CAPÍTULO IV

FAMILIAS

En teoría intuitiva de conjuntos se dice que una familia es un conjunto cuyos elementos también son conjuntos. Se habla de una familia $(A_i)_{i\in I}$ cuando se tiene un conjunto I que se llama **conjunto de índices** y a cada elemento $i \in I$ se le asigna un conjunto A_i. Como en nuestra teoría todos los objetos son conjuntos, se tiene simplemente que una familia es una función A: I$\rightarrow$B, siendo I y B conjuntos cualesquiera.

Claramente aquí no hay nada nuevo. Cualquier función es una familia. Por otra parte la terminología y notación que estamos introduciendo es muy usada en matemática y nos permite generalizar mejor ideas anteriores.

A una familia A : I$\rightarrow$B la notaremos $(A_i)_{i\in I}$ y al conjunto de valores de esta función lo notaremos $\{A_i\}_{i\in I}$ o $\{A_i \,/\, i \in I\}$. A los elementos de *I* se les llama **índices.**

Ejemplos : (1) El lector seguramente está familiarizado con un tipo muy importante de familias : las sucesiones (infinitas) que son aquellas familias cuyo conjunto de índices es el conjunto **N**. Como, $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$. Una sucesión $(x_n)_{n\in N}$ se escribe también $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$. Otra sucesión es la sucesión constante (1, 1, 1, . . . , 1, . . .) que no se debe confundir con el conjunto de valores de la sucesión que es simplemente $\{1\}$.

(2) También podemos hablar de **sucesiones finitas** o sea las que tienen como conjunto de índices a un conjunto finito de la forma {1, 2, . . . , n } y las cuales notaremos $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Aquí se presenta una doble asignación de significado a un mismo símbolo. Por ejemplo (5, 6) que hasta este momento ha sido una abreviación para {{5},{5,6}} es ahora también la función

f : {1, 2} $\rightarrow$ **N** siendo f {(1, 5), (2, 6)} = {{{1}, {1,5}},{{2}, {2,6}}}.

Esta situación no nos traerá mayores problemas (Véase : Ejercicio 4.1 (1)).

(3) Considere la familia ([-x, x])$_{x\in R}$ o sea la función A**:** R$\mapsto \mathcal{P}$R tal que $A\ :\ x\mapsto$[-x, x] . La notación, como ($x_1, x_2, x_3,\ .\ .\ .\ ,\ x_n,\ .\ .\ .$) que introdujimos para las sucesiones no tiene paralelo aquí. Esto se debe a que el conjunto de índices R no es contable.

(4) Cualquier conjunto A se puede visualizar como una familia. Simplemente se toma la correspondiente función de identidad.

En la práctica al discutir las diferentes ideas de este capítulo, se tiene en mente familias como las del ejemplo (3) o sea "familias de conjuntos", en el sentido intuitivo de la palabra.

1. GENERALIZACIÓN DE LA INTERSECCION Y DE LA UNION

4.1 Definición : (i) $\bigcap \mathcal{A} = \{$x/ x$\in A$ para todo A$\in\mathcal{A}\}$

(ii) $\bigcup \mathcal{A} = \{$x/ x$\in A$ para todo A$\in\mathcal{A}\}$,

Conjuntos que llamaremos respectivamente la intersección y la unión de $\mathcal{A}$**.**

Caracterización de los elementos de la intersección

$$x\in\bigcap \mathcal{A} \Leftrightarrow x\in A\ \forall A\in\mathcal{A}$$

Caracterización de los elementos de la unión

$$x\in\bigcup \mathcal{A} \Leftrightarrow x\in A \textit{ para algún } A\in\mathcal{A}$$

Ejemplos : (1) $\bigcap$ {{1, 2, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3, 4, 6}} = {2, 3}.

(2) $\bigcup$ {{1, 2, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3, 4, 6}} = {1, 2, 3, 4, 6}.

(3) $\bigcap$ {{1, 2}, {2, 3}, {3, 4}} = ϕ

(4) $\bigcap$ {{4, 5}, {4}, 2} = ϕ

(5) $\bigcup$ {{4, 5}, {4}, 2} = {0, 1, 4, 5}. (Véase 3.7)

En las anteriores definiciones, $\mathcal{A}$ es un conjunto cualquiera. Hemos escrito $\mathcal{A}$ en lugar de por ejemplo A, para hacer énfasis en el hecho de que estas definiciones se usan en la práctica para “conjuntos de conjuntos” en el sentido intuitivo (0 sea para familias).

4.2 Proposición : (i) $\bigcap\{A, B\} = A \cap B$ (ii) $\bigcup\{A, B\} = A \cup B$

Demostración (i) : **ELD**

Demostrar $\bigcap\{A, B\} = A \cