseteq \vec{f}(C_1) \cap \vec{f}(C_2)$ (ii) $\vec{f}(C_1 \cup C_2) = \vec{f}(C_1) \cup \vec{f}(C_2)$

(iii) $\vec{f}(C_1) - \vec{f}(C_2) \subseteq \vec{f}(C_1 - C_2)$ (iv) $\overleftarrow{f}(D_1 \cap D_2) = \overleftarrow{f}(D_1) \cap \overleftarrow{f}(D_2)$

(v) $\overleftarrow{f}(D_1 \cup D_2) = \overleftarrow{f}(D_1) \cup \overleftarrow{f}(D_2)$ (vi) $\overleftarrow{f}(D_1 - D_2) = \overleftarrow{f} D_1 - \overleftarrow{f} D_2$

Demostración : (i) **ELD**

Demostrar $\boldsymbol{\vec{f}(C_1 \cap C_2) \subseteq \vec{f}(C_1) \cap \vec{f}(C_2)}$

Traducción : $y \in \vec{f}(C_1 \cap C_2) \Rightarrow y \in \vec{f}(C_1) \cap \vec{f}(C_2)$

(1)	$f: A \mapsto B \ \wedge \ C_1, C_2 \subseteq A$	P
(2)	$y \in \vec{f}(C_1 \cap C_2)$	P
(3)	$y = f(x)$ p.a. $x \in C_1 \cap C_2$	I . 2, 3.15
(4)	$y = f(x)$ p.a. x, $x \in C_1 \wedge x \in C_2$	I .3,1.11(i)
(5)	$y = f(x)$ p.a.$x \in C_1 \wedge y = f(x)$ p.a.$x \in C_2$	4
(6)	$y \in \vec{f}(C_1) \wedge y \in \vec{f}(C_2)$	I.5,3.15
(7)	$y \in \vec{f}(C_1) \cap \vec{f}(C_2)$	I.6,1.11(i)
(8)	$y \in \vec{f}(C_1 \cap C_2) \Rightarrow y \in \vec{f}(C_1) \cap \vec{f}(C_2)$	CP 2,7
□ (9)	$\vec{f}(C_1 \cap C_2) \subseteq \vec{f}(C_1) \cap \vec{f}(C_2)$	I.8,1.3

ELD

(iii) : **Demostrar** $\boldsymbol{\vec{f}(C_1) - \vec{f}(C_2) \subseteq \vec{f}(C_1 - C_2)}$

Traducción : $y \in \vec{f}(C_1) - \vec{f}(C_2) \Rightarrow y \in \vec{f}(C_1 - C_2)$

(1) $\boldsymbol{f: A \mapsto B \ \wedge \ C_1, C_2 \subseteq A}$ **P**

(2)	$y \in \vec{f}(C_1) - \vec{f}(C_2)$	P
(3)	$y \in \vec{f}(C_1) \wedge y \notin \vec{f}(C_2)$	I .2,1.16
(4)	$y = f(x)$ p.a.x $\in C_1 \wedge y = f(x)$ p.a. x $\notin C_2$	I .3, 3.15
(5)	$y = f(x)$ p.a. x, $x \in C_1 \wedge x \notin C_2$	4
(6)	$y = f(x)$ p.a.$x \in C_1 - C_2$	I .5,1.16
(7)	$y \in \vec{f}(C_1 - C_2)$	I.6, 3.15
(8)	$y \in \vec{f}(C_1) - \vec{f}(C_2) \Rightarrow y \in \vec{f}(C_1 - C_2)$	CP 2,7
□ (9)	$\vec{f}(C_1) - f(C_2) \subseteq \vec{f}(C_1 - C_2)$	I .8,1.3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) Sea $y \in \vec{f}(C_1) - \vec{f}(C_2)$.**(3)** Entonces $y \in \vec{f}(C_1) \wedge y \notin \vec{f}(C_2)$ (1.16). **(4)** Es decir, $y = f(x)$ p.a. x tal que $x \in C_1 \wedge x \notin C_2$ (3.15). **(5)** **(6)**O sea $y = f(x)$ p.a.$x \in C_1 - C_2$ (1.16). **(7)**De donde $y \in \vec{f}(C_1 - C_2)$ (3.15).
(8) **(9)**Luego $\vec{f}(C_1) - f(C_2) \subseteq \vec{f}(C_1 - C_2)$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea

$$y \in \vec{f}(C_1) - \vec{f}(C_2).$$

Entonces

$$y \in \vec{f}(C_1) \wedge y \notin \vec{f}(C_2) \qquad (1.16).$$

Es decir,

$$y = f(x) \quad x \in C_1 \wedge x \notin C_2 \text{ p.a. x} \quad (3.15).$$

O sea

$$y = f(x) \text{ p.a. } x \in C_1 - C_2 \qquad (1.16).$$

De donde

$$y \in \vec{f}(C_1 - C_2) \qquad (3.15).$$

Luego

$$\vec{f}(C_1) - \vec{f}(C_2) \subseteq \vec{f}(C_1 - C_2).$$

Obsérvese que las implicaciones no se pueden devolver. Si $y \in \vec{f}(C_1) \cap \vec{f}(C_2)$ entonces $y = f(x_1)$ para algún $x_1 \in C_1$, $y = f(x_2)$ para algún $x_2 \in C_2$, pero no podemos afirmar que $x_1 = x_2$

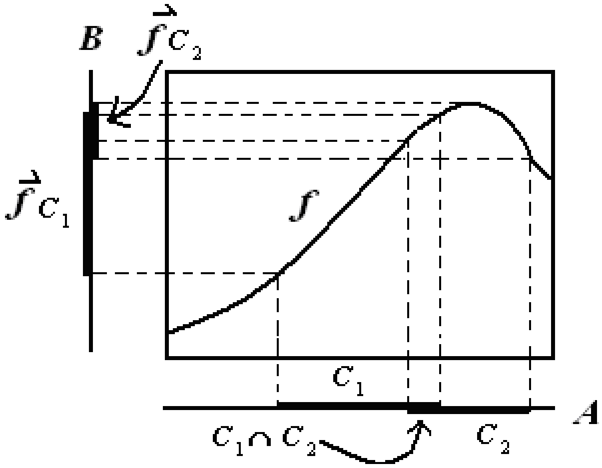


Fig. 33

(vi):

ELD

Demostrar $\overleftarrow{f}(D_1 - D_2) = \overleftarrow{f}D_1 - \overleftarrow{f}D_2$

Traducción : $x \in \overleftarrow{f}(D_1 - D_2) \Leftrightarrow x \in \overleftarrow{f}D_1 - \overleftarrow{f}D_2$

$x \in \overleftarrow{f}(D_1 - D_2) \Leftrightarrow f(x) \in D_1 - D_2$ 3.15

$\Leftrightarrow f(x) \in D_1 \wedge f(x) \notin D_2$ 1.16

$\Leftrightarrow x \in \overleftarrow{f}D_1 \wedge x \notin \overleftarrow{f}D_2$ 3.15

$\Leftrightarrow x \in \overleftarrow{f}D_1 - \overleftarrow{f}D_2$ 1.16

EJERCICIO 3.3

1. Sea $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ tal que $f(x) = x^3 - x$.

a) $f\,2 = ?$ *e*) $\vec{f}\,\mathbf{R} = ?$

b) $\vec{f}\,2 = ?$ *f*) $\overleftarrow{f}\,[0, 6] = ?$

$c)$ $\overleftarrow{f}\,0 = ?$ $g)$ $\overleftarrow{f}\,\mathbf{R} = ?$ $i\,)$ $(f \circ f\,)\,x = ?$

$d)$ $\overleftarrow{f}\,[0, 1] = ?$ $h)$ $(f \circ f\,)\,2 = ?$

.

2. Sea $f\!: A \mapsto B$

(i) $\overrightarrow{f}\,\phi = \phi$ (ii) $\overleftarrow{f}\,\phi = \phi$

(iii) $\overrightarrow{f}\,C = \phi \Rightarrow C = \phi$ (iv) $\overleftarrow{f}\,D = \phi \not\Rightarrow D = \phi$

(v) $\overleftarrow{f}\,D = \phi \Leftrightarrow D \cap \overrightarrow{p_2}\;f = \phi$

3. (i) $C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow \overrightarrow{f}\,C_1 \subseteq \overrightarrow{f}\,C_2$

(ii) $D_1 \subseteq D_2 \Rightarrow \overleftarrow{f}\,D_1 \subseteq \overleftarrow{f}\,D_2$

4. (i) $\overrightarrow{f}\,(C_1 \cap C_2) \neq \overrightarrow{f}\,C_1 \cap \overrightarrow{f}\,C_2$ (ii) $\overrightarrow{f}\,(C_1 - C_2) \neq \overrightarrow{f}\,C_1 - \overrightarrow{f}\,C_2$

5. Lo no demostrado en 3.9

6. Sea $f\!: A \mapsto B$,

(i) $C \subseteq \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C$ (ii) $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D \subseteq D$

7. (i) $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C \subseteq \overrightarrow{f}\,C$ (iii) $\overrightarrow{f} \circ \overleftarrow{f} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}$

(ii) $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D = \overleftarrow{f}\,D$ (iv) $\overleftarrow{f} \circ \overrightarrow{f} \circ \overleftarrow{f} = \overleftarrow{f}$

8. Demuestre que ni $\overrightarrow{f}\,(C') = (\,\overrightarrow{f}\,C\,)'$ ni $\overrightarrow{f}\,(C') \subseteq (\,\overrightarrow{f}\,C\,)'$ ni $(\,\overrightarrow{f}\,C\,)' \supseteq (\,\overrightarrow{f}\,C\,)'$, entendiendo los complementos con respecto a A y a B ($f\!: A \mapsto B$) .

9. Sea $f : R \mapsto R^2$, $f(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ y $g : R^2 \mapsto R$, $g(x\,,y) = x^2 + y^2$.

$a)$ $\overrightarrow{f}\,[0, \pi/2] = ?$ $b)$ $\overrightarrow{f}\,[0, \pi/4] = ?$

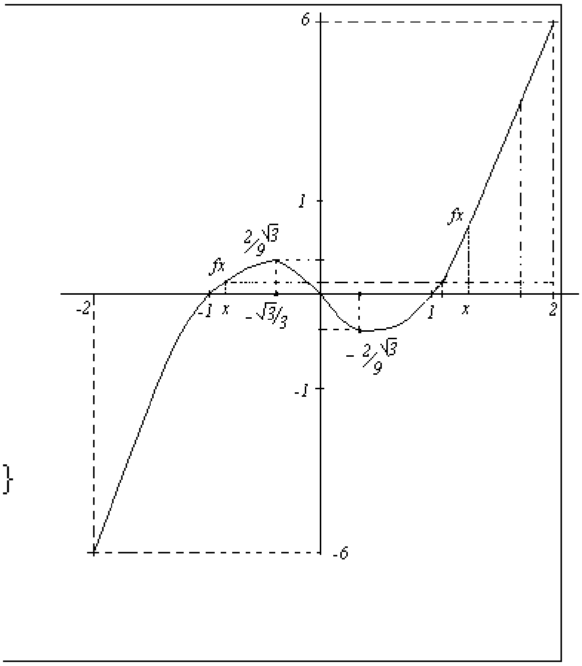
$c)$ $\overrightarrow{f}\,\mathrm{R} = ?$ $d)$ $\overleftarrow{f}\,(0, 1) = ?$

e) $\overleftarrow{g \circ f}\,1 = ?$ f) $\overleftarrow{f \circ g}\,(1,1) = ?$

g) $\overleftarrow{f}\,\{0\} \times \mathbf{R} = ?$

ACTIVIDAD PRACTICA – PROCESO IMITATIVO

1. Sea $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ tal que $f(x) = x^3 - x$.



a) $f\,2 = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$

b) $\vec{f}\,2 = \vec{f}\,\{2\} = \{f(2)\} = \{6\}$

c) $\overleftarrow{f}\,0 = \overleftarrow{f}\,\{0\} = \{x \,/\, f(x) \in \{0\}\}$

$= \{x \,/\, x^3 - x = 0\}$

$= \{-1, 0, 1\}$

d) $\vec{f}\,[0, 1] = \{y \,/\, \exists x \in [0, 1] : y = f(x)\}$

$= \left[0, -\frac{2}{9}\sqrt{3}\right]$

e) $\vec{f}\,\mathbf{R} = \mathbf{R}$

Cuando $x \mapsto 0$, $\vec{f}\,x \mapsto 0$

Cuando $x \mapsto \infty$, $\vec{f}\,x \mapsto \infty$

Cuando $x \mapsto -\infty$, $\vec{f}\,x \mapsto -\infty$

f) $\overleftarrow{f}\,[0, 6] = \{x \,/\, f(x) \in [0, 6]\}$

$= [-1, 0] \cup [1, 2]$

g) $\overleftarrow{f}\,\mathbf{R} = \mathbf{R}$

h) $(f \circ f)\,2 = f(g(2)) = f\,(2^3 - 2) = (2^3 - 2)^3 - (2^3 - 2) = 6^3 - 6 = 210$.

i) $(f \circ f)\,x = f(g(x)) = f\,(x^3 - x) = (x^3 - x)^3 - (x^3 - x)$

2 (i) :

ELD

Demostrar $\vec{f}\,\phi = \phi$

Por RAA

(1)	$\vec{f}\,\phi \neq \phi$	P
(2)	$\exists y \in \vec{f}\,\phi$	(1), 1.6(ii)

(3)	$\exists x \in \phi : y = f(x)$	trad.2, 3.15
(4)	$x \neq x$	(3), 1.5
(5) $\vec{f}\,\phi = \phi$		RAA1,4

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{f}\,\phi = \phi$.

(1) Supongamos lo contrario, es decir $\vec{f}\,\phi \neq \phi$. **(2)**Esto significa que existe $y \in \vec{f}\,\phi$ (1.6(i)); **(3)**lo que implica que existe $x \in \phi : y = f(x)$ (3.15). **(4)**Por definición de conjunto vacío, $x \neq x$. **(5)**Pero esto es una contradicción; luego, $\vec{f}\,\phi = \phi$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{f}\,\phi = \phi$.

Supongamos lo contrario, es decir $\vec{f}\,\phi \neq \phi$. Esto significa que existe $y \in \vec{f}\,\phi$ (1.6(i)); lo que implica que existe $x \in \phi : y = f(x)$ (3.15). Por definición de conjunto vacío, $x \neq x$. Pero esto es una contradicción; luego, $\vec{f}\,\phi = \phi$.

(ii) :

ELD

Demostrar $\overleftarrow{f}\,\phi = \phi$

Por RAA

(1)	$\overleftarrow{f}\,\phi \neq \phi$	P
(2)	$\exists x \in \overleftarrow{f}\,\phi$	(1), 1.6(ii)
(3)	$y = f(x) \in \phi$	trad.2, 3.15
(4)	$y \neq y$	(3), 1.5
(5) $\overleftarrow{f}\,\phi = \phi$		RAA1,4

Similar a (i).

(iii) :

ELD

Demostrar $C = \phi$

Por RAA

(1)	$\vec{f}\,C = \phi$	**P**
(2)	$C \neq \phi$	P

(3)	$\exists x \in C$	2, 1.6(ii)
(4)	$y = f(x) \in \overrightarrow{f}\,C$	3, 3.15
(5)	$\overrightarrow{f}\,C \neq \phi$	4
(6)	$\overrightarrow{f}\,C = \phi \wedge \overrightarrow{f}\,C \neq \phi$	A1,5
(7)	$C = \phi$	RAA 2,6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $C = \phi$ **(2)**Supongamos lo contrario, esto es, $C \neq \phi$. **(3)**Esto quiere decir que existe un x tal que $x \in C$. **(4)**Entonces $y = f(x) \in \overrightarrow{f}\,C$ (3.15) **(5)** o sea $\overrightarrow{f}\,C \neq \phi$. **(6)**Pero $\overrightarrow{f}\,C = \phi$ (hipótesis), **(7)**luego $C = \phi$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

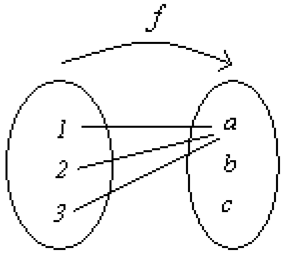
Vamos a demostrar que $C = \phi$.

Supongamos lo contrario, esto es, $C \neq \phi$. Esto quiere decir que existe un x tal que $x \in C$. Entonces $y = f(x) \in \overrightarrow{f}\,C$ (3.15) o sea $\overrightarrow{f}\,C \neq \phi$. **(6)**Pero $\overrightarrow{f}\,C = \phi$ (hipótesis), luego $C = \phi$.

(iv) $\overleftarrow{f}\,D = \phi \not\Rightarrow D = \phi$

Supongamos $\overleftarrow{f}\,D = \phi \Rightarrow D = \phi$.

Contra ejemplo :



$\overleftarrow{f}\,\{b, c\} = \phi$, pero $\{b, c\} \neq \phi$.

(v) $\overleftarrow{f} D = \phi \Leftrightarrow D \cap \overrightarrow{p_2}\, f = \phi$

Demostrar $\overleftarrow{f} D = \phi \Rightarrow D \cap \overrightarrow{p_2}\, f = \phi$

ELD

Demostrar $D \cap \overrightarrow{p_2}\, f = \phi$

Por RAA

(1)	$\overleftarrow{f} D = \phi$	P
(2)	$D \cap \overrightarrow{p_2}\, f \neq \phi$	P
(3)	$\exists y \in D \cap \overrightarrow{p_2}\, f$	I. 2, 1.6(ii)
(4)	$y \in D \wedge y \in \overrightarrow{p_2}\, f$	I.3, 1.11
(5)	$y \in \overrightarrow{p_2}\, f$	S 4
(6)	$(x, y) \in f$ p.a. x	I .5, 2.12
(7)	$y = f(x)$ p.a. x	traducción 6
(8)	$y \in D$	S4
(9)	f(x)$\in D$	I 7,8
(10)	$x \in \overleftarrow{f} D$	I .9, 3.15
(11)	$\overleftarrow{f} D \neq \phi$	I .10, 1.5
(12)	$\overleftarrow{f} D = \phi \wedge \overleftarrow{f} D \neq \phi$	A 1,11
□ (13)	$D \cap \overrightarrow{p_2}\, f = \phi$	RAA 2,12

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $D \cap \overrightarrow{p_2}\, f = \phi$.

(2) Supongamos lo contrario, esto es, $D \cap \overrightarrow{p_2}\, f \neq \phi$. **(3)**Entonces existe un y tal que $y \in D \cap \overrightarrow{p_2}\, f$; **(4)**de donde $y \in D$ y $y \in \overrightarrow{p_2}\, f$.**(5)** En particular $y \in \overrightarrow{p_2}\, f$, **(6)**esto es, $(x, y) \in f$ para algún x (2.12), **(7)**lo que significa que $y = f(x)$ para algún x . **(8)**Como $y \in D$, **(9)**entonces f(x)$\in D$ **(10)** y $x \in \overleftarrow{f} D$ (3.15) **(11)** de donde

$\overleftarrow{f} D \neq \phi$, **(12)**lo que contradice la hipótesis de que $\overleftarrow{f} D = \phi$;**(13)** luego $D \cap \overrightarrow{p_2} f = \phi$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $D \cap \overrightarrow{p_2} f = \phi$.

Supongamos lo contrario, esto es, $D \cap \overrightarrow{p_2} f \neq \phi$. Entonces existe un y tal que $y \in D \cap \overrightarrow{p_2} f$; de donde $y \in D$ y $y \in \overrightarrow{p_2} f$. En particular $y \in \overrightarrow{p_2} f$,esto es, $(x, y) \in f$ para algún x (2.12), lo que significa que $y = f(x)$ para algún x. Como $y \in D$, entonces f(x)$\in D$ y $x \in \overleftarrow{f} D$ (3.15) de donde $\overleftarrow{f} D \neq \phi$, lo que contradice la hipótesis de que $\overleftarrow{f} D = \phi$; luego $D \cap \overrightarrow{p_2} f = \phi$.

Demostración de $D \cap \overrightarrow{p_2} f = \phi \Rightarrow \overleftarrow{f} D = \phi$

ELD

Demostrar $\overleftarrow{f} D = \phi$

Por RAA

(1)	$D \cap \overrightarrow{p_2} f = \phi$	P
(2)	$\overleftarrow{f} D \neq \phi$	P
(3)	$\exists x \in \overleftarrow{f} D$	I 2, 1.6(ii)
(4)	$y = f(x) \in D$	I trad.3, 3.15
(5)	$(x, y) \in f$	traducción 4
(6)	$y \in \overrightarrow{p_2} f$	I trad.5, 2.12
(7)	$y \in D \wedge y \in \overrightarrow{p_2} f$	A 4,6
(8)	$y \in D \cap \overrightarrow{p_2} f$	I trad.6, 1.11(i)
(9)	$D \cap \overrightarrow{p_2} f \neq \phi$	I 8, 1.6(ii)
(10)	$D \cap \overrightarrow{p_2} f = \phi \wedge D \cap \overrightarrow{p_2} f \neq \phi$	A 1,9
□ (11)	$\overleftarrow{f} D = \phi$	RAA 2,10

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) Sea $\overleftarrow{f}\, D \neq \phi$. **(3)**Esto implica que existe $x \in \overleftarrow{f}\, D$ (1.6(ii)); **(4)**es decir, $y = f(x) \in D$ (3.15); **(5)**esto es, $(x, y) \in f$.**(6)** Por 2.12, $y \in \overrightarrow{p_2}\, f$.**(7) (8)** Claramente $y \in D \cap \overrightarrow{p_2}\, f$; **(9)**o sea $D \cap \overrightarrow{p_2}\, f \neq \phi$.**(10)** Pero esto contradice la hipótesis de que $D \cap \overrightarrow{p_2}\, f = \phi$.**(11)** Luego $\overleftarrow{f}\, D = \phi$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $\overleftarrow{f}\, D \neq \phi$. Esto implica que existe $x \in \overleftarrow{f}\, D$ (1.6(ii)); es decir, $y = f(x) \in D$ (3.15); esto es, $(x, y) \in f$. Por 2.12, $y \in \overrightarrow{p_2}\, f$. Claramente $y \in D \cap \overrightarrow{p_2}\, f$; o sea $D \cap \overrightarrow{p_2}\, f \neq \phi$. Pero esto contradice la hipótesis de que $D \cap \overrightarrow{p_2}\, f = \phi$. Luego $\overleftarrow{f}\, D = \phi$.

3. (i) $C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow \overrightarrow{f}\, C_1 \subseteq \overrightarrow{f}\, C_2$

ELD

Demostrar $\overrightarrow{f}\, C_1 \subseteq \overrightarrow{f}\, C_2$

Traducción $y \in \overrightarrow{f}\, C_1 \Rightarrow y \in \overrightarrow{f}\, C_2$

(1)	$C_1 \subseteq C_2$	P
(2)	$y \in \overrightarrow{f}\, C_1$	P
(3)	y = *f*(x) p.a. x∈C_1	I trad.2, 3.15
(4)	y = *f*(x) p.a. x∈C_2	3, 1
(5)	$y \in \overrightarrow{f}\, C_2$	I trad.4, 3.15
(6)	$y \in \overrightarrow{f}\, C_1 \Rightarrow y \in \overrightarrow{f}\, C_2$	CP 2,5
□(7)	$\overrightarrow{f}\, C_1 \subseteq \overrightarrow{f}\, C_2$	traducción 6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overrightarrow{f}\, C_1 \subseteq \overrightarrow{f}\, C_2$.

(2) Sea $y \in \overrightarrow{f} C_1$**.(3)** Por 3.15, existe x$\in C_1$ tal que y = *f*(x). **(4)**Debido a que, por hipótesis, $C_1 \subseteq C_2$**,** entonces x$\in C_2$ **(5)** y por lo tanto $y \in \overrightarrow{f} C_2$**. (6)(7)**Luego $\overrightarrow{f} C_1 \subseteq \overrightarrow{f} C_2$ **.**

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overrightarrow{f} C_1 \subseteq \overrightarrow{f} C_2$.

Sea $y \in \overrightarrow{f} C_1$**.** Por 3.15, existe x$\in C_1$ tal que y = *f*(x). Debido a que, por hipótesis, $C_1 \subseteq C_2$**,** entonces x$\in C_2$ y por lo tanto $y \in \overrightarrow{f} C_2$**.** Luego $\overrightarrow{f} C_1 \subseteq \overrightarrow{f} C_2$ **.**

3 (ii) : $D_1 \subseteq D_2 \Rightarrow \overleftarrow{f} D_1 \subseteq \overleftarrow{f} D_2$

ELD

Demostrar $\overleftarrow{f} D_1 \subseteq \overleftarrow{f} D_2$

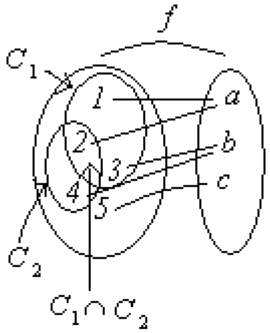
Traducción $x \in \overrightarrow{f} D_1 \Rightarrow x \in \overrightarrow{f} D_2$

	(1) $D_1 \subseteq D_2$		P
	(2)	$x \in \overrightarrow{f} D_1$	P
	(3)	y = *f*(x)$\in D_1$	trad.2, 3.15
	(4)	y = *f*(x) $\in D_2$	(3),(1)
	(5)	$x \in \overrightarrow{f} D_2$	trad.4, 3.15
	(6) $x \in \overrightarrow{f} D_1 \Rightarrow x \in \overrightarrow{f} D_2$		CP 2,5
□	(7) $\overleftarrow{f} D_1 \subseteq \overleftarrow{f} D_2$		traducción 6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(Similar 3(i))

Demostración de 4 (i): $\overrightarrow{f}(C_1 \cap C_2) \neq \overrightarrow{f} C_1 \cap \overrightarrow{f} C_2$



$C_1 \cap C_2 = \{2\}$

$\overrightarrow{f}(C_1 \cap C_2) = \{a\}$

$\overrightarrow{f}\, C_1 = \{a, b\}$

$\overrightarrow{f}\, C_2 = \{a, b\}$

$\overrightarrow{f}\, C_1 \cap \overrightarrow{f}\, C_2 = \{a, b\} \cap \{a, b\} = \{a, b\}$

$\therefore\ \overrightarrow{f}(C_1 \cap C_2) \neq \overrightarrow{f}\, C_1 \cap \overrightarrow{f}\, C_2$

(ii) $\overrightarrow{f}(C_1 - C_2) \neq \overrightarrow{f}\, C_1 - \overrightarrow{f}\, C_2$

$C_1 - C_2 = \{1, 3\}$, entonces $\overrightarrow{f}(C_1 - C_2) = \{a, b\}$

$\overrightarrow{f}\, C_1 = \{a, b\}$, entonces $\overrightarrow{f}\, C_2 = \{a, b\}$,

$\overrightarrow{f}\, C_1 - \overrightarrow{f}\, C_2 = \{a, b\} - \{a, b\} = \varnothing$

$\therefore\ \overrightarrow{f}(C_1 - C_2) \neq \overrightarrow{f}\, C_1 - \overrightarrow{f}\, C_2$

5. Sea $f\colon A \mapsto B$,

(i) $C \subseteq \overleftarrow{f}\, \overrightarrow{f}\, C$

ELD

Demostrar $C \subseteq \overleftarrow{f}\, \overrightarrow{f}\, C$

Traducción $x \in C \Rightarrow x \in \overleftarrow{f}\, \overrightarrow{f}\, C$

(1)	Sea $f\colon A \mapsto B$	P
(2)	$x \in C$	P
(3)	$y = f(x) \in \overrightarrow{f}\, C$	(2), 3.15
(4)	$x \in \overleftarrow{f}\, \overrightarrow{f}\, C$	(3), 3.15
(5)	$x \in C \Rightarrow x \in \overleftarrow{f}\, \overrightarrow{f}\, C$	CP 2,4
□(6)	$C \subseteq \overleftarrow{f}\, \overrightarrow{f}\, C$	traducción 5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $C \subseteq \overleftarrow{f}\, \overrightarrow{f}\, C$.

(2) Sea $x \in C$. **(3)**Por 3.15, $y = f(x) \in \overrightarrow{f}\,C$. **(4)** Nuevamente por 3.15, $x \in \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C$. **(5)** **(6)**Por lo tanto, $C \subseteq \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $C \subseteq \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C$.

Sea $x \in C$. Por 3.15, $y = f(x) \in \overrightarrow{f}\,C$. Nuevamente por 3.15, $x \in \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C$.

Por lo tanto, $C \subseteq \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C$.

(ii) $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D \subseteq D$

ELD

Demostrar $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D \subseteq D$

Traducción $y \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D \Rightarrow y \in D$

(1)	**Sea** $f: A \mapsto B$	**P**
(2)	$y \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D$	P
(3)	$y = f(x) \wedge x \in \overleftarrow{f}\,D$	I trad.2, 3.15
(4)	$y = f(x) \in D$	I trad.3, 3.15
(5)	$y \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D \Rightarrow y \in D$	CP 2,4
□ (6)	$\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D \subseteq D$	traducción 5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(Similar a (i))

Vamos a demostrar que $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D \subseteq D$.

(2) Sea $y \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D$. **(3)**Entonces existe x tal que $y = f(x) \wedge x \in \overleftarrow{f}\,D$ (3.15) **(4)** **(5)(6)** o sea que $y = f(x) \in D$ (3.15).

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D \subseteq D$.

Sea $y \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D$. Entonces existe x tal que $y = f(x) \wedge x \in \overleftarrow{f}\,D$ (3.15) o sea que $y = f(x) \in D$ (3.15).

7. (i) $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C=\overrightarrow{f}\,C$

ELD

Demostrar $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C=\overrightarrow{f}\,C$

Traducción : $y\in\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C\Leftrightarrow y\in\overrightarrow{f}\,C$

$y\in\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C\Leftrightarrow\exists x\in\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C : y=f(x)$ 3.15

$\Leftrightarrow y=f(x)\in\overrightarrow{f}\,C$ 3.15

$\Leftrightarrow y\in\overrightarrow{f}\,C$

(ii) $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D=\overleftarrow{f}\,D$

ELD

Demostrar $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D=\overleftarrow{f}\,D$

Traducción : $x\in\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D\Leftrightarrow x\in\overleftarrow{f}\,D$

(1) P

$x\in\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D\Leftrightarrow y=f(x)\in\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D$ 3.15

$\Leftrightarrow x\in\overleftarrow{f}\,D\wedge y=f(x)$ 3.15

(iii) $\overrightarrow{f}\circ\overleftarrow{f}\circ\overrightarrow{f}=\overrightarrow{f}$

ELD

Demostrar $\overrightarrow{f}\circ\overleftarrow{f}\circ\overrightarrow{f}=\overrightarrow{f}$

Traducción : $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C=\overrightarrow{f}\,C$

(1) P

$\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C\subseteq\overrightarrow{f}\,C$ se realiza por 7 (i) .

Veamos que $\overrightarrow{f}\,C\subseteq\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C$

ELD

Demostrar $\overrightarrow{f}C \subseteq \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}C$

Traducción $y \in \overrightarrow{f}C \Rightarrow y \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}C$

(1)	Sea $f: A \mapsto B$	P
(2)	$y \in \overrightarrow{f}C$	P
(3)	$y = f(x)\, p.a. x \in C$	I trad.2, 3.15
(4)	$x \in \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}C$	I trad.3, 3.15
(5)	$y = f(x) \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}C$	I trad.4, 3.15
(6)	$y \in \overrightarrow{f}C \Rightarrow y \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}C$	CP 2,5
□ (7)	$\overrightarrow{f}C \subseteq \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}C$	traducción 6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $\overrightarrow{f}C \subseteq \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}C$.

(2) Sea $y \in \overrightarrow{f}C$.**(3)**Por 3.15 existe $x \in C$ tal que $y = f(x)$.**(4)** Nuevamente por 3.15, $x \in \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}C$. **(5)**Aplicando una vez más 3.15, tenemos que $y = f(x) \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}C$. **(6) (7)**Luego $\overrightarrow{f}C \subseteq \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}C$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $\overrightarrow{f}C \subseteq \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}C$.

Sea $y \in \overrightarrow{f}C$. Por 3.15 existe $x \in C$ tal que $y = f(x)$. Nuevamente por 3.15, $x \in \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}C$. Aplicando una vez más 3.15 , tenemos que $y = f(x) \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}C$. Luego $\overrightarrow{f}C \subseteq \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}C$.

(iv) $\overleftarrow{f} \circ \overrightarrow{f} \circ \overleftarrow{f} = \overleftarrow{f}$

ELD

Demostrar $\overleftarrow{f} \circ \overrightarrow{f} \circ \overleftarrow{f} = \overleftarrow{f}$

Traducción : $\overleftarrow{f} \circ \overrightarrow{f} \circ \overleftarrow{f}\, D = \overleftarrow{f}\, D, \forall D$

$\overleftarrow{f} \circ \overrightarrow{f} \circ \overleftarrow{f}\, D = \overleftarrow{f}\, D$ se raliza por (ii)

8. Demuestre que ni $\overrightarrow{f}$ (C´) = ($\overrightarrow{f}$ C)´ ni $\overrightarrow{f}$ (C´) $\subseteq$ ($\overrightarrow{f}$ C)´ ni ($\overrightarrow{f}$ C)´ $\supseteq$ ($\overrightarrow{f}$ C)´, entendiendo los complementos con respecto a A y a B ($f: A \mapsto B$) .

9. Sea $f : R \mapsto R^2$, $f(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ y $g : R^2 \mapsto R$, $g(x, y) = x^2 + y^2$.

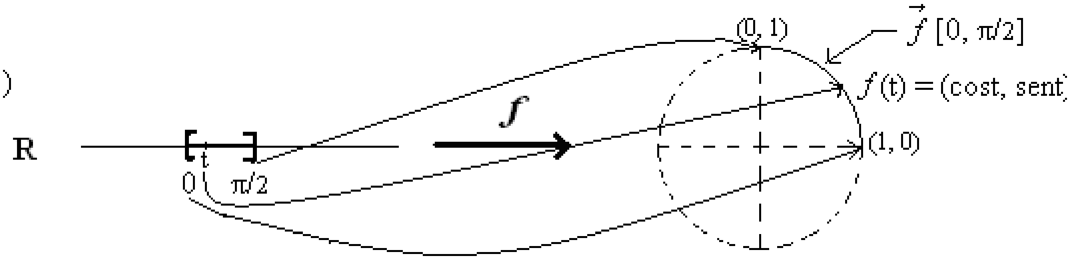
a) $\overrightarrow{f}$ [0, π/2] = ? *b*) $\overrightarrow{f}$ [0, π/4] = ?

c) $\overrightarrow{f}$ R= ? *d*) $\overleftarrow{f}$ (0, 1) = ?

e) $\overleftarrow{g \circ f}\, 1$ = ? f) $\overleftarrow{f \circ g}\,(1,1)$ = ?

g) $\overleftarrow{f}$ {0}×**R** = ?

a)

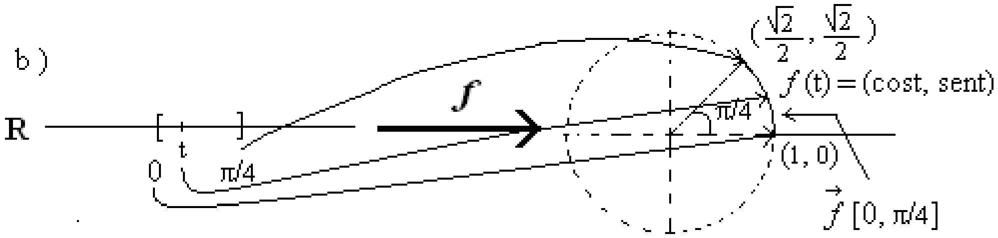


(cos0, sen0) = (1, 0) (cos π/2 , sen π/2) = (0, 1)

$\overrightarrow{f}$ [0, π/2] = {f(t)/ t∈[0, π/2]}

= {(cost, sent) / $0 \le t \le \pi/2$ }

b)



(cos0, sen0) = (1, 0) (cos π/4 , sen π/4) = ($\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

$\overrightarrow{f}$ [0, π/4] = {f(t)/ t∈[0, π/4]}

= {(cost, sent) / $0 \le t \le \pi/4$ }

c) $\overrightarrow{f}\,\mathrm{R} = \{f(t) \,/\, t \in \mathrm{R}\}$

$= \{(\cos t, \operatorname{sen} t) \,/\, t \in \mathrm{R}\}$

Haciendo $x = \cos t$ $\quad y = \operatorname{sen} t$,

$\overrightarrow{f}\,\mathrm{R} = \{(x, y) \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$.

d) $\overleftarrow{f}\,(0, 1) = \{t \,/\, f(t) \in \{(0, 1)\}\}$

$= \{t \,/\, (\cos t, \operatorname{sen} t) \in \{(0, 1)\}\}$

$= \{0\}$

e) $\overleftarrow{g \circ f}\, 1 = \{t \,/\, (g \circ f)(t) \in \{1\}\}$

$= \{t \,/\, (g \circ f)(t) \in \{1\}\}$

$= \{t \,/\, (g \circ f)(t) = 1\}$

$= \{t \,/\, g(f(t)) = 1\}$

$= \{t \,/\, g(\cos t, \operatorname{sen} t) = 1\}$

$= \{t \,/\, \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1\}$

$= \mathbf{R}$

$$
\begin{array}{l}
f: \mathrm{R} \xrightarrow{\ f\ } \mathrm{R}^2 \xrightarrow{\ \ g\ \ } \mathrm{R} \\
\underbrace{t \longrightarrow (\cos t, \operatorname{sen} t) \longrightarrow \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}_{g \circ f}
\end{array}
$$

f) $\overleftarrow{f \circ g}\,(1,1) = \varnothing$

ELD

Demostrar $\overleftarrow{f \circ g}\,(1,1) = \varnothing$

Por RAA

(1)	$f: \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}^2, \quad f(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$	P
(2)	$g: \mathrm{R}^2 \longrightarrow \mathrm{R}, \quad g(x, y) = x^2 + y^2$	P
(3)	$\overleftarrow{f \circ g}\,(1,1) \neq \varnothing$	P
(4)	$\exists (x, y) \in \overleftarrow{f \circ g}(1,1)$	(3) 1.6 (ii)
(5)	$(f \circ g)(x, y) \in \{(1,1)\}$	(4), 3.15
(6)	$(f \circ g)(x, y) = (1,1)$	(5)
(7)	$(f \circ g)(x, y) = (\cos(x^2 + y^2), \operatorname{sen}(x^2 + y^2))$	(1),(2)
(8)	$\cos(x^2 + y^2) = 1 \wedge \operatorname{sen}(x^2 + y^2) = 1$	(6),(7)
(9)	$x^2 + y^2 = \arccos 1 \wedge x^2 + y^2 = \operatorname{arcsen} 1$	(8)
(10)	$x^2 + y^2 = 0 \wedge x^2 + y^2 = \pi/2$	(9)
(11)	$0 = \pi/2$	(10)
(12)	$\overleftarrow{f \circ g}\,(1,1) = \varnothing$	RAA 3,11

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(5) Supongamos lo contrario, esto es

$$\overleftarrow{f \circ g}(1,1) \neq \varnothing$$

(4) Entonces existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$(x, y) \in \overleftarrow{f \circ g}(1,1) \qquad \text{por 1.6 (ii)}$$

(5) Por (3.15),

$$(f \circ g)(x, y) \in \{(1,1)\}$$

(6) Entonces

$$(f \circ g)(x, y) = (1,1)$$

(7) Por definición de f y g,

$$f \circ g(x, y) = (\cos(x^2 + y^2), \operatorname{sen}(x^2 + y^2))$$

(8) Luego

$$\cos(x^2 + y^2) = 1 \wedge \operatorname{sen}(x^2 + y^2) = 1$$

(9) Es decir

$$x^2 + y^2 = \arccos 1 \wedge x^2 + y^2 = \operatorname{arcsen} 1$$

(10)O sea

$$x^2 + y^2 = 0 \wedge x^2 + y^2 = \pi/2,$$

(11)lo que implica que

$$0 = \pi/2.$$

(12) Por lo tanto, se demuestra que

$$\overleftarrow{f \circ g}(1,1) = \varnothing$$

g) $\overleftarrow{f}\{0\} \times \mathbf{R} = ?$

4. INYECCIONES, SOBREYECCIONES Y BIYECCIONES

Dijimos en la sección 1 que no a todo elemento del conjunto de llegada le llega una flecha y a algunos les puede llegar más de una. Si a cada uno máximo le llega una flecha, diremos que la función es inyectiva. Si a cada uno le llega por lo menos una flecha, diremos que la función es sobreyectiva. Si a cada uno le llega una y solo una flecha diremos que es biyectiva.

3.20 Definición : Sea $f : A \mapsto B$,

(i) f es **inyectiva** $\Leftrightarrow (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

(ii) f es **sobreyectiva** $\Leftrightarrow \forall y \in B \ \exists x \in A \ (f(x) = y)$

(iii) f es **biyectiva** $\Leftrightarrow$ f es inyectiva y sobreyectiva

En lugar de " f inyectiva" se dice que "f es una inyección" o que " f es uno a uno (f es 1-1)".

En lugar de " f sobreyectiva " se dice que " f es una sobreyección " o que "f establece una correspondencia biunívoca entre A y B ".

De los ejemplos de funciones en la sección 1; (3) , (4) y (5) son inyecciones; (2), (3) y (5) son biyectivas, (1) no es inyectiva ni sobreyectiva, (2) es sobreyectiva pero no inyectiva y (4) es inyectiva pero no sobreyectiva.(Véase Ejercicio 1).

La función de identidad I_A es una bisección. La función característica f_B es sobreyectiva. Toda función $f : A \mapsto B$ se puede transformar en una función sobreyectiva simplemente reduciendo el conjunto de llegada hasta obtener la función f : A $\mapsto$ $\vec{p}_2\, f$. En cambio, para transformar una función cualquiera en una inyección hay que hacer cambios más radicales, hay que achicar A y por lo tanto f. (Véase después de 3.27).

3.21 Proposición : (i) f es inyectiva $\Leftrightarrow$ ($f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$).

(ii) Sea $f : A \mapsto B$, f sobreyectiva $\Leftrightarrow$ $\vec{p}_2\, f$ = B .

Demostración (i) :

ELD

Demostrar : f es inyectiva $\Leftrightarrow$ ($f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$).

(1)	**f es inyectiva**	**P**
(2)		P

$\Rightarrow$)

ELD

Demostrar $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(1)	***f* es inyectiva**	**P**
(2)	$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$	trad.1, 3.20(i)
□(3)	$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$	contrarecíproca 2

$\Leftarrow$)

ELD

Demostrar: f es inyectiva

Traducción : $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

(1)	$\mathbf{f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$	**P**
(2)	$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$	contrarecíproca
□(3)	f es inyectiva	traducción 2

(i) La parte derecha es el contrarecíproco de la parte derecha de 3.20 (i).

Demostración de (ii) : $\Rightarrow$)

ELD

Demostrar $\vec{p}_2\, f$ **= B**

Traducción : y$\in \vec{p}_2\, f \Leftrightarrow y \in B$

	(1)	$\boldsymbol{f : A \mapsto B}$	**P**
	(2)	***f* es sobreyectiva**	**P**
$\Rightarrow$)	(3)	y$\in \vec{p}_2\, f$	P
	(4)	$\vec{p}_2\, f \subseteq B$	1
	(5)	y$\in$ B	3,4
$\square_1$	(6)	$y \in \vec{p}_2\, f \Rightarrow y \in B$	CP 3,5
$\Leftarrow$)	(7)	y$\in$B	P
	(8)	$\exists x \in A:\ fx = y$	I 2,3.20(ii)
	(9)	$y \in \vec{f}\, A$	I 8,3.15
	(10)	$\vec{f}\, A = \vec{p}_2\, f$	3.16 (iii)
	(11)	$y \in \vec{p}_2\, f$	I 9,10
$\square_2$	(12)	$y \in B \Rightarrow y \in \vec{p}_2\, f$	CP7,11
	(13)	$x \in \vec{p}_2\, f \Leftrightarrow x \in B$	LB 6,12
$\square$	(14)	$\vec{p}_2\, f$ = B	I trad.14,1.1

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $\vec{p}_2\, f$ = B demostrando su equivalencia y$\in \vec{p}_2\, f \Leftrightarrow y \in B$.

(3) Sea y$\in \vec{p}_2\, f$. **(4)** **(5)**Pero $\vec{p}_2\, f \subseteq B$ debido a que *f* es una función de *A* en *B*, luego y$\in$*B*.**(6)** Por lo tanto se tiene la implicación :

$$y \in \vec{p}_2\, f \Rightarrow y \in B \quad (\text{ I })$$

(7) Sea ahora y$\in$B. **(8)**Como *f* es sobreyectiva, existe $x \in A$ tal que $fx = y$ (3.20).

(9) Esto quiere decir que $y \in \overrightarrow{f} A$, por 3.15. **(10)**Pero $\overrightarrow{f} A = \overrightarrow{p_2} f$,**(11)** luego $y \in \overrightarrow{p_2} f$. **(12)** Así que también se tiene la implicación :

$$y \in B \Rightarrow y \in \overrightarrow{p_2} f \qquad (\text{ II })$$

(13) De (I) y (II) se tiene la equivalencia $x \in \overrightarrow{p_2} f \Leftrightarrow x \in B$.**(14)** Es decir $\overrightarrow{p_2} f$ = B.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $\overrightarrow{p_2} f$ = B, demostrando su equivalencia y$\in \overrightarrow{p_2} f \Leftrightarrow y \in B$.

Sea y$\in \overrightarrow{p_2} f$. Pero $\overrightarrow{p_2} f \subseteq B$ debido a que *f* es una función de *A* en *B*, luego y$\in$*B*. Por lo tanto se tiene la implicación :

$$y \in \overrightarrow{p_2} f \Rightarrow y \in B \qquad (\text{ I })$$

Sea ahora y$\in$B. Como *f* es sobreyectiva, existe $x \in A$ tal que $fx = y$ (3.20). Esto quiere decir que $y \in \overrightarrow{f} A$, por 3.15. Pero $\overrightarrow{f} A = \overrightarrow{p_2} f$, luego $y \in \overrightarrow{p_2} f$. Así que también se tiene la implicación :

$$y \in B \Rightarrow y \in \overrightarrow{p_2} f \qquad (\text{ II })$$

De (I) y (II) se tiene la equivalencia $x \in \overrightarrow{p_2} f \Leftrightarrow x \in B$. Es decir $\overrightarrow{p_2} f$ = B.

Demostración de (ii) : $\Leftarrow$)

ELD

Demostrar: *f* es sobreyectiva

Traducción $(\forall y \in B)(\exists x \in A : fx = y)$

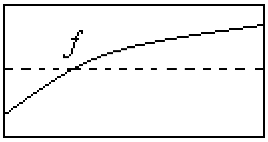
(1)	$\boldsymbol{f : A \mapsto B}$	**P**
(2)	$\overrightarrow{p_2} f$ = B	**P**
(3)	$y \in B$	P
(4)	y$\in \overrightarrow{p_2} f$	I 2,3
(5)	(x, y)$\in$*f* p.a. x$\in$A	I trad.4, 1
(6)	$\exists x \in A : fx = y$	traducción 5
(7)	$y \in B \wedge \exists x \in A : fx = y$	A 3,6
□ (8)	*f* es sobreyectiva	traducción 7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

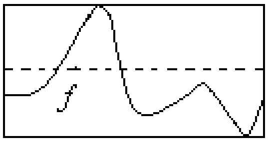
Vamos a demostrar que f es sobreyectiva. (3)Sea $y \in B$.(4) Debido a que, por hipótesis, $\vec{p}_2 f$ = B,entonces y$\in \vec{p}_2 f$.**(5)** O sea que(x, y)$\in f$ p.a. x$\in$A. **(6)**Esto equivale a decir que existe $x \in A$ tal que $fx = y$. **(7)** **(8)**Pero esta es la definición de función sobreyectiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que f es sobreyectiva.Sea $y \in B$. Debido a que, por hipótesis, $\vec{p}_2 f$ = B, entonces y$\in \vec{p}_2 f$. O sea que(x, y)$\in f$ p.a. x$\in$A. Esto equivale a decir que existe $x \in A$ tal que $fx = y$. Pero esta es la definición de función sobreyectiva.

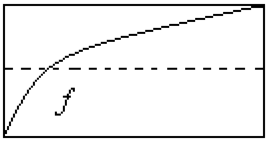


funciones inyectivas



funciones sobreyectivas

En las gráficas de las funciones inyectivas, si una horizontal cruza a la gráfica, la cruza en un solo punto. Para las sobreyectivas se puede afirmar que toda horizontal cruza la gráfica y para las biyectivas, toda horizontal cruza a la gráfica en un solo punto.



funciones biyectivas

Fig. 34

3.22 Proposición : Sea $f: A \mapsto B$. C, $C_1, C_2 \subseteq$ A

(i) f es inyectiva

$\Leftrightarrow$ (ii) $\vec{f}(C_1 \cap C_2) = \vec{f} C_1 \cap \vec{f} C_2$

$\Leftrightarrow$ (iii) $\vec{f}(C_1 - C_2) = \vec{f} C_1 - \vec{f} C_2$

$\Leftrightarrow$ (iv) $\vec{f}(\vec{p}_1 f - C) = \vec{p}_2 f - \vec{f} C$

$\Leftrightarrow$ (v) $\overleftarrow{f} \vec{f} C = C$

Demostraremos la siguiente cadena proposicional:

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i) .

Demostración : Ya hemos demostrado buena parte de este teorema.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ya sabemos que $\vec{f}(C_1 \cap C_2) \subseteq \vec{f}\, C_1 \cap \vec{f}\, C_2$ (3.19 (i)).

Nos queda por demostrar que $\vec{f}\, C_1 \cap \vec{f}\, C_2 \subseteq \vec{f}(C_1 \cap C_2)$

ELD

Demostrar $\vec{f}\, C_1 \cap \vec{f}\, C_2 \subseteq \vec{f}(C_1 \cap C_2)$

Traducción : $y \in \vec{f}\, C_1 \cap \vec{f}\, C_2 \Rightarrow y \in \vec{f}(C_1 \cap C_2)$

(1)	***f* es inyectiva**	**P**
(2)	$y \in \vec{f}\, C_1 \cap \vec{f}\, C_2$	P
(3)	$y \in \vec{f}\, C_1 \wedge y \in \vec{f}\, C_2$	I trad.2, 1.11(i)
(4)	$y = f\,x_1$ p.a. $x_1 \in C_1 \wedge y = f\,x_2$ p.a. $x_2 \in C_2$	I trad.3,3.15
(5)	$f\,x_1 = f\,x_2$	4
(6)	$f\,x_1 = f\,x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$	traducción 1
(7)	$x_1 = x_2$	PP 5,6
(8)	$y = f\,x_1$ p.a. x_1, $x_1 \in C_1 \wedge x_1 \in C_2$	I 4,7
(9)	$y = f\,x_1$ p.a. x_1, $x_1 \in C_1 \cap C_2$	I trad.8,1.11(i)
(10)	$y \in \vec{f}(C_1 \cap C_2)$	I trad.9,3.15
(11)	$\vec{f}\, C_1 \cap \vec{f}\, C_2 \Rightarrow y \in \vec{f}(C_1 \cap C_2)$	CP 2,10
□ (12)	$\vec{f}\, C_1 \cap \vec{f}\, C_2 \subseteq \vec{f}(C_1 \cap C_2)$	I trad.11,1.3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{f}\, C_1 \cap \vec{f}\, C_2 \subseteq \vec{f}(C_1 \cap C_2)$**.**

(2) Sea $y \in \vec{f}\, C_1 \cap \vec{f}\, C_2$. **(3)**Por 1.3 $y \in \vec{f}\, C_1 \wedge y \in \vec{f}\, C_2$. **(4)**Por 3.15, $y = f\,x_1$ para algún $x_1 \in C_1$ y $y = f\,x_2$ para algún $x_2 \in C_2$. **(5) (6) (7)** Como $x_1 = x_2$ (ya que $f\,x_1 = f\,x_2$ y f es inyectiva), **(8)**entonces $y = f\,x_1$ para algún x_1, con $x_1 \in C_1$ y $x_1 \in C_2$. **(9) (10)**De donde $y \in \vec{f}(C_1 \cap C_2)$**. (11) (12)**Así que $\vec{f}\, C_1 \cap \vec{f}\, C_2 \subseteq \vec{f}(C_1 \cap C_2)$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{f}\,C_1 \cap \vec{f}\,C_2 \subseteq \vec{f}(C_1 \cap C_2)$.

Sea y$\in \vec{f}\,C_1 \cap \vec{f}\,C_2$. Por 1.3 $y \in \vec{f}\,C_1 \wedge y \in \vec{f}\,C_2$. Por 3.15, y = $f\,x_1$ para algún $x_1 \in C_1$ y y = $f\,x_2$ para algún $x_2 \in C_2$.

Como $x_1 = x_2$ (ya que $f\,x_1 = f\,x_2$ y f es inyectiva), entonces y = $f\,x_1$ para algún x_1, con $x_1 \in C_1$ y $x_1 \in C_2$. De donde y$\in \vec{f}(C_1 \cap C_2)$.

Así que $\vec{f}\,C_1 \cap \vec{f}\,C_2 \subseteq \vec{f}(C_1 \cap C_2)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sabemos que $\vec{f}(C_1 - C_2) \supseteq \vec{f}\,C_1 - \vec{f}\,C_2$ (3.19 (iii)) .

Para demostrar $\vec{f}(C_1 - C_2) \subseteq \vec{f}\,C_1 - \vec{f}\,C_2$ necesitamos primero ver que $\vec{f}(C') \subseteq (\vec{f}\,C)'$.

ELDo

Demostrar $\vec{f}(C') \subseteq (\vec{f}\,C)'$

Por RAA

(1)	$y \in \vec{f}(C') \wedge y \in (\vec{f}\,C)$	P
(2)	$y = f(x_1)\ p.a.\ x_1 \notin C \wedge y = f(x_2)\ p.a.\ x_2 \in C$	I 1,3.15
(3)	$x_1 \neq x_2$	2
(4)	$\{x_1\} \cap \{x_2\} = \phi \wedge \vec{f}(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = \phi$	I 3, Ejercicio 3.3 (2(i))
(5)	$\vec{f}(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = \vec{f}(\{x_1\}) \cap \vec{f}(\{x_2\}) = \{fx_1\} \cap \{fx_2\} = \{y\} \neq \phi$	I 2,3.22(ii)
(6)	$\vec{f}(\{x_1\} \cap \{x_2\}) \neq \phi$	5
(7)	$\vec{f}(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = \phi \ \wedge\ \vec{f}(\{x_1\} \cap \{x_2\}) \neq \phi$	A 4,6
(8)	$\vec{f}(C') \subseteq (\vec{f}\,C)'$	RAA 1,6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Supongamos lo contrario : existe $y \in \vec{f}(C') \wedge y \in (\vec{f}\,C)$. **(2)**Entonces $y = f(x_1)$ para algún $x_1 \notin C$ y $y = f(x_2)$ para algún $x_2 \in C$. **(3)**Claramente $x_1 \neq x_2$, **(4)**o sea que $\{x_1\} \cap \{x_2\} = \phi$ y $\vec{f}(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = \phi$ (*).**(5)** Por otro lado $\vec{f}(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = \vec{f}(\{x_1\}) \cap \vec{f}(\{x_2\}) = \{fx_1\} \cap \{fx_2\} = \{y\} \neq \phi$

(6) o sea $\vec{f}(\{x_1\}\cap\{x_2\}) \neq \phi$. **(7)** Pero esto contradice el resultado (*).

(8) Luego $\vec{f}(C') \subseteq (\vec{f}\,C)'$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Supongamos lo contrario, esto es

$$\text{existe } y \in \vec{f}(C') \wedge y \in (\vec{f}\,C).$$

Entonces

$$y = f(x_1) \text{ para algún } x_1 \notin C \text{ y } y = f(x_2) \text{ para algún } x_2 \in C.$$

Claramente

$$x_1 \neq x_2,$$

o sea que

$$\{x_1\}\cap\{x_2\} = \phi \text{ y } \vec{f}(\{x_1\}\cap\{x_2\}) = \phi \qquad (*).$$

Por otro lado

$$\vec{f}(\{x_1\}\cap\{x_2\}) = \vec{f}(\{x_1\}) \cap \vec{f}(\{x_2\}) = \{fx_1\}\cap\{fx_2\} = \{y\} \neq \phi,$$

es decir

$$\vec{f}(\{x_1\}\cap\{x_2\}) \neq \phi.$$

Pero esto contradice el resultado (*). Luego $\vec{f}(C') \subseteq (\vec{f}\,C)'$.

Ahora sí demostremos (ii) $\Rightarrow$ (iii)

ELD

Demostrar $\vec{f}(C_1 - C_2) \subseteq \vec{f}\,C_1 - \vec{f}\,C_2$.

(1)	$\vec{f}(C_1 \cap C_2) = \vec{f}\,C_1 \cap \vec{f}\,C_2$	P
(2)	$\vec{f}(C_1 - C_2) = \vec{f}(C_1 \cap C_2')$	P
(3)	$\vec{f}(C_1 \cap C_2') = \vec{f}(C_1) \cap \vec{f}(C_2')$	C_2' / C_2 1
(4)	$\vec{f}(C_1) \cap \vec{f}(C_2') \subseteq \vec{f}(C_1) \cap \vec{f}(C_2)'$	I 3,ELDo
(5)	$\vec{f}(C_1) \cap \vec{f}(C_2)' = \vec{f}\,C_1 - \vec{f}\,C_2$	P
□(6)	$\vec{f}(C_1 - C_2) \subseteq \vec{f}\,C_1 - \vec{f}\,C_2$	2,3,4,5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) (2) (3) (4) (5)(6)

$\vec{f}(C_1 - C_2) = \vec{f}(C_1 \cap C_2') = \vec{f}(C_1) \cap \vec{f}(C_2') \subseteq \vec{f}(C_1) \cap \vec{f}(C_2)' = \vec{f}\,C_1 - \vec{f}\,C_2$

Esto es $\vec{f}(C_1 - C_2) \subseteq \vec{f}\,C_1 - \vec{f}\,C_2$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

ELD

Demostrar $\vec{f}(\vec{p}_1\, f - C) = \vec{p}_2\, f - \vec{f}\,C$

(1)	$\vec{f}(C_1 - C_2) = \vec{f}\,C_1 - \vec{f}\,C_2$.	**P**
(2)	$\vec{f}(\vec{p}_1\, f - C) = \vec{f}(A - C)$	3.3 (iii)
(3)	$\vec{f}(A - C) = \vec{f}\,A - \vec{f}\,C$	A/C_1, C/C_2 1
(4)	$\vec{f}\,A - \vec{f}\,C = \vec{p}_2\, f - \vec{f}\,C$	3.16 (iii)
□ (5)	$\vec{f}(\vec{p}_1\, f - C) = \vec{p}_2\, f - \vec{f}\,C$	2,3,4

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $\vec{f}(\vec{p}_1\, f - C) = \vec{f}$ (A–C) (3.3 (ii))

$= \vec{f}$ A – $\vec{f}$ C Hipótesis

$= \vec{p}_2\, f - \vec{f}$ C (3.16 (iii))

(iv) $\Rightarrow$ (v) **ELD**

Demostrar $\overleftarrow{f}\,\vec{f}\,C = C$

(1) $\vec{f}(\vec{p}_1\, f - C) = \vec{p}_2\, f - \vec{f}\,C$ **P**

Ya sabemos que C $\subseteq \overleftarrow{f}\,\vec{f}\,C$. Ejercicio 3.3 (6)

Debemos demostrar que $\overleftarrow{f}\,\vec{f}\,C \subseteq C$.

ELD

Demostrar $\overleftarrow{f}\,\vec{f}\,C \subseteq C$

Por RAA

(1) $\vec{f}(\vec{p}_1\, f - C) = \vec{p}_2\, f - \vec{f}\,C$ **P**

(2)	$\neg\,(\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C \subseteq C)$	P
(3)	$\exists x \in \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C \wedge x \notin C$	I trad.2,1.3
(4)	$fx \in \overrightarrow{f}\,C \wedge\ x \notin C$	I trad.3,3.15
(5)	$x \in \overrightarrow{p_1}\,f \wedge x \notin C$	I 4,2.12
(6)	$x \in \overrightarrow{p_1}\,f - C$	I trad.5, 1.16
(7)	$fx \in \overrightarrow{f}\,C \wedge\ fx \in \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_1}\,f - C)$	4,6,3.15
(8)	$fx \in \overrightarrow{f}\,C \wedge\ fx \in \overrightarrow{p_2}\,f - \overrightarrow{f}\,C$	I 7,1
(9)	$fx \in \overrightarrow{f}\,C\ \wedge\ fx \notin \overrightarrow{f}\,C$	I 8,1.16
□(10)	$\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C \subseteq C$	RAA 2,9

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(iv) $\Rightarrow$ (v) . Ya sabemos que C$\subseteq \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C$. Ejercicio 3.3 (6) .

Vamos a demostrar que $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C \subseteq C$.

(2) **(3)**Supongamos lo contrario; es decir que existe $x \in \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C$ pero $x \notin$C . **(4)**Entonces $fx \in \overrightarrow{f}\,C$ y $x \notin C$ (3.15). **(5)** **(6)** Por 2.12, $x \in \overrightarrow{p_1}\,f$ y $x \notin C$ y se tendría que $x \in \overrightarrow{p_1}\,f - C$.**(7)** $fx \in \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_1}\,f - C)$ por 3.15. **(8)**Por hipótesis $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_1}\,f - C) = \overrightarrow{p_2}\,f - \overrightarrow{f}\,C$; luego $fx \in \overrightarrow{p_2}\,f - \overrightarrow{f}\,C$, **(9)**es decir que $fx \notin \overrightarrow{f}\,C$ **.** **(2)**Pero esto contradice el hecho de que $fx \in \overrightarrow{f}\,C$, anteriormente deducido. **(10)** Por tanto $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C \subseteq C$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

(iv) $\Rightarrow$ (v) . Ya sabemos que C$\subseteq \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C$. Ejercicio 3.3 (6) .

Vamos a demostrar que $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C \subseteq C$.

Supongamos lo contrario; es decir que existe $x \in \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C$ pero $x \notin$C . Entonces $fx \in \overrightarrow{f}\,C$ y $x \notin C$ (3.15). Por 2.12, $x \in \overrightarrow{p_1}\,f$ y se tendría que $x \in \overrightarrow{p_1}\,f - C$ **.** $fx \in \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_1}\,f - C)$ por 3.15. Por hipótesis $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_1}\,f - C) = \overrightarrow{p_2}\,f - \overrightarrow{f}\,C$; luego

$fx \in \overrightarrow{p_2}\, f - \overrightarrow{f}\, C$, es decir que $fx \notin \overrightarrow{f}\, C$**.** Pero esto contradice el hecho de que $fx \in \overrightarrow{f}\, C$, anteriormente deducido. Por tanto $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\, C \subseteq C$.

(v) ⇒ (i)

ELD

Demostrar : ***f*** **es inyectiva**

Traducción: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Por RAA

(1)	$\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\, C \subseteq C$	**P**
(2)	$\neg\,(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$	P
(3)	$x_1 \neq x_2 : fx_1 = fx_2$	traducción 2
(4)	$x_1 \in \overleftarrow{f}\{fx_1\} \wedge x_2 \in \overleftarrow{f}\{fx_2\}$	3.15
(5)	$x_1 \in \overleftarrow{f}\{fx_1\} \wedge x_2 \in \overleftarrow{f}\{fx_1\}$	I 3,4
(6)	$\{x_1, x_2\} \subseteq \overleftarrow{f}\{fx_1\}$	5
(7)	$\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\, x_1 = \overleftarrow{f}\{fx_1\} \supseteq \{x_1, x_2\}$	I 3.15,6
(8)	$\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\, x_1 \subseteq \{x_1\}$	$\{x_1\}$/ C 1
(9)	$\{x_1\} \supseteq \{x_1, x_2\}$	6,8
(10)	$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$	CP 2,6
□(11)	f es inyectiva	traducción 7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Demostración por RAA.
(2) (3) (4) (5) (6) (7) Si x_1, x_2 con $x_1 \neq x_2$ son tales que $fx_1 = fx_2$, entonces $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\, x_1 = \overleftarrow{f}\{fx_1\} \supseteq \{x_1, x_2\}$**.(8) (9) (10) (11)** Pero $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\, x_1 = \{x_1\}$ por hipótesis, y se tendría que $\{x_1\} \supseteq \{x_1, x_2\}$,que es falso. Luego f es inyectiva.□

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Demostración por RAA.
Si x_1, x_2 con $x_1 \neq x_2$ son tales que

$$fx_1 = fx_2,$$

Entonces

$$\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,x_1 = \overleftarrow{f}\{fx_1\} \supseteq \{x_1, x_2\}$$

Pero $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,x_1 = \{x_1\}$ por hipótesis, y se tendría que $\{x_1\} \supseteq \{x_1, x_2\}$ que es falso. □

3.23 Proposición : Sea $f : A \mapsto B$,

$$f \text{ es sobreyectiva} \Leftrightarrow \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D = D \ .$$

Demostración :

$\Rightarrow$**)**

ELD

Demostrar : $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D = D$

Traducción : $y \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D \Leftrightarrow$ y$\in$D

(1)	$\boldsymbol{f : A \mapsto B, D \subseteq B,}$ **f es sobreyectiva**	**P**
(2)	$y \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D$	P
(3)	y = f x p. a. x$\in \overleftarrow{f}\,D$	I trad.2,3.15
(4)	y = f x $\in D$	I trad.3,3.15
□$_1$(5)	$y \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D \Rightarrow$ y$\in D$	CP 2,4
$\Leftarrow$)(6)	y$\in D$	P
(7)	y$\in B$	1,6
(8)	$\exists x \in A : y = fx$	I 7,1(3.20(ii))
(9)	$x \in \overleftarrow{f}\,D \wedge y = fx$	6,8,3.15
(10)	$y = fx \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D$	I trad.9, 3.15
□$_2$ (11)	y$\in D \Rightarrow y \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D$	CP 6,10
(12)	$y \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D \Leftrightarrow$ y$\in$D	LB 5,11
□ (13)	$\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D = D$	I trad.12,1.1

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D = D$, demostrando $y \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D \Leftrightarrow$ y$\in$D.

(2) Sea $y \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D$.**(3)** Por 3.15, existe x$\in \overleftarrow{f}\,D$ tal que y = f(x). **(4) (5)** Es decir , y = f x $\in D$, cumpliéndose la implicación

$$y \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D \Rightarrow \text{y} \in D\ . \quad (\text{ I })$$

(6) Sea ahora y$\in D$. **(7)**Entonces y$\in B$ debido a que por hipótesis $D \subseteq B$ **.** **(8)** Como f es sobreyectiva, existe $x \in A : y = fx$ **.(9)** Por 3.15, $x \in \overleftarrow{f} D$ (hemos supuesto que y$\in D$). **(10)** **(11)** Por lo tanto $y = fx \in \overrightarrow{f}\, \overleftarrow{f} D$, cumpliéndose la implicación

$$y\in D \Rightarrow y \in \overrightarrow{f}\, \overleftarrow{f} D \qquad (\text{ II })$$

(12) De (I) y (II) se tiene la equivalencia $y \in \overrightarrow{f}\, \overleftarrow{f} D \Leftrightarrow$ y$\in$D. **(13)**Es decir $\overrightarrow{f}\, \overleftarrow{f} D = D$ **.**

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overrightarrow{f}\, \overleftarrow{f} D = D$, demostrando $y \in \overrightarrow{f}\, \overleftarrow{f} D \Leftrightarrow$ y$\in$D.

Sea $y \in \overrightarrow{f}\, \overleftarrow{f} D$. Por 3.15, existe x$\in \overleftarrow{f} D$ tal que y = f(x). Es decir , y = f x $\in D$, cumpliéndose la implicación

$$y \in \overrightarrow{f}\, \overleftarrow{f} D \Rightarrow y\in D . \qquad (\text{ I })$$

Sea ahora y$\in D$. Entonces y$\in B$ debido a que por hipótesis $D \subseteq B$ **.** Como f es sobreyectiva, existe $x \in A : y = fx$ **.** Por 3.15, $x \in \overleftarrow{f} D$ (hemos supuesto que y$\in D$). Por lo tanto $y = fx \in \overrightarrow{f}\, \overleftarrow{f} D$, cumpliéndose la implicación

$$y\in D \Rightarrow y \in \overrightarrow{f}\, \overleftarrow{f} D \qquad (\text{ II })$$

De (I) y (II) se tiene la equivalencia $y \in \overrightarrow{f}\, \overleftarrow{f} D \Leftrightarrow$ y$\in$D. Es decir $\overrightarrow{f}\, \overleftarrow{f} D = D$ **.**

3.23 $\Leftarrow$)

ELD

Demostrar : ***f*** **es sobreyectiva**

Traducción : ($\forall$ y$\in$B)($\exists x \in A : y = fx$)

(1)	$\boldsymbol{f : A \mapsto B, D \subseteq B},$	**P**
(2)	$\overrightarrow{f}\, \overleftarrow{f} D = D$	**P**
(3)	y$\in$B	P
(4)	D = {y}	traducción 3
(5)	$\overrightarrow{f}\, \overleftarrow{f}$ {y}= {y}	{y}/D 2

(6)	$\exists x \in \overleftarrow{f}\ \{y\}: y = f\,x$	traducción 5
(7)	$\overleftarrow{f}\ \{y\} \subseteq A$	1,6
(8)	$x \in A: y = f\,x$	6,7
(9)	$(\forall\ y \in B)(\exists x \in A: y = fx\ )$	3, 8
□ (10)	f es sobreyectiva	I trad.9, 3.20(ii)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que f es sobreyectiva.

(3) Sea $y \in B$. **(4)**Sea $D = \{y\}$.**(5)** Debido a que por hipótesis $\overrightarrow{f}\ \overleftarrow{f}\ D = D$, entonces $\overrightarrow{f}\ \overleftarrow{f}\ \{y\} = \{y\}$.**(6)**De donde existe $x \in \overleftarrow{f}\ \{y\}: y = f\,x$ (3.15). **(7)**Como f es una función de A en B, entonces $\overleftarrow{f}\ \{y\} \subseteq A$; **(8)**es decir que existe $x \in A$ tal que $y = f\,x$ (3.15). **(9) (10)** Y por lo tanto f *e*s sobreyectiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $f: A \mapsto B$, f es sobreyectiva $\Leftrightarrow\ \overrightarrow{f}\ \overleftarrow{f}\ D = D$.

$\Rightarrow$)Vamos a demostrar que $\overrightarrow{f}\ \overleftarrow{f}\ D = D$ demostrando su equivalencia $y \in \overrightarrow{f}\ \overleftarrow{f}\ D \Leftrightarrow y \in D$. Sea $y \in \overrightarrow{f}\ \overleftarrow{f}\ D$. Por 3.15, existe $x \in \overleftarrow{f}\ D$ tal que $y = f(x)$. Entonces $y = f\,x \in D$, cumpliéndose la implicación

$$y \in \overrightarrow{f}\ \overleftarrow{f}\ D \Rightarrow y \in D. \quad (\text{ I })$$

Sea ahora $y \in D$. Entonces $y \in B$ debido a que por hipótesis $D \subseteq B$ **.** Como f es sobreyectiva, existe $x \in A: y = fx$ **.** Por 3.15, $x \in \overleftarrow{f}\ D$ (hemos supuesto que $y \in D$). Por lo tanto $y = fx \in \overrightarrow{f}\ \overleftarrow{f}\ D$, cumpliéndose la implicación

$$y \in D \Rightarrow y \in \overrightarrow{f}\ \overleftarrow{f}\ D \quad (\text{ II })$$

De (I) y (II) se tiene la equivalencia $y \in \overrightarrow{f}\ \overleftarrow{f}\ D \Leftrightarrow y \in D$. Es decir $\overrightarrow{f}\ \overleftarrow{f}\ D = D$.

$\Leftarrow$) Vamos a demostrar que f es sobreyectiva.

Sea y∈B. Sea D = {y}. Debido a que por hipótesis $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D = D$, entonces $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}$ {y}= {y}. De donde existe $x \in \overleftarrow{f}$ {y}: y = f x (3.15). Como f es una función de A en B, entonces $\overleftarrow{f}$ {y} $\subseteq A$; es decir que existe $x \in A$ tal que $y = f$ x . Y por lo tanto f es sobreyectiva.

Para toda función f , f^{-1} está definida; pero no siempre es f^{-1} una relación funcional y aunque lo sea no necesariamente $f^{-1}: B \mapsto A$ (siendo $f: A \mapsto B$).

3. 24 Proposición : f es inyectiva ⇔ f^{-1} es una relación funcional

Demostración : ⇒)

ELD

Demostrar : $\boldsymbol{f}^{-1}$ **es relación funcional**

Traducción : $(y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1} \Rightarrow x_1 = x_2$

Por RAA

(1)	***f* es inyectiva**	**P**
(2)	$(y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1}$ con $x_1 \neq x_2$	P
(3)	$(x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f$	I 2,2.13
(4)	$y = f(x_1) = f(x_2)$	traducción 3
(5)	$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$	I trad.4,3.20(i)
(6)	$x_1 = x_2$	PP 4,5
(6)	$x_1 \neq x_2$	S2
(7)	$x_1 = x_2 \wedge x_1 \neq x_2$	A 6,1
(8)	$(y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1} \Rightarrow x_1 = x_2$	RAA 2,7
□(9)	f^{-1} es relación funcional	I trad.8,3.3(iii)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(⇒) **(2)**Si existieran (y, x_1)∈ f^{-1} y (y, x_2)∈ f^{-1} con $x_1 \neq x_2$, **(3) (4) (5) (6) (7)**se tendría (x_1, y)∈ f y (x_2, y)∈f o sea $y = f x_1 = f x_2$ que contradice el que f sea inyectiva **.(9) (10)** Luego f^{-1} es relación funcional .

$\Leftarrow$)

ELD

Demostrar : ***f* es inyectiva**

Traducción : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(1)	**f^{-1} es relación funcional**	**P**
(2)	$y = f(x_1) = f(x_2)$ con $x_1 \neq x_2$	P
(3)	$(x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f$	traducción 2
(4)	$(y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1}$	traducción 3
(5)	$(y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1} \Rightarrow x_1 = x_2$	traducción 1
(6)	$x_1 = x_2$	PP 4,5
(7)	$x_1 \neq x_2$	S2
(8)	$x_1 = x_2 \wedge x_1 \neq x_2$	A 6,7
(9)	$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$	RAA 2,8
□ (10)	f es inyectiva	traducción 7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

($\Rightarrow$) **(2)**Si existieran x_1, x_2 con $y = f(x_1) = f(x_2)$ y $x_1 \neq x_2$, **(3) (4) (5) (6) (7) (8)**se tendría $(x_1, y) \in f$ y $(x_2, y) \in f$ o sea $(y, x_1) \in f^{-1}$ y $(y, x_2) \in f^{-1}$ que contradice el que *f* sea una relación funcional . **(9) (10)** Luego *f* es inyectiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Demostrar : *f* es inyectiva $\Leftrightarrow$ f^{-1} es una relación funcional

($\Rightarrow$) Si existieran $(y, x_1) \in f^{-1}$ y $(y, x_2) \in f^{-1}$ con $x_1 \neq x_2$, se tendría $(x_1, y) \in f$ y $(x_2, y) \in f$ o sea $y = f x_1 = f x_2$ que contradice el que *f* sea inyectiva .Luego f^{-1} es relación funcional.

($\Leftarrow$) Si existieran x_1, x_2 con $y = f(x_1) = f(x_2)$ y $x_1 \neq x_2$, se tendría que $(x_1, y) \in f$ y $(x_2, y) \in f$ o sea $(y, x_1) \in f^{-1}$ y $(y, x_2) \in f^{-1}$ que contradice el que *f* sea una relación funcional . Luego *f* es inyectiva.

3. 25 Corolario : $f: A \mapsto B$ inyectiva $\Rightarrow f^{-1}: \vec{p}_2\, f \mapsto A$.

ELD

Demostrar : $f^{-1}: \overrightarrow{p_2}\, f \mapsto A$**.**

Traducción : (i) $f^{-1} \subseteq \overrightarrow{p_2}\, f \times A$

(ii) $\overrightarrow{p_1}\, f^{-1} = \overrightarrow{p_2}\, f$

(iii) f^{-1} es relación funcional

(1)	$f : A \mapsto B$ inyectiva	**P**

Demostración de (i):

ELD

Demostrar : $f^{-1} \subseteq \overrightarrow{p_2}\, f \times A$

Traducción : (y, x)$\in f^{-1} \Rightarrow$ (y, x)$\in \overrightarrow{p_2}\, f \times A$

(1)	$f : A \mapsto B$ **inyectiva**	**P**
(2)	(y, x)$\in f^{-1}$	P
(3)	(x, y)$\in f$	traducción 2
(4)	$y \in \overrightarrow{p_2}\, f$	I trad.3,2.12
(5)	(x, y)$\in A \times B$	3,1
(6)	$x \in A$	5
(7)	(y, x)$\in \overrightarrow{p_2}\, f \times A$	4,5,2.6
(8)	(y, x)$\in f^{-1} \Rightarrow$ (y, x)$\in \overrightarrow{p_2}\, f \times A$	CP 2,7
□ (9)	$f^{-1} \subseteq \overrightarrow{p_2}\, f \times A$	trad.8,1.3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $f^{-1} \subseteq \overrightarrow{p_2}\, f \times A$.

(2) Sea (y, x)$\in f^{-1}$**.(3) (4)** Por 2.13 (x, y)$\in f$; de donde $y \in \overrightarrow{p_2}\, f$. **(5) (6)**Por ser f una función de A en B , se tiene (x, y)$\in A \times B$ y por lo tanto $x \in A$.

(7) O sea que (y, x)$\in \overrightarrow{p_2}\, f \times A$. **(8) (9)** Por lo tanto $f^{-1} \subseteq \overrightarrow{p_2}\, f \times A$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $f^{-1} \subseteq \overrightarrow{p_2}\, f \times A$.

Sea (y, x)$\in f^{-1}$. Por 2.13, (x, y)$\in f$; de donde $y \in \overrightarrow{p_2}\, f$. Por ser f una función de

A en B , se tiene (x, y)$\in A\times B$ y por lo tanto $x \in A$. O sea que (y, x)$\in \vec{p_2}\, f \times A$.

Por lo tanto $f^{-1} \subseteq \vec{p_2}\, f \times A$.

Demostración de (ii)

ELD

Demostrar : $\vec{p_1}\, f^{-1} = \vec{p_2}\, f$

Traducción : $y \in \vec{p_1}\, f^{-1} \Leftrightarrow y \in \vec{p_2}\, f$

(1) $\boldsymbol{f : A \mapsto B}$ **inyectiva** **P**

$y \in \vec{p_1}\, f^{-1} \Leftrightarrow$ (y, x)$\in f^{-1}$ p.a.x

$\Leftrightarrow$ (x, y)$\in f$ p.a.x

$\Leftrightarrow$ $y \in \vec{p_2}\, f$

Demostración de (iii): f^{-1} es relación funcional por 3.24.

Por (i), (ii) y (iii) , $f^{-1} : \vec{p_2}\, f \mapsto A$ es función.

3. 26 Proposición : $f : A \mapsto B$ es biyectiva $\Rightarrow f^{-1}$: B$\mapsto$ A .

ELD

Demostrar : $\boldsymbol{f^{-1}}$ **: B$\mapsto$ A**

Traducción : (i) $f^{-1} \subseteq B\times A$

(ii) $\vec{p_1}\, f^{-1} = B$

(iii) f^{-1} es relación funcional

(1)	$\boldsymbol{f : A \mapsto B}$ **es biyectiva**	**P**
(2)	$f \subseteq A\times B$	1
(3)	$f^{-1} \subseteq B\times A$	2
(4)	f es inyectiva	1
(5)	f^{-1} relación funcional	I 4,3.24
(6)	f es sobreyectiva	1
(7)	$\vec{p_2}\, f = B$	I 6,3.21(ii)
(8)	$\vec{p_2}\, f = \vec{p_1}\, f^{-1}$	P
(9)	$\vec{p_1}\, f^{-1} = B$	I 7,8
□ (10)	f^{-1} : B$\mapsto$ A	3,5,9

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) Por ser f una función de A en B, $f \subseteq A \times B$. **(3)** De donde $f^{-1} \subseteq B \times A$.
(4) (5) Si f es biyectiva entonces es inyectiva y por 3.24 f^{-1} es una relación funcional. **(6) (7)**Como $f : A \mapsto B$ es biyectiva es sobreyectiva o sea $\vec{p}_2\ f$ = B **(8)**pero $\vec{p}_2\ f = \vec{p}_1\ f^{-1}$ **(9)** por lo tanto $\vec{p}_1\ f^{-1} = B$ **(10)** y f^{-1}: B$\mapsto$ A .

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Por ser f una función de A en B, $f \subseteq A \times B$. De donde $f^{-1} \subseteq B \times A$. Si f es biyectiva entonces es inyectiva y por 3.25 f^{-1} es una relación funcional.
Como $f : A \mapsto B$ es biyectiva es sobreyectiva o sea $\vec{p}_2\ f$ = B pero $\vec{p}_2\ f$ = $\vec{p}_1\ f^{-1}$ por lo tanto $\vec{p}_1\ f^{-1} = B$ y f^{-1}: B$\mapsto$ A .

3. 27 Definición : Dada una biyección $f : A \mapsto B$, la función f^{-1}: B$\mapsto$ A cuya existencia asegura 3.26 se llama la función inversa de $f : A \mapsto B$.

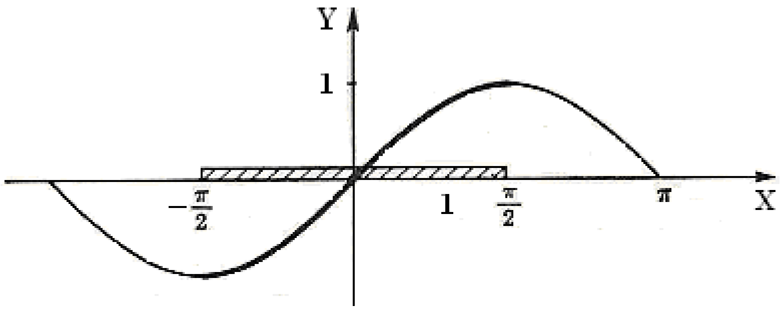
Está claro que solamente las biyecciones tienen inversos. Por ejemplo la función trigonométrica *sen* : $\boldsymbol{R} \mapsto \boldsymbol{R}$ no es una biyección y por lo tanto no tiene inverso. Sin embargo se acostumbra a reducir esta función para obtener una biyección que si tenga inverso. Por ejemplo así : se reduce primero a :

$$sen : \boldsymbol{R} \mapsto [-1, 1]$$

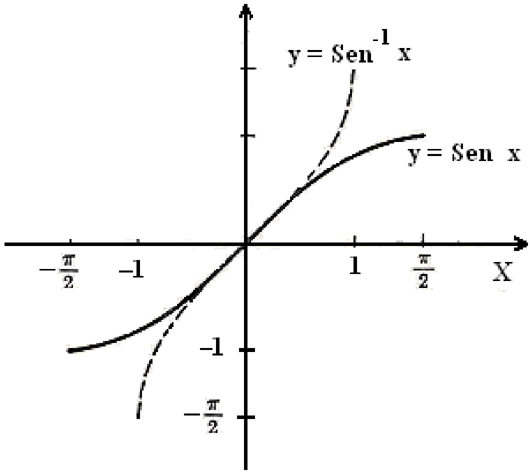
y luego a :

$$sen\,|_{[-\pi/2\,,\,\pi/2\,]} : [-\pi/2, \pi/2\,] \mapsto [-1, 1]$$

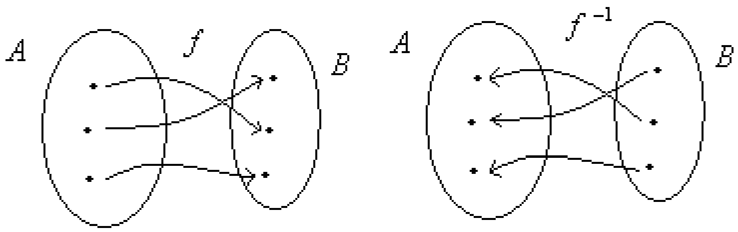
que siendo biyección tiene inverso el cual se llama “arco seno” o sea “ sen^{-1} ”.



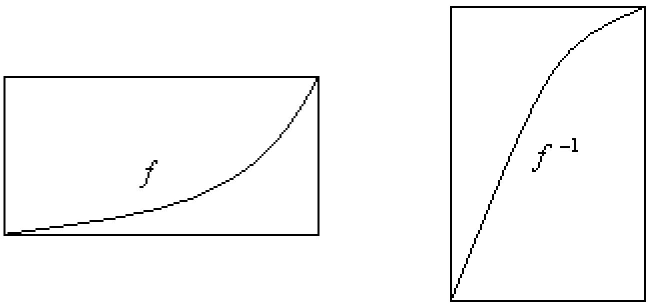
No solamente toda biyección tiene inverso, sino que el inverso también es biyección.



3. 28 Proposición : $f : A \mapsto B$ es biyección $\Leftrightarrow f^{-1} : B \mapsto A$ es biyección.



Una biyección y su inverso
Fig. 35



La gráfica de una biyección y la de su inverso
Fig. 36

Obsérvese que $\overrightarrow{f^{-1}} D = \overleftarrow{f} D$, siendo f una biyección .

Demostración: $\Rightarrow$)

ELD

Demostrar : $\boldsymbol{f^{-1}: B \mapsto A}$ **es biyección**

Traducción : (i) f^{-1} es inyectiva y (ii) f^{-1} es sobreyectiva

(1)	$\boldsymbol{f: A \mapsto B}$ **biyectiva**	**P**

ELD(i)

Demostrar : $\boldsymbol{f^{-1}}$ **es inyectiva**

Traducción : $f^{-1}y_1 = f^{-1}y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

(1)	$\boldsymbol{f: A \mapsto B}$ **biyectiva**	**P**
(2)	$f^{-1}y_1 = f^{-1}y_2$	P
(3)	$\exists x_1, x_2 \in A: y_1 = f(x_1) \wedge y_2 = f(x_2)$	2,1 (f sobre)
(4)	$f(x_1) = f(x_2)$	2,3
(5)	$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$	1 (f 1-1)
(6)	$x_1 = x_2$	CP 4,5
(7)	$y_1 = y_2$	I 6,3,4
(8)	$f^{-1}y_1 = f^{-1}y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$	CP 2,7
(9)	f^{-1} es inyectiva	I trad.8, 3.20(i)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Demostremos que f^{-1} es inyectiva.
(2) Sea $f^{-1}y_1 = f^{-1}y_2$. **(3)** Como f es sobre existen $x_1,\ x_2 \in A: y_1 = f(x_1)$ **y** $y_2 = f(x_2)$**.** **(4)**Claramente $f(x_1) = f(x_2)$ **.(5) (6)** Como f es inyectiva $x_1 = x_2$, **(7)** y $y_1 = y_2$**.** **(8) (9)**Por lo tanto f^{-1} es inyectiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Demostremos que f^{-1} es inyectiva.
Sea $f^{-1}y_1 = f^{-1}y_2$. Como f es sobre existen $x_1,\ x_2 \in A: y_1 = f(x_1)$ **y** $y_2 = f(x_2)$**.** Claramente $f(x_1) = f(x_2)$**.** Como f es inyectiva $x_1 = x_2$**,** y $y_1 = y_2$**.** Por lo tanto f^{-1} es inyectiva.

ELD(ii)

Demostrar : $\boldsymbol{f^{-1}: B \mapsto A}$ **es sobreyectiva**

Traducción : $(\forall x \in A)(\exists x \in B : x = f^{-1}y)$

(1)	$\boldsymbol{f : A \mapsto B}$ **biyectiva**	**P**
(2)	$x \in A$	P
(3)	$y = f(x) \in B$	1
(4)	$x = f^{-1}(y\ )$	traducción 3
(5)	$(\forall x \in A)(\exists y \in B : x = f^{-1}y)$	2,3,4
□ (6)	f^{-1} es sobreyectiva	traducción 5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Demostremos que f^{-1} es sobreyectiva.
(2) Sea $x \in A$. **(3)**Entonces $y = f(x) \in B$ **(4)** o sea $x = f^{-1}(y\ )$**.** **(5) (6)**Por lo tanto f^{-1} es sobreyectiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Demostremos que f^{-1} es sobreyectiva.
Sea $x \in A$. Entonces $y = f(x) \in B$ o sea $x = f^{-1}(y\ )$**.** Por lo tanto f^{-1} es sobreyectiva.

3.28 $\Leftarrow$)

ELD

Demostrar : $\boldsymbol{f : A \mapsto B}$ **es biyección**

Traducción : (i) f^{-1} es inyectiva y (ii) f^{-1} es sobreyectiva

(1)	$\boldsymbol{f^{-1}: B \mapsto A}$ **biyectiva**	**P**

ELD(i)

Demostrar : $\boldsymbol{f}$ **es inyectiva**

Traducción : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(1)	$\boldsymbol{f^{-1}: B \mapsto A}$ **biyectiva**	**P**
(2)	$f(x_1) = f(x_2) = y$	P
(3)	$(x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f$	traducción 2
(4)	$(y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1}$	traducción 3
(5)	$(y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1} \Rightarrow x_1 = x_2$	1, 3.24
(6)	$x_1 = x_2$	PP 4,5

(7)	$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$	CP 2,6
□ (8)	f inyectiva	traducción 7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Demostraremos que f es inyectiva. **(2)**Sea $f(x_1)=f(x_2)=y$. **(3)**Entonces $(x_1,y)\in f\wedge(x_2,y)\in f$ **(4)**o sea $(y,x_1)\in f^{-1}$ y $(y,x_2)\in f^{-1}$.
(5) (6) (7) (8) Como f^{-1} es relación funcional, $x_1=x_2$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Demostremos que f es inyectiva.
Sea $f(x_1)=f(x_2)=y$. Entonces $(x_1,y)\in f\wedge(x_2,y)\in f$ o sea $(y,x_1)\in f^{-1}$ y $(y,x_2)\in f^{-1}$. Como f^{-1} es relación funcional, $x_1=x_2$.

ELD(ii)

Demostrar : $\boldsymbol{f: A\mapsto B}$ **es sobreyectiva**

Traducción : $(\forall y\in B)(\exists x\in A: y=f(x))$

(1)	$\boldsymbol{f^{-1}: B\mapsto A}$ **biyectiva**	**P**
(2)	y$\in B$	P
(3)	$f^{-1}y=x\in A$	1
(4)	$f(x)=y$	traducción 3
(5)	$(\forall y\in B)(\exists x\in A: y=f(x))$	2,4
□(6)	f es sobreyectiva	traducción 5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Demostraremos que f es sobreyectiva. **(2)**Sea y$\in B$. **(3) (4) (5) (6)** Entonces existe $x\in A$ tal que $f^{-1}y=x$ ($f^{-1}: B\mapsto A$), es decir, tal que $f(x)=y$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Demostremos que f es sobreyectiva. Sea y$\in B$. Entonces existe $x\in A$ tal que $f^{-1}y=x$ ($f^{-1}: B\mapsto A$), es decir, tal que $f(x)=y$.
.

3.29 Proposición $f^{-1^{-1}}=f$

Demostración :

ELD

Demostrar : $f^{-1^{-1}} = f$

Traducción $(x,y) \in f^{-1^{-1}} \Leftrightarrow (x,y) \in f$

$(x,y) \in f^{-1^{-1}} \Leftrightarrow (y,x) \in f^{-1}$ 2.13

$\Leftrightarrow (x,y) \in f$ 2.13

3.30 Proposición : Sea $f : A \mapsto B$ una biyección

(i) $f^{-1} \circ f = I_A$ (ii) $f \circ f^{-1} = I_B$

3.31 Proposición : Sean $f : A \mapsto B$ y $g : B \mapsto A$ tales que $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$ entonces (i) f es biyectiva

(ii) $f^{-1} = g$

ELD(i)

Demostrar : f **es biyectiva**

Traducción : (1) f es inyectiva $\wedge$ (2) f es sobreyectiva

(1)	$f : A \mapsto B$ y $g : B \mapsto A$	**P**
(2)	$g \circ f = I_A \wedge f \circ g = I_B$	**P**

ELD(i)(1)

Demostrar : f **es inyectiva**

Traducción : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(1)	$f : A \mapsto B$ y $g : B \mapsto A$	**P**
(2)	$g \circ f = I_A \wedge f \circ g = I_B$	**P**
(3)	$f(x_1) = f(x_2)$	P
(4)	$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$	3
(5)	$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2))$	4
(6)	$I_A x_1 = I_A x_2$	I 5, 2
(7)	$x_1 = x_2$	6
(8)	$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$	CP 3,7
□ (9)	f inyectiva	traducción 8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(3) Sea $f(x_1) = f(x_2)$.

(4) Entonces $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ **(5)**o sea $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2))$.

(6) Pero $g \circ f = I_A$, luego $I_A x_1 = I_A x_2$ **(7) (8) (9)** es decir $x_1 = x_2$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $f(x_1) = f(x_2)$.

Entonces $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ o sea $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$.

Pero $g \circ f = I_A$, luego $I_A x_1 = I_A x_2$ es decir $x_1 = x_2$.

ELD(i)(2)

Demostrar : f **es sobreyectiva**

Traducción : $(\forall y \in B)(\exists x \in A : y = f(x))$

(1)	$f : A \mapsto B$ y $g : B \mapsto A$	**P**
(2)	$g \circ f = I_A \wedge f \circ g = I_B$	**P**
(3)	y∈B	P
(4)	g(y)∈A	1,3
(5)	$\exists x \in A : g(y) = x$	1,4
(6)	$f(g(y)) = f(x) \in B$	5,1
(7)	$f(g(y)) = y$	2
(8)	$y = f(x)$	I 6,7
(9)	$(\forall y \in B)(\exists x \in A : y = f(x))$	3,5,8
□(10)	f es sobreyectiva	traducción 9

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(3) Sea y∈B. **(4)** Entonces g(y)∈A . **(5) (6)** Como $g : B \mapsto A$, existe $x \in A : g(y) = x$ y $f(g(y)) = f(x) \in B$. **(7)**Como $f \circ g = I_B$, $f(g(y)) = y$ **(8) (9) (10)**y por lo tanto $y = f(x)$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea y∈B. Entonces g(y)∈A . Como $g : B \mapsto A$, existe $x \in A : g(y) = x$ y $f(g(y)) = f(x) \in B$. Como $f \circ g = I_B$, $f(g(y)) = y$ y por lo tanto $y = f(x)$.

3.31 (ii)

ELD(2)

Demostrar **:** $f^{-1} = g$

Traducción : $(y, x) \in f^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in g$

(1)	$f: A \mapsto B$ y $g: B \mapsto A$	**P**
(2)	$g \circ f = I_A \wedge f \circ g = I_B$	**P**
$\Rightarrow$)(3)	$(y,x) \in f^{-1}$	P
(4)	$(x,y) \in f$	traducción 3
(5)	$f(x) = y$	traducción 4
(6)	$g(y) = g(f(x))$	5
(7)	$(g \circ f)(x) = x$	2
(8)	$g(y) = x$	I 6,7
(9)	$(y,x) \in g$	traducción 8
□$_1$(10)	$(y,x) \in f^{-1} \Rightarrow (x,y) \in g$	CP 3,9
$\Leftarrow$)(11)	$(y,x) \in g$	P
(12)	$g(y) = x$	traducción 11
(13)	$f(g(y)) = f(x)$	12
(14)	$(f \circ g)(y) = y$	2
(15)	$y = f(x)$	I 13,14
(16)	$(x,y) \in f$	traducción 15
(17)	$(y,x) \in f^{-1}$	traducción 16
□$_2$ (18)	$(y,x) \in g \Rightarrow (y,x) \in f^{-1}$	CP 11,17
(19)	$(y,x) \in f^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in g$	LB 10,18
□ (20)	$f^{-1} = g$	traducción 19

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(3) Sea $(y,x) \in f^{-1}$. **(4) (5)**Entonces $(x,y) \in f$ o sea $f(x) = y$ **. (6)** De donde $g(y) = g(f(x))$ **.(7) (8) (9)**Como $g \circ f = I_A$, $(g \circ f)(x) = x$ y $g(y) = x$ o sea $(y,x) \in g$,**(10)** cumpliéndose la implicación

$$(y,x) \in f^{-1} \Rightarrow (x,y) \in g \qquad (\text{ I })$$

(11) Sea ahora $(y,x) \in g$. **(12) (13)**Entonces $g(y) = x$ y $f(g(y)) = f(x)$ **. (14)** Como $f \circ g = I_B$, entonces $(f \circ g)(y) = y$ **(15)** y por lo tanto $y = f(x)$; **(16) (17)**de donde $(x,y) \in f$ y $(y,x) \in f^{-1}$, **(18)** cumpliéndose la implicación

$$(y,x) \in g \Rightarrow (y,x) \in f^{-1} \qquad (\text{ I I })$$

(19) (20) De (I) y (II) se tiene la equivalencia $(y,x) \in f^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in g$ o sea $f^{-1} = g$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea $(y,x) \in f^{-1}$. Entonces $(x,y) \in f$ o sea $f(x) = y$. De donde $g(y) = g(f(x))$. Como $g \circ f = I_A$, $(g \circ f)(x) = x$ y $g(y) = x$ o sea $(y,x) \in g$, cumpliéndose la implicación

$$(y,x) \in f^{-1} \Rightarrow (x,y) \in g \qquad (\text{I})$$

Sea ahora $(y,x) \in g$. Entonces $g(y) = x$ y $f(\text{g}(y)) = f(x)$. Como $f \circ g = I_B$ entonces $(f \circ g)(y) = y$ y por lo tanto $y = f(x)$; de donde $(x,y) \in f$ y $(y,x) \in f^{-1}$, cumpliéndose la implicación

$$(y,x) \in g \Rightarrow (y,x) \in f^{-1} \qquad (\text{II})$$

De (I) y (II) se tiene la equivalencia $(y,x) \in f^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in g$ o sea $f^{-1} = g$.

3. 29 Proposición : $f^{-1^{-1}} = f$

Demostración : Ejercicio 2.3, 5 . □

3.30 Proposición : Sea $f : A \mapsto B$ una biyección ,

$$\text{(i)} \quad f^{-1} \circ f = I_A \qquad \text{(ii)} \quad f \circ f^{-1} = I_B$$

$$\begin{tikzcd} I_A : A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "f^{-1}"] & A \\ \text{x} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "f^{-1} \circ f"'] & y \arrow[r] & \text{x} \end{tikzcd}$$

$$(f^{-1} \circ f)(\text{x}) = f^{-1}(f(\text{x})) = f^{-1}(y) = \text{x}$$

$$\Rightarrow \quad f^{-1} \circ f = I_A$$

Demostración : Obsérvese primero que por ser f biyección ,

$$f x = y \Leftrightarrow f^{-1} y = x .$$

(i) Para cada $x \in$A , $(f^{-1} \circ f)x = f^{-1}(fx) = f^{-1}(y) = x = I_A x = x$

(ii) Para cada y$\in$B , $(f \circ f^{-1})y = f(f^{-1}y) = fx = y = I_B y$.□

3.31 Proposición : Sean $f : A \mapsto B$ y $g : B \mapsto A$ tales que $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$ entonces (i) f es biyectiva

(ii) $f^{-1} = g$

Demostración : (i) f es inyectiva porque

$$\begin{aligned} f\mathrm{x}_1 = f\mathrm{x}_2 &\Rightarrow \mathrm{g}(f\mathrm{x}_1) = \mathrm{g}(f\mathrm{x}_2) \\ &\Rightarrow (\mathrm{g} \circ f)\,\mathrm{x}_1 = (\mathrm{g} \circ f)\,\mathrm{x}_2 \\ &\Rightarrow I_A\,\mathrm{x}_1 = I_A\,\mathrm{x}_2 \\ &\Rightarrow \mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2 \end{aligned}$$

f es sobreyectiva porque si $y \in B$, $y = I_B y = (f \circ g)y = f(gy)$.
Se ha demostrado que dado y$\in B$ existe $x = gy \in A$ tal que y = $f(x)$.

(ii) Como f es biyectiva fx = y $\Leftrightarrow$ x = $f^{-1}y$ para cada x$\in A$ y y$\in B$.
$f^{-1}y$ = x = I_A x = (g $\circ f$) x = g(fx) = gy o sea que $f^{-1} = g$.□

3. 32 Proposición : Sea $A \neq \varnothing$, $f : A \mapsto B$ *inyectiva* $\Leftrightarrow$ Existe $g: B \mapsto A$, g $\circ f = I_A$

Demostración : ($\Leftarrow$) Por 3.31 (i) .

($\Rightarrow$) Como f es inyectiva, $f^{-1} : \vec{p}_2 f \mapsto A$ (3.26) y $f^{-1} \circ f = I_A$ (3.31 (i)) .
El problema es con los elementos de B – $\vec{p}_2\, f$.

Sea a cualquier elemento fijo de A (por eso se exige que $A \neq \varnothing$) .
Para cada y$\in$ B – $\vec{p}_2\, f$ definimos g$y = a$. □

Existe una proposición similar a 3.32 (Véase 10.7) :

"$f : A \mapsto B$ sobreyectiva $\Leftrightarrow$ Existe g : $B \mapsto A$, $f \circ g = I_B$".

Para demostrar esta proposición necesitamos el axioma de elección .

EJERCICIO 3.4

1. De ejemplo de una función f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ tal que:
   i) No sea inyectiva ni sobreyectiva
   ii) Inyectiva pero no sobreyectiva.
   iii) Sobreyectiva pero no inyectiva.
   iv) Biyectiva.

2. Sean f: A→B y $g : B \to C$

   (i) f, g inyectivas ⇒ g o f es inyectiva.
   (ii) f, g son sobreyectivas ⇒ g o f es sobreyectiva.
   (iii) f, g son biyectivas ⇒ g o f es biyectiva.

3. Sea f: $A\to B \wedge g: B\to C$ definamos al producto $f \cdot$ g de f y g por
   $(f \,.\, g)(x, y) = (f(x), g(y))$

(i) $f \,.\, g$: A × C→B × D.
(ii) f, g son biyectivas ⇒ f, g son biyectivas.
(iii) $\vec{p}_2(f.g) = \vec{p}_2\, f \text{ x } \vec{p}_2\, g$

4. Sean $f_1 : A_1 \to B_1,\ f_2 : A_2 \to B_2$ biyecciones tales que $A_1 \cap A_2 = \phi$ y $B_1 \cap B_2 = \phi$. Sea $f : f_1 \cup f_2$. Entonces $f : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$ es una biyección.

5. Sea f: $A\to B \wedge g: B\to A$
   (i) $f\circ$g inyectiva ⇒ f es inyectiva.
   (ii) $f\circ$g sobreyectiva ⇒ g es sobreyectiva
   (iii) $f\circ$g biyectiva ⇒ f es inyectiva y g sobreyectiva.

6. Sean $f_1, f_2 : A \to B,\ g : B \to C,\ h_1, h_2 : C \to D$
   (i) g inyectiva ⇔ ($h_1 \circ g = h_2 \circ g \Rightarrow h_1 = h_2$)
   (ii) g sobreyectiva ⇔ ($g \circ f_1 = g \circ f_2 \Rightarrow f_1 = f_2$)

7. Sean f: A→B ∧ g: C→A
   (i) Existe h: A→C, tal que $f = g \circ h \Leftrightarrow \vec{p}_2\, f \subseteq \vec{p}_2\, g$
   (ii) Tal h es única si g es inyectiva.

8. Sea f: A→B

(i) f inyectiva $\Leftrightarrow \overrightarrow{f}$ inyectiva.

(ii) f sobreyectiva $\Leftrightarrow \overrightarrow{f}$ sobreyectiva.

(iii) f inyectiva $\Leftrightarrow \overleftarrow{f}$ sobreyectiva

(iv) f sobreyectiva $\Leftrightarrow \overleftarrow{f}$ inyectiva

(v) f biyectiva $\Leftrightarrow \overrightarrow{f}$ biyectiva $\Leftrightarrow \overleftarrow{f}$ biyectiva

9. (i) $f: A \to B$ sobreyectiva $\Leftrightarrow$ B - $\overrightarrow{f}$ C $\subseteq \overrightarrow{f}$ (A - C)

(ii) $f: A \to B$ biyectiva $\Leftrightarrow \overrightarrow{f}$ (A - C) = B - $\overrightarrow{f}$ C

ACTIVIDAD PRÁCTICA – PROCESO IMITATIVO

1. De ejemplo de una función f: **R**→**R** tal que:

i) No sea inyectiva ni sobreyectiva ($f(x) = x^2$)
ii) Inyectiva pero no sobreyectiva ($f(x) = e^x$)
iii)Sobreyectiva pero no inyectiva ($f(x) = x^3 - x$).
iv) Biyectiva ($f(x) = x^3$).

2 (i)

Sean f: A→B y $g : B \to C$.
f, g inyectivas $\Rightarrow$ g o f es inyectiva.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \\ x \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f_x \arrow[r] & g(f_x) \end{tikzcd}$$

ELD

Demostrar : $g \circ f$ es inyectiva

Traducción : $(g \circ f)\, x_1 = (g \circ f)\, x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

(1) $\boldsymbol{f : A \mapsto B}$ **y** $\boldsymbol{g : B \mapsto C}$ **P**
(2) *f, g* inyectivas **P**
(3) $(g \circ f)\, x_1 = (g \circ f)\, x_2$ P

(4)	$g(f x_1) = g(f x_2)$	3
(5)	$gy_1 = gy_2 \Rightarrow y_1 = y_2$	trad.2 (g 1-1)
(6)	$g(f x_1) = g(f x_2) \Rightarrow f x_1 = f x_2$	$f x_1/y_1$, $f x_2/y_2$ 5
(7)	$f x_1 = f x_2$	PP 4,6
(8)	$f x_1 = f x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$	traducción 2
(9)	$x_1 = x_2$	CP 8,7
(10)	$(g \circ f) x_1 = (g \circ f) x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$	CP 3,9
□(11)	$g \circ f$ es inyectiva.	Trad.10, 3.20(i)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $g \circ f$ es inyectiva.
(3) Sea $(g \circ f)\, x_1 = (g \circ f)\, x_2$,**(4)** entonces $g(f x_1) = g(f x_2)$.**(5) (6) (7)** Como g es inyectiva, $f x_1 = f x_2$; **(8) (9)**de donde $x_1 = x_2$ ya que f también es inyectiva. **(10) (12)** y por lo tanto $g \circ f$ es inyectiva

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $g \circ f$ es inyectiva.
Sea $(g \circ f)\, x_1 = (g \circ f)\, x_2$, entonces $g(f x_1) = g(f x_2)$. Como g es inyectiva, $f x_1 = f x_2$; de donde $x_1 = x_2$ ya que f también es inyectiva, y por lo tanto $g \circ f$ es inyectiva.

2 (ii) Sean f: A→B y $g : B \to C$

f, g son sobreyectivas ⇒ $g \circ f$ es sobreyectiva

ELD

Demostrar : $g \circ f$ **es sobreyectiva**

Traducción : $(\forall z \in C)(\exists x \in A : z = (g \circ f)(x)$

(1)	$\boldsymbol{f : A \mapsto B}$ **y** $\boldsymbol{g : B \mapsto C}$	**P**
(2)	***f, g*** **sobreyectivas**	**P**
(3)	z∈C	P
(4)	$\exists y \in B : g(y) = z$	3,2 (g sobre)
(5)	$\exists x \in A : y = f(x)$	4,2 (f sobre)
(6)	$(\forall z \in C)(\exists x \in A : z = (g \circ f)(x)$	3,4,5
□ (7)	$g \circ f$ es sobreyectiva	PP 4,6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(3) Sea z∈C. **(4)** (5)Como g es sobreyectiva existe $y \in B : g(y) = z$ y como f también es sobreyectiva existe $x \in A : y = f(x)$.**(6)** O sea que para $z \in C$ existe $x \in A$ tal que $z = (g \circ f)(x)$.(7) Es decir $g \circ f$ es sobreyectiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea z∈C. Como g es sobreyectiva existe $y \in B : g(y) = z$ y como *f* también es sobreyectiva existe $x \in A : y = f(x)$. O sea que para $z \in C$ existe $x \in A$ tal que $z = (g \circ f)(x)$**.** Es decir $g \circ f$ es sobreyectiva.

2 (iii) Sean *f*: A→B y $g : B \rightarrow C$

f, *g* son biyectivas ⇒ g o *f* es biyectiva.

ELD

Demostrar : $g \circ f$ **es biyectiva**

Traducción : $g \circ f$ es inyectiva ∧ $g \circ f$ es sobreyectiva

(1)	$\boldsymbol{f : A \mapsto B}$ **y** $\boldsymbol{g : B \mapsto C}$	**P**
(2)	***f*, *g* biyectivas**	**P**
(3)	*f*, *g* inyectivas	2
(4)	$g \circ f$ inyectiva	3, EJE. 3.4 (2(i))
(5)	*f*, *g* sobreyectivas	2
(6)	$g \circ f$ sobreyectiva	5, EJE. 3.4 (2(ii))
□ (7)	$g \circ f$ es inyectiva ∧ $g \circ f$ es sobreyectiva	A 4,6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2) (3) (4) Si f y g son biyectivas, entonces f y g son inyectivas y $g \circ f$ es inyectiva (Ejercicio 3.4 (2(i))). **(5) (6) (7)**De igual manera *f*, *g* sobreyectivas y por lo tanto $g \circ f$ sobreyectiva (Ejercicio 3.4 (2(ii))).

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Si f y g son biyectivas, entonces f y g son inyectivas y $g \circ f$ es inyectiva (Ejercicio 3.4 (2(i))). De igual manera *f*, *g* son sobreyectivas y por lo tanto $g \circ f$ sobreyectiva (Ejercicio 3.4 (2(ii))).

3. (i) Sea $f: A \to B \ \wedge\ g: B \to C$ definamos al producto $f \cdot g$ de f y g por $(f \cdot g)(x, y) = (f(x), g(y))$.

Entonces $f \cdot g : A \times C \to B \times D$.

ELD (i)

Demostrar $f \cdot g : A \times C \to B \times D$

Traducción : (1) $f \cdot g \subseteq (A \times C) \times (B \times D)$

(2) $\vec{p}_1\ f \cdot g = A \times C$

(3) $f \cdot g$ es relación funcional

(1) $f: A \to B \ \wedge\ g: C \to D \wedge (f \cdot g)(x, y) = (f(x), g(y))$ P

ELD i (1)

Demostrar : $f \cdot g \subseteq (A \times C) \times (B \times D)$

Traducción : $((x, y), (u, v)) \in f \cdot g \Rightarrow ((x, y), (u, v)) \in (A \times C) \times (B \times D)$

(1)	$f: A \to B \ \wedge\ g: C \to D \wedge (f \cdot g)(x, y) = (f(x), g(y))$	**P**
(2)	$((x, y), (u, v)) \in f \cdot g$	**P**
(3)	$(f \cdot g)(x, y) = (u, v)$	1, 2
(4)	$(fx, gy) = (u, v)$	I 3,1
(5)	$f x = u \ \wedge g y = v$	4
(6)	$(x,u) \in f \wedge (y,v) \in g$	5
(7)	$f \subseteq A \times B \wedge g \subseteq C \times D$	1
(8)	$(x,u) \in A \times B \wedge (y,v) \in C \times D$	6.7
(9)	$x \in A \wedge u \in B \wedge y \in C \wedge v \in D$	8
(10)	$(x \in A \wedge y \in C) \wedge (u \in B \wedge v \in D)$	9
(11)	$(x, y) \in A \times C \wedge (u,v) \in B \times D$	10
(12)	$((x, y),(u,v)) \in (A \times C) \times (B \times D)$	traducción 11
(13)	$((x, y), (u, v)) \in f \cdot g \Rightarrow ((x, y), (u, v)) \in (A \times C) \times (B \times D)$	CP 2,12
□ (14)	$f \cdot g \subseteq (A \times C) \times (B \times D$	traducción 13

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $f \cdot g \subseteq (A \times C) \times (B \times D)$

(2) Sea $((x, y), (u, v)) \in f \cdot g$. **(3)** Entonces $(f \cdot g)(x, y) = (u, v)$

(4) y (fx, gy) = (u, v). **(5)** Esto implica que f x = u y g y = v **(6)** y por lo tanto $(x,u) \in f \wedge (y,v) \in g$. **(7)** **(8)**Como $f \subseteq A \times B$ y $g \subseteq C \times D$ debido a que f es una función de A en B y g es una función de C en D, $(x,u) \in A \times B \wedge (y,v) \in C \times D$ **(9)** o sea que $x \in A \wedge u \in B \wedge y \in C \wedge v \in D$.**(10)** Reordenando se tiene $(x \in A \wedge y \in C) \wedge (u \in B \wedge v \in D)$ **(11)** o sea $(x,y) \in A \times C \wedge (u,v) \in B \times D$ **(12)** es decir $((x,y),(u,v)) \in (A \times C) \times (B \times D)$.

(13) Luego

$$((x, y), (u, v)) \in f\,.\,g \Rightarrow ((x, y), (u, v)) \in (A \times C) \times (B \times D).$$

(14) Esto es $f\,.\,g \subseteq (A \times C) \times (B \times D$, lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $f\,.\,g \subseteq (A \times C) \times (B \times D)$.

Sea ((x, y), (u, v))$\in f\,.\,g$. Entonces (f . g)(x, y) = (u, v) y (fx, gy) = (u, v). Esto implica que f x = u y g y = v y por lo tanto $(x,u) \in f \wedge (y,v) \in g$.

Como $f \subseteq A \times B$ y $g \subseteq C \times D$, debido a que f es una función de A en B y g es una función de C en D, entonces $(x,u) \in A \times B \wedge (y,v) \in C \times D$. Pero esto significa que $x \in A \wedge u \in B \wedge y \in C \wedge v \in D$. Reordenando esta conjunciòn se tiene $(x \in A \wedge y \in C) \wedge (u \in B \wedge v \in D)$ o sea $(x,y) \in A \times C \wedge (u,v) \in B \times D$ es decir $((x,y),(u,v)) \in (A \times C) \times (B \times D)$. Luego

$$((x, y), (u, v)) \in f\,.\,g \Rightarrow ((x, y), (u, v)) \in (A \times C) \times (B \times D).$$

Es decir $f\,.\,g \subseteq (A \times C) \times (B \times D$, lo que queríamos demostrar.

3 i (2) **ELD i (2)**

Demostrar : $\vec{p}_1\ f \cdot g = A \times C$

Traducción : $(x,y) \in \vec{p}_1\ f \cdot g \Leftrightarrow (x,y) \in A \times C$

(1)	$f: A \to B \wedge g: C \to D \wedge (f\,.\,g)(x, y) = (f(x), g(y))$	**P**
$\Rightarrow$)(2)	$(x,y) \in \vec{p}_1\ f \cdot g$	P
(3)	((x, y), (u, v))$\in f\,.\,g$ p.a. u y v	traducción 2
(4)	$f\,.\,g \subseteq (A \times C) \times (B \times D)$	EJE. 3.4 (3i(1))
(5)	$((x,y),(u,v)) \in (A \times C) \times (B \times D)$	3,4

(6)	$(x,y)\in(A\times C)$	I 5, 2.6
$\square_1$(7)	$(x,y)\in \overrightarrow{p_1}\ f\cdot g \Rightarrow (x,y)\in A\times C$	CP 2,6
(8)	$(x,y)\in(A\times C)$	P
(9)	$x\in A \wedge y\in C$	traducción 8
(10)	$u = fx\in B \wedge v = gy\in D$	I. 1,9
(11)	$(fx, gy) = (u,v)$	10
(12)	$(f\cdot g)(x,y) = (u,v)$	I 1,11
(13)	((x, y), (u, v))∈f . g	traducción12
(14)	$(x,y)\in \overrightarrow{p_1}\ f\cdot g$	traducción 13
$\square_2$ (15)	$(x,y)\in(A\times C) \Rightarrow (x,y)\in \overrightarrow{p_1}\ f\cdot g$	CP 8,14
(16)	$(x,y)\in \overrightarrow{p_1}\ f\cdot g \Leftrightarrow (x,y)\in A\times C$	LB 7,15
$\square$ (17)	$\overrightarrow{p_1}\ f\cdot g = A\times C$	traducción 16

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overrightarrow{p_1}\ f\cdot g = A\times C$.

$\Rightarrow$) **(2)**Sea ((x, y), (u, v))∈f . g p.a. u y v.
(3)(4)(5) Como f . g $\subseteq$ $(A\times C)\times(B\times D)$ (Ejercico3.43i(1)),
Entonces $((x,y),(u,v))\in(A\times C)\times(B\times D)$ **(6)** o sea $(x,y)\in(A\times C)$ (2.6),
(7) cumpliéndose la implicación

$$(x,y)\in \overrightarrow{p_1}\ f\cdot g \Rightarrow (x,y)\in A\times C \qquad (\text{ I })$$

$\Rightarrow$)
(8) Sea ahora $(x,y)\in(A\times C)$. **(9)**O sea $x\in A\wedge y\in C$ (2.6). **(10)(11)**Sean $u = fx\in B$ y $v = gy\in D$ y $(fx, gy) = (u,v)$. **(12)**Por definición de f . g , se tiene $(f\cdot g)(x,y) = (u,v)$. **(13)**Es decir ((x, y), (u, v))∈f . g . **(14)**De donde $(x,y)\in \overrightarrow{p_1}\ f\cdot g$ (2.12), **(15)** cumpliéndose la implicación

$$(x,y)\in(A\times C) \Rightarrow (x,y)\in \overrightarrow{p_1}\ f\cdot g \qquad (\text{ II })$$

(16) De (I) y (II) se tiene la equivalecia $(x,y)\in \overrightarrow{p_1}\ f\cdot g \Leftrightarrow (x,y)\in A\times C$, **(17)**es decir $\overrightarrow{p_1}\ f\cdot g = A\times C$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{p_1}\ f \cdot g = A \times C$.

$\Rightarrow$)

Sea ((x, y), (u, v))$\in f\ .\ g$ p.a. u y v. Como $f\ .\ g \subseteq (A\times C)\times(B\times D)$ (Ejercicio 3.4 (3i(1)) entonces $((x,y),(u,v)) \in (A\times C)\times(B\times D)$ o sea $(x,y)\in(A\times C)$ (2.6) , cumpliéndose la implicación

$$(x,y)\in \vec{p_1}\ f\cdot g \Rightarrow (x,y)\in A\times C \quad (\text{ I })$$

$\Leftarrow$)

Sea ahora $(x,y)\in(A\times C)$; o sea $x\in A \wedge y\in C$ (2.6). Sean $u = fx \in B$ y $v = gy \in D$ y $(fx, gy) = (u,v)$. Por deficnición de f . g , se tiene $(f\cdot g)(x,y) = (u,v)$. Es decir ((x, y), (u, v))$\in f\ .\ g$. De donde $(x,y)\in \vec{p_1}\ f\cdot g$ (2.12), cumpliéndose la implicación

$$(x,y)\in(A\times C) \Rightarrow (x,y)\in \vec{p_1}\ f\cdot g \quad (\text{ II })$$

De (I) y (II) se tiene la equivalecia $(x,y)\in \vec{p_1}\ f\cdot g \Leftrightarrow (x,y)\in A\times C$, es decir $\vec{p_1}\ f\cdot g = A\times C$.

3 i(3)

ELD i (3)

Demostrar : *f* . *g* es relación funcional

Traducción: $((x,y),(u,v))\in f\cdot g \wedge ((x,y),(u',v'))\in f\cdot g \Rightarrow (u,v) = (u',v')$

(1)	***f*: *A*→*B* ∧ *g*: *C*→*D* ∧ (*f* . *g*)(x, y) = (*f*(x), g(y))**	**P**
(2)	$((x,y),(u,v))\in f\cdot g \wedge ((x,y),(u',v'))\in f\cdot g$	P
(3)	$f\cdot g(x,y) = (u,v) \wedge f\cdot g(x,y) = (u',v')$	traducción 2
(4)	$(fx, gy) = (u,v) \wedge (fx, gy) = (u',v')$	I 1,3
(5)	$u = u' \wedge v = v''$	4
(6)	$(u,v) = (u',v')$	5
(7)	$((x,y),(u,v))\in f\cdot g \wedge ((x,y),(u',v'))\in f\cdot g \Rightarrow (u,v) = (u',v')$	CP 2,6
(8)	$f\cdot g$ es relación funcional	traducción 7

3.(ii) Sea f: $A\rightarrow B\ \wedge\ g$: $B\rightarrow C$ Definamos al producto f **.** g de f y g por
(f . g)(x, y) = (f(x), g(y)).

Entonces f, g son biyectivas $\Rightarrow$ f **.** g es biyectiva.

ELD (ii)
Demostrar $f \,.\, g$ es biyección
Traducción : (1) $f \,.\, g$ *es inyección*
(2) $f \,.\, g$ *es biyección*

(1) $\boldsymbol{f: A \to B \ \wedge\ g: C \to D \wedge (f \,.\, g)(x, y) = (f(x), g(y))}$ **P**

ELD
Demostrar : $f \,.\, g$ *es inyección*
Traducción : $(f \cdot g)(x_1, y_1) = (f \cdot g)(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

(1)	$\boldsymbol{f: A \to B \ \wedge\ g: C \to D \wedge (f \,.\, g)(x, y) = (f(x), g(y))}$	**P**
(2)	***f, g* biyecciones**	**P**
(3)	$(f \cdot g)(x_1, y_1) = (f \cdot g)(x_2, y_2)$	P
(4)	$(fx_1, gy_1) = (fx_2, gy_2)$	I 3,1
(5)	$fx_1 = fx_2 \wedge gy_1 = gy_2$	4
(6)	$fx_1 = fx_2$	S 5
(7)	$fx_1 = fx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$	I. 2,3.20 (i)
(8)	$x_1 = x_2$	PP 6,7
(9)	$gy_1 = gy_2$	S5
(10)	$gy_1 = gy_2 \Rightarrow y_1 = y_2$	I. 2,3.20(ii)
(11)	$y_1 = y_2$	PP 9,10
(12)	$x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$	A 8,11
(13)	$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$	12
(14)	$(f \cdot g)(x_1, y_1) = (f \cdot g)(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$	CP 3,12
□ (15)	$f \,.\, g$ es inyección	I .14, 3.20(i)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $f \,.\, g$ es una inyección.

(3) Sea $(f \cdot g)(x_1, y_1) = (f \cdot g)(x_2, y_2)$.
(4) Por definición de $f \,.\, g$, se tiene $(fx_1, gy_1) = (fx_2, gy_2)$ **(5)** o sea $fx_1 = fx_2$ y $gy_1 = gy_2$. **(6) (7) (8) (9) (10) (11) (12)**Como f y g son inyectivas , entonces $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$. **(13) (14) (15)** Por lo tanto $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $f \,.\, g$ es una inyección.
Sea $(f \cdot g)(x_1, y_1) = (f \cdot g)(x_2, y_2)$.
Por definición de $f \,.\, g$, $(fx_1, gy_1) = (fx_2, gy_2)$ o sea $fx_1 = fx_2$ y $gy_1 = gy_2$.
Como f y g son inyectivas , entonces $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$.
Por lo tanto $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

ELD

Demostrar : *f . g es sobreyección*

Traducción : $\forall (u,v) \in B \times D\ \exists (x,y) \in A \times C :\ f \cdot g(x,y) = (u,v)$

(1)	***f*: *A*→*B* ∧ *g*: *C*→*D* ∧ (*f* . *g*)(x, y) = (*f*(x), g(y))**	**P**
(2)	***f, g* biyecciones**	**P**
(3)	$(u,v) \in B \times D$	P
(4)	$u \in B \wedge v \in D$	3
(5)	$\exists x \in A:\ fx = u \wedge \exists y \in C : gy = v$	I. 4,2 (*f* y *g* sobre)
(6)	$(u,v) \in B \times D\ \exists (x,y) \in A \times C : (fx, gy) = (u,v)$	3,5
(7)	$\forall (u,v) \in B \times D\ \exists (x,y) \in A \times C :\ f \cdot g(x,y) = (u,v)$	6,1
□(8)	$f \,.\, g$ es sobreyectiva	traducción 7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $f \,.\, g$ es sobreyectiva.
(3) Sea $(u,v) \in B \times D$. **(4)**Entonces $u \in B \wedge v \in D$. **(5)** Como f y g son sobreyectivas, existen $x \in A:\ fx = u$ y $y \in C : gy = v$. **(6)** **(7)** **(8)** Así que dado $(u,v) \in B \times D$ existe $(x,y) \in A \times C$ tal que $f \cdot g(x,y) = (u,v)$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $f \,.\, g$ es sobreyectiva. Sea $(u,v) \in B \times D$. Entonces $u \in B \wedge v \in D$. Como f y g son sobreyectivas, existen $x \in A:\ fx = u$ y $y \in C : gy = v$. Así que dado $(u,v) \in B \times D$ existe $(x,y) \in A \times C$ tal que $f \cdot g(x,y) = (u,v)$.

3 (iii) Sea f: $A \to B\ \wedge\ g$: $B \to C$.

Definamos al producto f**.** g de f y g por (f . g)(x, y) = (f(x), g(y)).
Entonces $\vec{p}_2(f.g) = \vec{p}_2\ f\ \text{x}\ \vec{p}_2\ g$

ELD

Demostrar : $\vec{p}_2(f.g) = \vec{p}_2\, f \text{ x } \vec{p}_2\, g$

Traducción : $(u,v) \in \vec{p}_2(f.g) \Leftrightarrow (u,v) \in \vec{p}_2\, f \times \vec{p}_2\, g$

(1) ***f*: *A*→*B* ∧ *g*: *C*→*D* ∧ (*f* . *g*)(x, y) = (*f*(x), g(y))** **P**

$(u,v) \in \vec{p}_2(f.g) \Leftrightarrow ((x,y),(u,v)) \in f \cdot g$ *p. a. x, y* 2.12

$\Leftrightarrow (f \cdot g)(x,y) = (u,v)$

$\Leftrightarrow (fx, gy) = (u,v)$ Def de $f \cdot g$

$\Leftrightarrow fx = u \wedge gy = v$ 2.5

$\Leftrightarrow (x,u) \in f \wedge (y,v) \in g$

$\Leftrightarrow u \in \vec{p}_2\, f \wedge v \in \vec{p}_2\, g$ 2.12

$\Leftrightarrow (u,v) \in \vec{p}_2\, f \times \vec{p}_2\, g$ 2.6

4. Sean $f_1 : A_1 \to B_1$, $f_2 : A_2 \to B_2$ biyecciones tales que $A_1 \cap A_2 = \phi$ y $B_1 \cap B_2 = \phi$. Sea $f = f_1 \cup f_2$. Entonces $f : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$ es una biyección.

ELD

Demostrar $f : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$ **es una biyección**

Traducción : (i) f *es inyectiva*

(ii) f *es sobreyectiva*

(1) $f_1 : A_1 \to B_1$, $f_2 : A_2 \to B_2$ son biyecciones **P**

(2) $A_1 \cap A_2 = \phi \wedge B_1 \cap B_2 = \phi. \wedge f = f_1 \cup f_2$ **P**

4 (i)

ELD

Demostrar : $f : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$ ***es inyección***

Traducción : $fx_1 = fx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

(1) $f_1 : A_1 \to B_1$, $f_2 : A_2 \to B_2$ **son biyecciones** **P**

(2) $A_1 \cap A_2 = \phi \wedge B_1 \cap B_2 = \phi. \wedge f = f_1 \cup f_2$ **P**

(3) $fx_1 = fx_2$ P

(4)	$x_1, x_2 \in A_1 \cup A_2$	1
(5)	$x_1, x_2 \in A_1 \vee x_1, x_2 \in A_2$	1.11(ii)
(6)	$x_1, x_2 \in A_1$	P
(7)	$fx_1 = f_1x_1 \wedge fx_2 = f_1x_2$	6,1,2
(8)	$f_1x_1 = f_1x_2$	3,7
(9)	$x_1 = x_2$	8,1 (f_1 1-1)
(10)	$x_1, x_2 \in A_1 \Rightarrow x_1 = x_2$	CP 6,9
(11)	$x_1, x_2 \in A_2$	P
(12)	$fx_1 = f_2x_1 \wedge fx_2 = f_2x_2$	1,2,11
(13)	$f_2x_1 = f_2x_2$	3,12
(14)	$x_1 = x_2$	1,13 (f_2 1-1)
(15)	$x_1, x_2 \in A_2 \Rightarrow x_1 = x_2$	CP 11,14
(16)	$x_1 = x_2 \vee x_1 = x_2$	Ds 5,10,15
(17)	$x_1 = x_2$	Dp 16
(18)	$fx_1 = fx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$	CP 3,17
□ (19)	f es inyectiva	I trad.18,3.20(i)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $f : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$ es una inyección.

(3)(4) Sea $fx_1 = fx_2$ con $x_1, x_2 \in A_1 \cup A_2$ **.(5)** Entonces $x_1, x_2 \in A_1$ o $x_1, x_2 \in A_2$**.** **(6)**Si $x_1, x_2 \in A_1$ **,(7)**entonces $fx_1 = f_1x_1$ y $fx_2 = f_1x_2$ porque $A_1 \cap A_2 = \phi$ y $B_1 \cap B_2 = \phi$. y $f = f_1 \cup f_2$ **.(8)** O sea $f_1x_1 = f_1x_2$. **(9) (10)**Como f_1 es inyectiva, $x_1 = x_2$ **(11)** Si $x_1, x_2 \in A_2$, **(12)**entonces $fx_1 = f_2x_1$ y $fx_2 = f_2x_2$ debido a que $A_1 \cap A_2 = \phi$ y $B_1 \cap B_2 = \phi$ y $f = f_1 \cup f_2$. **(13)(14)**De donde $f_2x_1 = f_2x_2$ y $x_1 = x_2$ por ser f_2 inyectiva. **(15) (16) (17)** Así que sea que $x_1, x_2 \in A_1$ o $x_1, x_2 \in A_2$ de todas formas se tiene que $x_1 = x_2$ **.(18) (19)** O sea que *f* es inyectiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $f : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$ es una inyección.

Sea $fx_1 = fx_2$ con $x_1, x_2 \in A_1 \cup A_2$**.** Entonces $x_1, x_2 \in A_1$ o $x_1, x_2 \in A_2$**.** Si $x_1, x_2 \in A_1$ **,**entonces $fx_1 = f_1x_1$ y $fx_2 = f_1x_2$ porque $A_1 \cap A_2 = \phi$ y $B_1 \cap B_2 = \phi$.

y $f = f_1 \cup f_2$. O sea $f_1x_1 = f_1x_2$. Como f_1 es inyectiva, $x_1 = x_2$ Si $x_1, x_2 \in A_2$, entonces $fx_1 = f_2x_1$ y $fx_2 = f_2x_2$ debido a que $A_1 \cap A_2 = \phi$ y $B_1 \cap B_2 = \phi$ y $f = f_1 \cup f_2$. De donde $f_2x_1 = f_2x_2$ y $x_1 = x_2$ por ser f_2 inyectiva. Así que sea que $x_1, x_2 \in A_1$ o $x_1, x_2 \in A_2$ de todas formas se tiene que $x_1 = x_2$.O sea que *f* es inyectiva.

4 (ii)

ELD

Demostrar : $f : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$ **es una sobreyección**

Traducción : $(\forall y \in B_1 \cup B_2)(\exists x \in A_1 \cup A_2 : y = f(x))$

(1)	$f_1 : A_1 \to B_1,\ f_2 : A_2 \to B_2$ **son biyecciones**	**P**
(2)	$A_1 \cap A_2 = \phi \ \wedge\ B_1 \cap B_2 = \phi. \ \wedge\ f = f_1 \cup f_2$	**P**
(3)	$y \in B_1 \cup B_2$	P
(4)	$y \in B_1 \vee y \in B_2$	3
(5)	$y \in B_1$	P
(6)	$\exists x \in A_1 : y = f_1x$	1,2,5 (f_1 sobre)
(7)	$\exists x \in A_1 \cup A_2 : y = fx$	2,6
(8)	$y \in B_1 \Rightarrow \exists x \in A_1 \cup A_2 : y = fx$	CP5,7
(9)	$y \in B_2$	P
(10)	$\exists x \in A_2 : y = f_2x$	1,2,9(f_2 sobre)
(11)	$\exists x \in A_1 \cup A_2 : y = fx$	2,10
(12)	$y \in B_2 \Rightarrow \exists x \in A_1 \cup A_2 : y = fx$	CP 9,11
(13)	$(\exists x \in A_1 \cup A_2 : y = fx) \vee (\exists x \in A_1 \cup A_2 : y = fx)$	Ds 4,8,12
(14)	$(\exists x \in A_1 \cup A_2 : y = fx)$	Dp 13
(15)	$(\forall y \in B_1 \cup B_2)(\exists x \in A_1 \cup A_2 : y = f(x))$	3,14
□(16)	$f : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$ es sobreyectiva	I trad.15,3.29(ii)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $f : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$ es una sobreyección.

(3) Sea $y \in B_1 \cup B_2$.**(4)** Entonces $y \in B_1$ o $y \in B_2$.

(5)(6) Si $y \in B_1$, existe $x \in A_1 : y = f_1x$ (por hipótesis f_1 es sobreyectiva). **(7)** Ahora**,** $x \in A_1 \cup A_2$ y $y = f(x)$ ya que por hipótesis

$A_1 \cap A_2 = \phi$ **,** $B_1 \cap B_2 = \phi$ y $f = f_1 \cup f_2$. **(8)** Por lo tanto dado $y \in B_1$ existe $x \in A_1 \cup A_2$ tal que $y = f(x)$ **.**

(9) Si $y \in B_2$,**(10)**existe $x \in A_2$ $: y = f_2 x$ porque,por hipótesis, f_2 es sobreyectiva.
(11) Existe $x \in A_1 \cup A_2$ y $y = f(x)$ debido a que por hipótesis $A_1 \cap A_2 = \phi$ y $B_1 \cap B_2 = \phi$ y $f = f_1 \cup f_2$**.**

(12) Por lo tanto dado $y \in B_2$ existe $x \in A_1 \cup A_2 : y = f(x)$ **. (13)(14)(15)**Así que sea que $y \in B_1$ o $y \in B_2$ de todas formas existe $x \in A_1 \cup A_2 : y = f(x)$ **. (16)**Por lo tanto queda demostrado que *f* es sobreyectiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $f : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$ es una sobreyección.
Sea $y \in B_1 \cup B_2$**.**Entonces $y \in B_1$ o $y \in B_2$**.**

Si $y \in B_1$, existe $x \in A_1 : y = f_1 x$ (por hipótesis f_1 es sobreyectiva). Ahora**,** $x \in A_1 \cup A_2$ y $y = f(x)$ ya que por hipótesis $A_1 \cap A_2 = \phi$ y $B_1 \cap B_2 = \phi$ y $f = f_1 \cup f_2$. Por lo tanto, dado $y \in B_1$ existe $x \in A_1 \cup A_2$ tal que $y = f(x)$ **.**

Si $y \in B_2$, existe $x \in A_2$ $: y = f_2 x$ porque por hipótesis f_2 es sobreyectiva. Existe $x \in A_1 \cup A_2$ y $y = f(x)$ debido a que por hipótesis $A_1 \cap A_2 = \phi$ y $B_1 \cap B_2 = \phi$ y $f = f_1 \cup f_2$**.**

Por lo tanto, dado $y \in B_2$ existe $x \in A_1 \cup A_2 : y = f(x)$ **.** Así que sea que $y \in B_1$ o $y \in B_2$ de todas formas existe $x \in A_1 \cup A_2 : y = f(x)$ **.** De esta manera queda demostrado que *f* es sobreyectiva.

5(i). Sea *f*: $A \to B$ $\wedge$ *g*: $B \to A$.
Entonces $f \circ g$ inyectiva $\Rightarrow$ *f* es inyectiva.

ELD
Demostrar : *f* *es inyección*
Traducción : $fx_1 = fx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

(1)	***f*: $A \to B$, *g*: $B \to A$**	**P**
(2)	$f \circ g$ **inyectiva**	**P**
(3)	$fx_1 = fx_2$	P
(4)	$(g(fx_1) = g(fx_2))$	3

(5)	$(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$	4
(6)	$(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$	trad.2
(7)	$x_1 = x_2$	PP 4,5
(8)	$fx_1 = fx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$	CP 3,6
□(9)	f es inyectiva	traducción 8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que f es una inyección. **(3)**Sea $fx_1 = fx_2$.**(4)** **(5)**Entonces $g(fx_1) = g(fx_2)$ o sea $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$. **(6)(7)(8)(9)** Como $f \circ g$ es inyectiva,entonces $x_1 = x_2$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que f es una inyección.
Sea $fx_1 = fx_2$. Entonces $g(fx_1) = g(fx_2)$ o sea $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$.
Como $f \circ g$ es inyectiva,entonces $x_1 = x_2$.

5. (ii) Sea $f: A \to B \wedge g: B \to A$
$f \circ$ g sobreyectiva $\Rightarrow g$ es sobreyectiva

ELD

Demostrar : *g es sobreyectiva*

Traducción : $(\forall z \in A)(\exists y \in B : gy = z)$

(1)	$\boldsymbol{f: A \to B}$ **,** $\boldsymbol{g: B \to A}$ **y** $g \circ f : \boldsymbol{A \to A}$	**P**
(2)	$f \circ g$ **sobreyectiva**	**P**
(3)	$z \in A$	P
(4)	$\exists x \in A : (g \circ f)(x) = z$	3,2,1
(5)	$g(fx) = z$	4
(6)	y = $f(x) \in B$	1
(7)	$(\forall z \in A)(\exists y \in B : gy = z)$	3,5,6
□(8)	g es sobreyectiva	traducción 7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que g es sobreyectiva.

(3) Sea $z \in A$. **(4)**Como $g \circ f$ es sobreyectiva existe $x \in A : (g \circ f)(x) = z$,**(5)** es decir, $g(fx) = z$. **(6)**Como y = $f(x) \in B$, ya que f es una función de A en B, **(7)** entonces se demuestra que existe $y \in B : gy = z$. **(8)**Así que g es sobreyectiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que g es sobreyectiva.

Sea $z \in A$. Como $g \circ f$ es sobreyectiva existe $x \in A : (g \circ f)(x) = z$, es decir, $g(fx) = z$. Como y = $f(x) \in B$, ya que f es una función de A en B, entonces se demuestra que existe $y \in B : gy = z$. Así que g es sobreyectiva.

5. (iii) Sea $f: A \to B \wedge g: B \to A$

$f \circ$ g biyectiva $\Rightarrow f$ es inyectiva y g sobreyectiva.

ELD

Demostrar : f es inyectiva $\wedge$ g sobreyectiva.

(1)	$f: A \to B$, $g: B \to A$	**P**
(2)	$f \circ g$ biyectiva	**P**
(3)	$f \circ g$ inyectiva	(2)
(4)	f inyectiva	(3), ejercicio 5 (i)
(5)	$f \circ g$ sobreyectiva	(2)
(6)	g sobreyectiva	(5), Ejercicio 5(ii)
□ (7)	f inyectiva $\wedge$ g sobreyectiva	A 4,6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que f es inyectiva y g sobreyectiva. **(4)** f es inyectiva debido a que $f \circ g$ es inyectiva y por 5(i). **(5)(6)**g sobreyectiva porque $f \circ g$ es sobreyectiva y por 5(ii). **(7)** Por lo tanto f es binyectiva y g es sobreyectiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que f es inyectiva y g sobreyectiva.

f es inyectiva debido a que $f \circ g$ inyectiva y por 5(i). g es sobreyectiva porque $f \circ g$ es sobreyectiva y por 5(ii). Por lo tanto f es inyectiva y g es sobreyectiva.

6. (i) Sean $f_1, f_2 : A \to B,\ g : B \to C,\ h_1, h_2 : C \to D$

g inyectiva $\Leftrightarrow (h_1 \circ g = h_2 \circ g \Rightarrow h_1 = h_2)$

ELD

Demostrar : *g inyectiva* $\Leftrightarrow (g \circ f_1 = g \circ f_2 \Rightarrow f_1 = f_2)$

:

(1)	$f_1, f_2 : A \to B,\ g : B \to C,\ h_1, h_2 : C \to D$	**P**

6.(i) $\Rightarrow$)

ELD

Demostrar : $g \circ f_1 = g \circ f_2 \Rightarrow f_1 = f_2$

(1)	$f_1, f_2 : A \to B,\ g : B \to C,\ h_1, h_2 : C \to D$	**P**
(2)	***g* inyectiva**	**P**
(3)	$g \circ f_1 = g \circ f_2$	P
(4)	$(g \circ f_1)(x) = (g \circ f_2)(x), \forall x \in A$	3,1
(5)	$g(f_1(x)) = g(f_2(x)), \forall x \in A$	4
(6)	$f_1(x) = f_2(x), \forall x \in A$	5,2
(7)	$f_1 = f_2$	6, 3.4
□(8)	$g \circ f_1 = g \circ f_2 \Rightarrow f_1 = f_2$	CP 3,7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $g \circ f_1 = g \circ f_2 \Rightarrow f_1 = f_2$.

(3) Supongamos que $g \circ f_1 = g \circ f_2$. **(4)**Entonces $(g \circ f_1)(x) = (g \circ f_2)(x), \forall x \in A$; **(5)** o sea $g(f_1(x)) = g(f_2(x)), \forall x \in A$. **(6)** Como g es inyectiva entonces $f_1(x) = f_2(x), \forall x \in A$ **(7)(8)**o sea $f_1 = f_2$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $g \circ f_1 = g \circ f_2 \Rightarrow f_1 = f_2$.
Supongamos que $g \circ f_1 = g \circ f_2$. Entonces $(g \circ f_1)(x) = (g \circ f_2)(x), \forall x \in A$ o sea $g(f_1(x)) = g(f_2(x)), \forall x \in A$. Como g es inyectiva, $f_1(x) = f_2(x), \forall x \in A$ o sea $f_1 = f_2$.

6. (i) $\Leftarrow$)

ELD

Demostrar : *g* inyectiva

Traducción: $gy_1 = gy_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

(1)	$f_1, f_2 : A \to B,\ g : B \to C,\ h_1, h_2 : C \to D$	**P**
(2)	$g \circ f_1 = g \circ f_2 \Rightarrow f_1 = f_2$	**P**
(3)	$gy_1 = gy_2$	P
(4)	$y_1 = f_1(x) \wedge y_2 = f_2(x)$	P,1
(5)	$g(f_1(x)) = g(f_2(x))$	I 3,4
(6)	$(g \circ f_1)(x) = (g \circ f_2)(x)$	5
(7)	$g \circ f_1 = g \circ f_2$	I 6, 3.4
(8)	$f_1 = f_2$	PP 2,7
(9)	$f_1(x) = f_2(x)$	I 8, 3.4
(10)	$y_1 = y_2$	I 9,4
(11)	$gy_1 = gy_2 \Rightarrow y_1 = y_2$	CP3,10
□(12)	g inyectiva	I 11,3.20(i)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que g es inyectiva.
(3) Supongamos que $gy_1 = gy_2$**.** **(4)**Sea $y_1 = f_1(x)$ y $y_2 = f_2(x)$**.(5)(6)(7)**Entonces $g(f_1(x)) = g(f_2(x))$,es decir, $(g \circ f_1)(x) = (g \circ f_2)(x)$ y $g \circ f_1 = g \circ f_2$ (3.4). **(7)**Debido a que $g \circ f_1 = g \circ f_2 \Rightarrow f_1 = f_2$ (por la segunda hipótesis), entonces **(8)** $f_1 = f_2$**.(9)** Es decir que $f_1(x) = f_2(x)$ (3.4) **(10)(11)** y por lo tanto $y_1 = y_2$**.**

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que g es inyectiva.

Supongamos que

$$gy_1 = gy_2.$$

Sea

$$y_1 = f_1(x) \text{ y } y_2 = f_2(x).$$

Entonces

$$g(f_1(x)) = g(f_2(x)).$$

Es decir

$$(g \circ f_1)(x) = (g \circ f_2)(x)$$

Por (3.4),

$$g \circ f_1 = g \circ f_2$$

Debido a que

$$g \circ f_1 = g \circ f_2 \Rightarrow f_1 = f_2,$$

entonces

$$f_1 = f_2;$$

Esto quiere decir que $f_1(x) = f_2(x)$ (3.4) y por lo tanto $y_1 = y_2$.

6.(ii) Sean $f_1, f_2 : A \to B,\ g : B \to C,\ h_1, h_2 : C \to D$

g sobreyectiva $\Leftrightarrow (h_1 \circ g = h_2 \circ g \Rightarrow h_1 = h_2)$

6.(ii) $\Rightarrow$)

ELD

Demostrar : $h_1 \circ g = h_2 \circ g \Rightarrow h_1 = h_2$

(1)	$f_1, f_2 : A \to B,\ g : B \to C,\ h_1, h_2 : C \to D$	**P**
(2)	***g* sobreyectiva**	**P**
(3)	$h_1 \circ g = h_2 \circ g$	P
(4)	$(h_1 \circ g)(y) = (h_2 \circ g)(y), \forall y \in B$	3
(5)	$h_1(g(y)) = h_2(g(y)), \forall y \in B$	4
(6)	$z = g(y) \in C$	P,1
(7)	$h_1(z) = h_2(z), \forall z \in C$	I 5,6,2
(8)	$h_1 = h_2$	7, 3.4
(9)	$h_1 \circ g = h_2 \circ g \Rightarrow h_1 = h_2$	CP 3,8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar la implicación $h_1 \circ g = h_2 \circ g \Rightarrow h_1 = h_2$.

(3) Supongamos que $h_1 \circ g = h_2 \circ g$. **(4)**Entonces $(h_1 \circ g)(y) = (h_2 \circ g)(y), \forall y \in B$; **(5)**es decir $h_1(g(y)) = h_2(g(y))$. **(6)(7)**Como g es una función de B en C sea $z = g(y) \in C$ y entonces $h_1(z) = h_2(z), \forall z \in C$. **(8)**Pero esto quiere decir que $h_1 = h_2$. **(9)**Por lo tanto se cumple la condicional $h_1 \circ g = h_2 \circ g \Rightarrow h_1 = h_2$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar la implicación $h_1 \circ g = h_2 \circ g \Rightarrow h_1 = h_2$.

Supongamos que $h_1 \circ g = h_2 \circ g$. Entonces $(h_1 \circ g)(y) = (h_2 \circ g)(y), \forall y \in B$; es decir $h_1(g(y)) = h_2(g(y))$. Como g es una función de B en C sea $z = g(y) \in C$ y entonces $h_1(z) = h_2(z), \forall z \in C$**.** Pero esto quiere decir que $h_1 = h_2$**.** Por lo tanto se cumple la condicional $h_1 \circ g = h_2 \circ g \Rightarrow h_1 = h_2$.

6.(ii) $\Leftarrow$) pendiente.

7.(i) Sean f: $A \to B \wedge g: C \to D$

Existe h: A→C, tal que $f = g \circ h \Leftrightarrow \vec{p}_2\, f \subseteq \vec{p}_2\, g$

$\Rightarrow$)

ELD

Demostrar : $\vec{p}_2\, f \subseteq \vec{p}_2\, g$

Traducción : $y \in \vec{p}_2\, f \Rightarrow y \in \vec{p}_2\, g$

(1)	f: A→B $\wedge$ g: C→D	**P**
(2)	$\exists$ h: A→C : $f = g \circ h$	**P**
(3)	$y \in \vec{p}_2\, f$	P
(4)	$(x, y) \in f$ p.a. x∈A	3,1
(5)	$y = f(x)$, x∈A	traducción 4
(6)	$z = h(x)$, x∈A	P, 2
(7)	$f(x) = g(h(x))$, x∈A	2
(8)	$y = g(h(x))$, x∈A	I 5,2,7
(9)	$(h(x), y) \in g$	traducción 8
(10)	$y \in \vec{p}_2\, g$	traducción 9
(11)	$y \in \vec{p}_2\, f \Rightarrow y \in \vec{p}_2\, g$	CP 3,10
□(12)	$\vec{p}_2\, f \subseteq \vec{p}_2\, g$	traducción 11

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{p}_2\, f \subseteq \vec{p}_2\, g$.

(3) Sea $y \in \vec{p}_2\, f$ **.(4)(5)** Esto significa que $(x, y) \in f$ p.a. x∈A o sea $y = f(x)$. **(6)**Sea $z = h(x)$ con x∈A. **(7)(8)(9)** Como $f = g \circ h$, $f(x) = g(h(x))$ o sea $(h(x), y) \in g$; **(10) (11)(12)**de donde $y \in \vec{p}_2\, g$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{p}_2\, f \subseteq \vec{p}_2\, g$.

Sea $y \in \vec{p}_2\, f$. Entonces $(x, y) \in f$ para algún x∈A o sea $y = f(x)$.
Sea z = h(x) con x∈A. Como $f = g \circ h$, entonces f(x) = g(h(x)) o sea (h(x), y)∈g;
de donde $y \in \vec{p}_2\, g$.

7. (ii) ⇐) (pendiente)

8.(i) Sea f: A→B. f inyectiva ⇔ $\vec{f}$ inyectiva.

⇒) **ELD**

Demostrar : $\vec{f}$ **inyectiva**

Traducción : $\vec{f}\,C_1 = \vec{f}\,C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$

(1)	f: A→B	**P**
(2)	f es inyectiva	**P**
(3)	$\vec{f}\,C_1 = \vec{f}\,C_2$	P
(4)	$\vec{f}\,C_1 - \vec{f}\,C_2 = \phi$	3
(5)	$\vec{f}(C_1 - C_2) = \vec{f}\,C_1 - \vec{f}\,C_2$	2, 3.22
(6)	$\vec{f}(C_1 - C_2) = \phi$	3,4
(7)	$C_1 - C_2 = \phi$	5, ejercicio 3.3 (2 (iii))
(8)	$C_1 = C_2$	6
□(9)	$\vec{f}\,C_1 = \vec{f}\,C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$	CP 3,7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{f}$ inyectiva.

(3)(4) Sea $\vec{f}\,C_1 = \vec{f}\,C_2$ o sea $\vec{f}\,C_1 - \vec{f}\,C_2 = \phi$.

(5)(6) Debido a que $\vec{f}(C_1 - C_2) = \vec{f}\,C_1 - \vec{f}\,C_2$ (por 3.22) **,** $\vec{f}(C_1 - C_2) = \phi$**;**
(7)lo que implica que $C_1 - C_2 = \phi$ (Ejercicio 3.3 (2(iii)) **(8)(9)** o sea $C_1 = C_2$**.**

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{f}$ inyectiva.

Sea $\overrightarrow{f}C_1 = \overrightarrow{f}C_2$ o sea $\overrightarrow{f}C_1 - \overrightarrow{f}C_2 = \phi$.

Debido a que $\overrightarrow{f}(C_1 - C_2) = \overrightarrow{f}C_1 - \overrightarrow{f}C_2$ (por 3.22) **,** $\overrightarrow{f}(C_1 - C_2) = \phi$**;** lo que implica que $C_1 - C_2 = \phi$ (Ejercicio 3.3 (2(iii)) o sea $C_1 = C_2$.

$\Leftarrow$)

ELD

Demostrar : *f* inyectiva

Traducción : $fx_1 = fx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

(1) *f*: A$\to$B		**P**
(2) $\overrightarrow{f}$ *es inyectiva*		**P**
(3)	$fx_1 = fx_2$	P
(4)	$\overrightarrow{f}\{x_1\} = \overrightarrow{f}\{x_2\}$	3
(5)	$\overrightarrow{f}\{x_1\} = \overrightarrow{f}\{x_2\} \Rightarrow \{x_1\} = \{x_2\}$	traducción 2
(6)	$\{x_1\} = \{x_2\}$	PP 4,5
(7)	$x_1 = x_2$	6
(8) $fx_1 = fx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$		CP 3,7
□ (9) *f* es inyectiva		traducción 8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que *f* es inyectiva.

(3) Sea $fx_1 = fx_2$. **(4)**Entonces $\overrightarrow{f}\{x_1\} = \overrightarrow{f}\{x_2\}$.**(5)(6)(7)(8)(9)** Como, por hipótesis, $\overrightarrow{f}$ es inyectiva, entonces $\{x_1\} = \{x_2\}$ y por lo tanto $x_1 = x_2$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que *f* es inyectiva.

Sea $fx_1 = fx_2$. Entonces $\overrightarrow{f}\{x_1\} = \overrightarrow{f}\{x_2\}$. Como, por hipótesis, $\overrightarrow{f}$ es inyectiva, entonces $\{x_1\} = \{x_2\}$ y por lo tanto $x_1 = x_2$.

8.(ii) Sea *f*: A$\to$B

f sobreyectiva $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{f}$ sobreyectiva.

$\Rightarrow$) **ELD**

Demostrar : $\vec{f}$ **es sobreyectiva**

Traducción : $(\forall D \in P(B))(\exists C \in P(A) : \vec{f}\, C = D)$

(1)	f**: A→B**	**P**
(2)	f ***es sobreyectiva***	**P**
(3)	$D \in P(B)$	P
(4)	C = $\overleftarrow{f}\, D$	P
(5)	$\vec{f}\, C = \vec{f}\, \overleftarrow{f}\, D$	4
(6)	$\vec{f}\, \overleftarrow{f}\, D = D$	2, 3.23
(7)	$\vec{f}\, C$ = D	I 5,6
(8)	$\forall D \in P(B) \exists C \in P(A) : \vec{f}\, C = D$	3,1,7
□ (9)	$\vec{f}$ es sobreyectiva	traducción 8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{f}$ es sobreyectiva.

(3)(4) Sea $D \in P(B)$ y C = $\overleftarrow{f}\, D$. **(5)** Entonces $\vec{f}\, C = \vec{f}\, \overleftarrow{f}\, D$. **(6)(7)**Pero $\vec{f}\, \overleftarrow{f}\, D = D$ (3.23) y $\vec{f}\, C$ = D. **(8)**Así que dado $D \in P(B)$ existe $C \in P(A) : \vec{f}\, C = D$. **(9)**Esto quiere decir que $\vec{f}$ es sobreyectiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{f}$ es sobreyectiva.

Sea $D \in P(B)$ y C = $\overleftarrow{f}\, D$. Entonces $\vec{f}\, C = \vec{f}\, \overleftarrow{f}\, D$. Pero $\vec{f}\, \overleftarrow{f}\, D = D$ (3.23) y $\vec{f}\, C$ = D. Así que dado $D \in P(B)$ existe $C \in P(A) : \vec{f}\, C = D$. Esto quiere decir que $\vec{f}$ es sobreyectiva.

$\Leftarrow$)

ELD

Demostrar : ***f*** **es sobreyectiva**

Traducción : $(\forall y \in B)(\exists x \in A : y = f(x))$

(1) f**: A→B** **P**

(2) $\overrightarrow{f}$ ***es sobreyectiva***		**P**
(3)	$y \in B$	P
(4)	$\{y\} \in P(B)$	3
(5)	$\exists C \in P(A) : \overrightarrow{f}\, C = \{y\}$	2,4
(6)	$\exists x \in C : f(x) \in \{y\}$	5
(7)	$\exists x \in A : y = f(x)$	5,6
(8)	$(\forall y \in B)(\exists x \in A : y = f(x))$	3,7
□ (9)	f es sobreyectiva	traducción 8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que f es sobreyectiva.

(3) Sea $y \in B$.**(4)** Entonces $\{y\} \in P(B)$. **(5)**Debido a que $\overrightarrow{f}$ es sobreyectiva, existe $C \in P(A)$ tal que $\overrightarrow{f}\, C = \{y\}$.**(6)** De esta última igualdad se desprende que $f(x) \in \{y\}$ para algún $x \in C$. **(7)**Como $C \subseteq A$, se ha demostrado que existe $x \in A : y = f(x)$,**(8)(9)** lo que quiere decir que f es sobreyectiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que f es sobreyectiva.

Sea $y \in B$. Entonces $\{y\} \in P(B)$. Debido a que $\overrightarrow{f}$ es sobreyectiva, existe $C \in P(A)$ tal que $\overrightarrow{f}\, C = \{y\}$. De esta última igualdad se desprende que $f(x) \in \{y\}$ para algún $x \in C$. Como $C \subseteq A$, se ha demostrado que existe $x \in A : y = f(x)$, lo que quiere decir que f es sobreyectiva

8.(iii) Sea f: A→B

f inyectiva $\Leftrightarrow \overleftarrow{f}$ sobreyectiva

⇒) **ELD**

Demostrar : $\overleftarrow{f}$ **es sobreyectiva**

Traducción : $(\forall C \in P(A))(\exists D \in P(B) : \overleftarrow{f}\, D = C)$

(1) ***f*: A→B**	**P**
(2) f ***es sobreyectiva***	**P**

(3)	$C \in P(A)$	P
(4)	$D = \overrightarrow{f}\, C$	P
(5)	$\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\, C = C$	2, 3.22 (v)
(6)	$\overleftarrow{f}\, D = C$	I 4,5
(7)	$(\forall C \in P(A))(\exists D \in P(B) : \overleftarrow{f}\, D = C)$	traducción 6
□(8)	$\overleftarrow{f}$ es sobreyectiva	traducción 7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overleftarrow{f}$ sobreyectiva.

3)(4) Sean $C \in P(A)$ y $D = \overrightarrow{f}\, C$**.** **(5)(6)**Debido a que $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\, C = C$ (3.22(v)), entonces $\overleftarrow{f}\, D = C$. **(7)**Así que se ha demostrado que dado $C \in P(A)$ existe $D \in P(B) : \overleftarrow{f}\, D = C$, **(8)**lo que quiere decir que $\overleftarrow{f}$ es sobreyectiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overleftarrow{f}$ sobreyectiva.

Sean

$$C \in P(A) \text{ y } D = \overrightarrow{f}\, C.$$

Por (3.22(v)),

$$\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\, C = C$$

Entonces

$$\overleftarrow{f}\, D = C .$$

Así que se ha demostrado que dado $C \in P(A)$ existe $D \in P(B) : \overleftarrow{f}\, D = C$, lo que quiere decir que $\overleftarrow{f}$ es sobreyectiva.

$\Leftarrow$)

ELD

Demostrar : *f* inyectiva

Traducción : $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\, C = C$ (3.22)

(1)	***f*: A→B**	**P**
(2)	$\overleftarrow{f}$ **es sobreyectiva**	**P**

(3)	$C \subseteq \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C$	Ejercicio 3.3 (6(i))
(4)	$x \in \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C$	P
(5)	$f(x) \in \overrightarrow{f}\,C$	4, 3.15
(6)	$x \in C$	5, 3.15
(7)	$x \in \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C \Rightarrow x \in C$	CP4,6
(8)	$\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C \subseteq C$	traducción 7
(9)	$C \subseteq \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C \wedge \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C \subseteq C$	A 3,8
(10)	$\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C = C$	9, 1.4 (ii)
□ (11)	f es inyectiva	10, 3.22

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que f es inyectiva o sea $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C = C$ (3.22).

(3) Sabemos que $C \subseteq \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C$ (Ejercicio 3.3 (6(i))). **(4)**Sea $x \in \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C$, **(5)** **(6)** entonces $f(x) \in \overrightarrow{f}\,C$ (3.15) y $x \in C$ (3.15). **(7)** **(8)**O sea $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C \subseteq C$. **(9)(10)(11)**Por lo tanto $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C = C$ o sea f inyectiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que f es inyectiva o sea $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C = C$ (3.22).

Sabemos que $C \subseteq \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C$ (Ejercicio 3.3 (6(i))). Sea $x \in \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C$, entonces $f(x) \in \overrightarrow{f}\,C$ (3.15) y $x \in C$ (3.15). O sea $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C \subseteq C$. Así que $\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,C = C$, y por lo tanto f inyectiva.

OBSERVACIÓN: En esta demostración no hubo necesidad de la hipótesis (2).

8. (iv) Sea f: A→B. f sobreyectiva $\Leftrightarrow \overleftarrow{f}$ inyectiva

⇒) **ELD**

Demostrar : $\overleftarrow{f}$ es inyectiva

Traducción : $\overleftarrow{f}\,D_1 = \overleftarrow{f}\,D_2 \Rightarrow D_1 = D_2$

(1)	***f*: A→B**	**P**
(2)	***f* es sobreyectiva**	**P**

(3)	$\overleftarrow{f} D_1 = \overleftarrow{f} D_2$	P
(4)	$\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f} D_1 = \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f} D_2$	P
(5)	$\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f} D_1 = D_1$	2, 3.23
(6)	$\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f} D_2 = D_2$	2, 3.23
(7)	$D_1 = D_2$	I 4,5,6
(8)	$\overleftarrow{f} D_1 = \overleftarrow{f} D_2 \Rightarrow D_1 = D_2$	CP 3,7
□(9)	$\overleftarrow{f}$ es inyectiva	traducción 8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overleftarrow{f}$ inyectiva.

(3) Supongamos que $\overleftarrow{f} D_1 = \overleftarrow{f} D_2$. **(4)**Entonces $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f} D_1 = \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f} D_2$**.** **(5)(6)**Por 3.23, $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f} D_1 = D_1$ y $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f} D_2 = D_2$, **(7) (8)(9)**y tanto $D_1 = D_2$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overleftarrow{f}$ inyectiva.

Supongamos que $\overleftarrow{f} D_1 = \overleftarrow{f} D_2$. Entonces $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f} D_1 = \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f} D_2$**.** Por 3.23, $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f} D_1 = D_1$ y $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f} D_2 = D_2$, y por lo tanto $D_1 = D_2$.

⇐) **ELD**

Demostrar : *f* es sobreyectiva

Traducción : $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f} D = D$ (3.23)

(1)	***f*: A→B**	**P**
(2)	$\overleftarrow{f}$ ***es inyectiva***	**P**
(3)	$\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f} D \subseteq D$	Ejercicio 3.3 (6(ii))
(4)	$y \in D : y = f(x)$	P
(5)	$x \in \overleftarrow{f} D$	4, 3.15
(6)	$f(x) \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f} D$	5, 3.15

(7)	$y \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D$	I 4,5,6
(8)	$y \in D \Rightarrow y \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D$	CP 4,7
(9)	$D \subseteq \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D$	traducción 8
(10)	$\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D \subseteq D \wedge D \subseteq \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D$	A 3,9
(11)	$\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D = D$	10, 1.4(ii)
□(12)	*f* sobreyectiva	traducción 11 (3.23)

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que *f* sobreyectiva, demostrando que $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D = D$ (3.23).

(3) Sabemos que $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D \subseteq D$ (Ejercicio 3.3 (6(ii))). **(4)**Para demostrar que $D \subseteq \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D$ sea $y \in D : y = f(x)$. **(5)**Entonces $x \in \overleftarrow{f}\,D$,**(6)** $f(x) \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D$ (3.15) y **(7) (8)(9)(10)(11)(12)** $y \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que *f* sobreyectiva, demostrando que $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D = D$ (3.23).

Sabemos que $\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D \subseteq D$ (Ejercicio 3.3 (6(ii))). Para demostrar que $D \subseteq \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D$ sea $y \in D : y = f(x)$. Entonces $x \in \overleftarrow{f}\,D$ y $f(x) \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D$ (3.15) y $y \in \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,D$.

8. (v) Sea *f*: A→B. *f* biyectiva $\Leftrightarrow \overrightarrow{f}$ biyectiva $\Leftrightarrow \overleftarrow{f}$ biyectiva

Demostraremos la cadena proposicional :

(i) *f* biyectiva $\Rightarrow$ (ii) $\overrightarrow{f}$ biyectiva $\Rightarrow$ (iii) $\overleftarrow{f}$ biyectiva $\Rightarrow$ (i) *f* biyectiva

(i) $\Rightarrow$ (ii)

ELD

Demostrar : $\overrightarrow{f}$ es biyectiva

Traducción : $\overrightarrow{f}$ inyectiva $\wedge$ $\overrightarrow{f}$ sobreyectiva

(1)	***f*: A→B**	**P**
(2)	***f* biyectiva**	**P**
(3)	*f* inyectiva	2

(4)	$\vec{f}$ inyectiva	3, Ejercicio 3.4 (8(i))
(5)	f sobreyectiva	2
(6)	$\vec{f}$ sobreyectiva	5, Ejercicio 3.4 (8(ii))
(7)	$\vec{f}$ inyectiva $\wedge$ $\vec{f}$ sobreyectiva	A 4,6
□(8)	$\vec{f}$ biyectiva	traducción 7

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{f}$ biyectiva.

(3)(4)f es inyectiva porque f es biyectiva y por Ejercicio 3.4 (8(i)) $\vec{f}$ es inyectiva. **(5)(6)**De igual manera, f es sobreyectiva porque f es biyectiva y por Ejercicio 3.4 (8(ii)) $\vec{f}$ es sobreyectiva.

(7)(8) Siendo $\vec{f}$ inyectiva y $\vec{f}$ sobreyectiva, entonces $\vec{f}$ es biyectiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{f}$ biyectiva.

f es inyectiva porque f es biyectiva y por Ejercicio 3.4 (8(i)) $\vec{f}$ es inyectiva. De igual manera, f es sobreyectiva porque f es biyectiva y por Ejercicio 3.4 (8(ii)) $\vec{f}$ es sobreyectiva.

Siendo $\vec{f}$ inyectiva y $\vec{f}$ sobreyectiva , entonces $\vec{f}$ es biyectiva.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) **ELD**

Demostrar : $\overleftarrow{f}$ es biyectiva

Traducción : $\overleftarrow{f}$ inyectiva $\wedge$ $\overleftarrow{f}$ sobreyectiva

(1)	**f: A$\rightarrow$B**	**P**
(2)	**$\vec{f}$ biyectiva**	**P**
(3)	$\vec{f}$ sobreyectiva	2
(4)	f sobreyectiva	3, Ejercicio 3.4 (8(ii))
(5)	$\overleftarrow{f}$ inyectiva	4, Ejercicio 3.4 (8(iv))
(6)	$\vec{f}$ inyectiva	2

(7)	f inyectiva	6, Ejercicio 3.4 (8(i))
(8)	$\overleftarrow{f}$ sobreyectiva	7, Ejercicio 3.4 (8(iii))
(9)	$\overleftarrow{f}$ inyectiva $\wedge$ $\overleftarrow{f}$ sobreyectiva	A 5,8
□(10)	$\overleftarrow{f}$ biyectiva	traducción 9

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overleftarrow{f}$ biyectiva.

(3)(4) $\overrightarrow{f}$ sobreyectiva porque $\overrightarrow{f}$ es biyectiva y por Ejercicio 3.4 (8(ii)), f es sobreyectiva. **(5)(6)** Por Ejercicio 3.4 (8(iv)), $\overleftarrow{f}$ es inyectiva y f inyectiva por Ejercicio 3.4 (8(i)). **(8)** $\overleftarrow{f}$ es sobreyectiva por Ejercicio 3.4 (8(iii)). **(9)** Siendo $\overleftarrow{f}$ inyectiva y $\overleftarrow{f}$ sobreyectiva , **(10)** $\overleftarrow{f}$ es biyectiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overleftarrow{f}$ biyectiva.

$\overrightarrow{f}$ sobreyectiva porque $\overrightarrow{f}$ es biyectiva y por Ejercicio 3.4 (8(ii)), f es sobreyectiva. Por Ejercicio 3.4 (8(iv)), $\overleftarrow{f}$ es inyectiva y f inyectiva por Ejercicio 3.4 (8(i)). $\overleftarrow{f}$ es sobreyectiva por Ejercicio 3.4 (8(iii)). Siendo $\overleftarrow{f}$ inyectiva y $\overleftarrow{f}$ sobreyectiva , $\overleftarrow{f}$ es biyectiva.

(iii) $\Rightarrow$ (i) **ELD**

Demostrar : *f* es biyectiva

Traducción : f inyectiva $\wedge$ f sobreyectiva

(1)	**f: A$\rightarrow$B**	**P**
(2)	**$\overleftarrow{f}$ biyectiva**	**P**
(3)	$\overleftarrow{f}$ inyectiva	2
(4)	f sobreyectiva	3, Ejercicio 3.4 (8(iv))
(5)	$\overleftarrow{f}$ sobreyectiva	2
(6)	f inyectiva	5, Ejercicio 3.4 (8(iii))
(7)	f inyectiva $\wedge$ f sobreyectiva	A 6,4
□(8)	f biyectiva	traducción 7

Con esto queda demostrado 8 (v).

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que f biyectiva. **(3)(4)** $\overleftarrow{f}$ es inyectiva porque es biyectiva y por Ejercicio 3.4 (8(iv)) f es sobreyectiva. **(5)(6)** $\overleftarrow{f}$ es sobreyectiva porque es biyectiva y por Ejercicio 3.4 (8(iii)) f es inyectiva. **(7)(8)**Debido a que f es inyectiva y sobreyectiva, f es biyectiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que f biyectiva. $\overleftarrow{f}$ es inyectiva porque es biyectiva y por Ejercicio 3.4 (8(iv)) f es sobreyectiva. $\overleftarrow{f}$ es sobreyectiva porque es biyectiva y por Ejercicio 3.4 (8(iii)) f es inyectiva. Debido a que f es inyectiva y sobreyectiva, f es biyectiva.

9. (i) $f\colon A\to B$ sobreyectiva $\Leftrightarrow$ $B-\vec{f}\,C \subseteq \vec{f}(A-C)$

$\Rightarrow$) **ELD**

Demostrar : $\vec{f}(A-C) \supseteq B-\vec{f}\,C$

Traducción : $y\in B-\vec{f}\,C \Rightarrow y\in \vec{f}(A-C)$

(1)	***f*: A→B sobreyectiva**	**P**
(2)	$y\in B-\vec{f}\,C$	P
(3)	$y\in B \wedge y\notin \vec{f}\,C$	2
(4)	$\vec{f}\,A = B$	traducción 1
(5)	$y\in \vec{f}\,A \wedge y\notin \vec{f}\,C$	I 3,4
(6)	$y\in \vec{f}\,A-\vec{f}\,C$	5
(7)	$\vec{f}\,A-\vec{f}\,C \subseteq \vec{f}(A-C)$	3.19 (iii)
(8)	$y\in \vec{f}(A-C)$	6,7
(9)	$y\in B-\vec{f}\,C \Rightarrow y\in \vec{f}(A-C)$	CP 2,8
□(10)	$\vec{f}(A-C) \supseteq B-\vec{f}\,C$	I trad.9, 1.3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overrightarrow{f}(A-C) \supseteq B-\overrightarrow{f}\,C$.

(2) Sea $y \in B-\overrightarrow{f}\,C$.**(3)**Esto quiere decir que $y \in B \wedge y \notin \overrightarrow{f}\,C$.**(4)(5)(6)** Debido a que f es sobreyectiva, $\overrightarrow{f}\,A = B$ y por consiguiente $y \in \overrightarrow{f}\,A \wedge y \notin \overrightarrow{f}\,C$ y $y \in \overrightarrow{f}\,A-\overrightarrow{f}\,C$. **(7)(8)** Debido a que $\overrightarrow{f}\,A-\overrightarrow{f}\,C \subseteq \overrightarrow{f}(A-C)$ (3.19), $y \in \overrightarrow{f}(A-C)$ y **(9)(10)** $\overrightarrow{f}(A-C) \supseteq B-\overrightarrow{f}\,C$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\overrightarrow{f}(A-C) \supseteq B-\overrightarrow{f}\,C$.

Sea $y \in B-\overrightarrow{f}\,C$. Esto quiere decir que $y \in B \wedge y \notin \overrightarrow{f}\,C$. Debido a que f es sobreyectiva, $\overrightarrow{f}\,A = B$ y por consiguiente $y \in \overrightarrow{f}\,A \wedge y \notin \overrightarrow{f}\,C$ y $y \in \overrightarrow{f}\,A-\overrightarrow{f}\,C$. Debido a que $\overrightarrow{f}\,A-\overrightarrow{f}\,C \subseteq \overrightarrow{f}(A-C)$ (3.19), entonces $y \in \overrightarrow{f}(A-C)$ y $\overrightarrow{f}(A-C) \supseteq B-\overrightarrow{f}\,C$.

$\Leftarrow$) **ELD**

Demostrar : *f* sobreyectiva

Traducción : $\overleftarrow{f}$ inyectiva (Ejercicio 3.4 (8(iv))

O sea $\overleftarrow{f}\,D_1 = \overleftarrow{f}\,D_2 \Rightarrow D_1 = D_2$

(1)	***f*: A→B**	**P**
(2)	$B-\overrightarrow{f}\,C \subseteq \overrightarrow{f}(A-C)$	**P**
(3)	$\overleftarrow{f}\,D_1 = \overleftarrow{f}\,D_2$	P
(4)	$\overleftarrow{f}\,D_1 - \overleftarrow{f}\,D_2 = \phi$	3
(5)	$\overleftarrow{f}\,D_1 - \overleftarrow{f}\,D_2 = \overleftarrow{f}(D_1 - D_2)$	3.19(iv)
(6)	$\overleftarrow{f}(D_1 - D_2) = \phi$	I 4,5
(7)	$D_1 - D_2 = \phi$	6, Ejercicio 3.3 (2(iii))
(8)	$D_1 = D_2$	7

(9) $\overleftarrow{f} D_1 = \overleftarrow{f} D_2 \Rightarrow D_1 = D_2$ CP 2,8

(10) $\overleftarrow{f}$ es inyectiva traducción 9

□(11) f es sobreyectiva 10, Ejercicio 3.4 (8(iv))

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que f es sobreyectiva demostrando que $\overleftarrow{f}$ es inyectiva (Ejercicio 3.4 (8(iv)).

(3) Supongamos $\overleftarrow{f} D_1 - \overleftarrow{f} D_2$.**(4)**Entonces $\overleftarrow{f} D_1 - \overleftarrow{f} D_2 = \phi$.
(5)(6) Pero $\overleftarrow{f} D_1 - \overleftarrow{f} D_2 = \overleftarrow{f}(D_1 - D_2)$ por 3.19(iv), luego $\overleftarrow{f}(D_1 - D_2) = \phi$. **(7)(8)**Por Ejercicio 3.3 (2(iii)), $D_1 - D_2 = \phi$ o sea $D_1 = D_2$, **(9)(10)**lo que quiere decir que $\overleftarrow{f}$ es inyectiva y por Ejercicio 3.4 (8(iv)) f sobreyectiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que f es sobreyectiva demostrando que $\overleftarrow{f}$ es inyectiva (Ejercicio 3.4 (8(iv)).

Supongamos $\overleftarrow{f} D_1 = \overleftarrow{f} D_2$.
Entonces $\overleftarrow{f} D_1 - \overleftarrow{f} D_2 = \phi$. Pero $\overleftarrow{f} D_1 - \overleftarrow{f} D_2 = \overleftarrow{f}(D_1 = D_2)$ por 3.19(iv), luego $\overleftarrow{f}(D_1 = D_2) = \phi$. Por Ejercicio 3.3 (2(iii)), $D_1 - D_2 = \phi$ o sea $D_1 = D_2$, lo que quiere decir que $\overleftarrow{f}$ es inyectiva y por Ejercicio 3.4 (8(iv)) f sobreyectiva.

9. (ii) f: $A \to B$ biyectiva $\Leftrightarrow \overrightarrow{f}(A - C) = B - \overrightarrow{f} C$

Demostración en el sentido $\Rightarrow$)

ELD

Demostrar : $\overrightarrow{f}(A - C) = B - \overrightarrow{f} C$

(1) ***f*: A→B biyectiva** **P**
(2) f es sobreyectiva 1
(3) f inyectiva 1

(4) $\vec{f}(p_1\vec{f}-C)=\vec{p_2}\ f-\vec{f}\,C$ 3, 3.22(iv)

(5) $\vec{p_2}\ f=B$ 2

(6) $\vec{p_1}\ f=A$ 1, 3.3(ii)

(7) $\vec{f}(A-C)=B-\vec{f}\,C$ I 4,5,6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{f}(A-C)=B-\vec{f}\,C$.

(3)f es inyectiva porque es biyectiva. **(4)** Entonces

$$\vec{f}(p_1\vec{f}-C)=\vec{p_2}\ f-\vec{f}\,C \text{ (3.22(iv)).} \qquad (\text{ I })$$

(5)(6) Como f es sobreyectiva, $\vec{p_2}\ f=B$ y $\vec{p_1}\ f=A$ (3.3(ii)), **(7)**por lo tanto (I) queda transformado en $\vec{f}(A-C)=B-\vec{f}\,C$

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{f}(A-C)=B-\vec{f}\,C$.
f es inyectiva porque es biyectiva. Entonces

$$\vec{f}(p_1\vec{f}-C)=\vec{p_2}\ f-\vec{f}\,C \text{ (3.22(iv)).} \quad (\text{ I })$$

Como f es sobreyectiva, $\vec{p_2}\ f=B$ y $\vec{p_1}\ f=A$ (3.3(ii)), por lo tanto (I) queda transformado en $\vec{f}(A-C)=B-\vec{f}\,C$.

$\Leftarrow$) **ELD**

Demostrar : f biyectiva

Traducción : f inyectiva $\wedge f$ sobreyectiva

(1) **f: A→B** **P**

(2) $\vec{f}(A-C)=B-\vec{f}\,C$ **P**

(3) $\vec{f}(A-C)\supseteq B-\vec{f}\,C$ 2

(4) f sobreyectiva 3, Ejercicio 3.4 (9(i))

(5) $\vec{p_1}\ f=A$ 1, 3.3(ii)

(6) $\vec{p_2}\ f=B$ 4

(7)	$\vec{f}(\vec{p_1}\, f - C) = \vec{p_2}\, f - \vec{f}\, C$	I 2,5,6
(8)	f inyectiva	7, 3.22(iv)
(9)	f inyectiva $\wedge f$ sobreyectiva	A 4, 8
□(10)	f biyectiva	I trad.9,3.20

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que f biyectiva.

(2) Supongamos que $\vec{f}(A-C) = B - \vec{f}\, C$ donde f: A→B.

(3) Entonces $\vec{f}(A-C) \supseteq B - \vec{f}\, C$. **(4)**Por Ejercicio 3.4 (9(i)), f es sobreyectiva. **(5)** Como f es una función de A en B, y por 3.3(ii), $\vec{p_1}\, f = A$, **(6)** y $\vec{p_2}\, f = B$ por ser f sobreyectiva; **(7)**de donde $\vec{f}(\vec{p_1}\, f - C) = \vec{p_2}\, f - \vec{f}\, C$ **(8)** y f inyectiva (3.3(ii)). **(9)(10)**Siendo f también sobreyectiva, entonces se tiene que f es biyectiva.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que f biyectiva.

Supongamos que $\vec{f}(A-C) = B - \vec{f}\, C$ donde f: A→B.

Entonces $\vec{f}(A-C) \supseteq B - \vec{f}\, C$. Por Ejercicio 3.4 (9(i)), f es sobreyectiva. Como f es una función de A en B, y por 3.3(ii) , $\vec{p_1}\, f = A$, y $\vec{p_2}\, f = B$ por ser f sobreyectiva; de donde $\vec{f}(\vec{p_1}\, f - C) = \vec{p_2}\, f - \vec{f}\, C$ y f inyectiva (3.3(ii)). Siendo f también sobreyectiva entonces se tiene que f es biyectiva.

AUTOEVALUACIÓN
FUNCIONES

Traduzca al lenguaje de la Teoría de Funciones:

1. a. Una relación f de A en B es una función sii a cada elemento de A le asocia un único elemento de B.
   b. f es una restricción de g a A
   c. g es una extensión de f a C.

2. Considere las funciones f: A$\mapsto$C $\wedge$ g: B$\mapsto$C

   a. Haga una gráfica de estas dos funciones de tal manera que $A \cap B = \phi$
   b. Considere la gráfica de $h = f \cup g$ y diga si representa o nó una función.

3. Sean f = {(1,6),(2,5),(3,6)}, g = {(5,10),(6,9),(7,3)}

a. Hacer una gráfica para ilustrar la compuesta $g \circ f$
b. Escriba en lenguaje lógico la justificación de las siguientes afirmaciones:

- (1,9) $\in g \circ f \Leftrightarrow$
- (3,3) $\notin g \circ f \Leftrightarrow$
- (2,10)$\in g \circ f \Leftrightarrow$
- (2,9) $\notin g \circ f \Leftrightarrow$

c. Escriba en el lenguaje lógico simbólico.

- La segunda proyección de f está contenida en el conjunto de partida de g.
- 3 no es imagen de 3 según $g \circ f$.

4. Sea f: A $\rightarrow$ B. Escriba en el lenguaje lógico y de la Teorìa de conjuntos:

a. $\vec{f}\, C \in (B) \Leftrightarrow$

b. $\overleftarrow{f}\, D \in (A) \Leftrightarrow$

c. $y \in \vec{f}(c_1 \cap c_2) \Leftrightarrow$

d. $y \in \vec{f}\, C_1 - \vec{f}\, C_2 \Leftrightarrow$

e. $x \in \overleftarrow{f}(D_1 - D_2) \Leftrightarrow$

7. Traducir al lenguaje lógico y de la T. de Conjuntos.

a. Sea f una función de A en B.
b. f es una relación de A en B.
c. A cada elemento de A le asocia un único elemento de B.

INYECCIONES, SOBREYECCIONES Y BIYECCIONES

1. Traducir al lenguaje lógico y de la T. de Conjuntos, las siguientes expresiones en el lenguaje ordinario: Sea f: A→B

a. Dados dos elementos distintos de A, tienen imágenes distintas en el conjunto B.
b. No existe ningún elemento en B que sea imagen de dos elementos distintos de A
c. Todo elemento de B es imagen de al menos un elemento de A.
d. Cada elemento de A tiene dos imágenes en B.

2.

a. Defina el concepto de función inyectiva en el lenguaje ordinario.
b. Defina función sobreyectiva en el lenguaje ordinario.
c. Defina función biyectiva en lenguaje ordinario

3. Defina los conceptos del punto anterior en lenguaje matemático(e.d. en el lógico - Teoría de C.).

4. Caracterice las funciones sobreyectivas en términos de segunda proyección de la función.

5. Caracterice las funciones inyectivas en términos de intersección de imágenes.

6. Caracterice las funciones inyectivas en términos de su inversa.

7. Caracterice las funciones sobreyectivas en términos de su “doble imagen”.

8. Traduzca a la notación de la Teoría de Conjuntos las siguientes afirmaciones:

   a. La imagen inversa de una función biyectiva es función.
   b. Si una función no es inyectiva su inversa no es función.

9. Traducir al lenguaje ordinario cada una de las siguientes afirmaciones: Sea *f*: A→B

   a. $(\forall x_1, x_2)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$
   b. $\neg(\exists y \in B)(y = f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2 \wedge x_1, x_2 \in A)$
   c. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$
   d. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
   e. $(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)) \wedge (\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$
   f. $\vec{p}_2 = B$
   g. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

10. Represente con una gráfica cada una de las ideas del punto anterior.

FUNCIONES BIYECTIVAS

1.Traduzca al lenguaje lógico y de la teoría de conjuntos:

Sea *f*: A $\rightarrow$ B

(a) Dados dos elementos distintos de A, tienen imágenes (bajo *f*) distintas en el conjunto B.

(b) No existe ningún elemento en B que sea imagen de dos elementos distintos de A

(c) Todo elemento de B es imagen de al menos un elemento de A.

(d) Cada elemento de A tiene dos imágenes en B.

2. Traduzca al lenguaje ordinario las siguientes afirmaciones:

Sea f: A $\rightarrow$ B

• $\forall x_{1,} x_2 (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(X_1) \neq f(X_2))$

• $\neg(\exists y \in B)(y = f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2 \wedge x_1, x_2 \in A)$

• $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$

• $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
(cómo se llama f?)

• $((x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)) \wedge ((\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)))$
(cómo se llama f ?).

• $\overset{\rightarrow}{p_2} f = B$ (cómo se llama f)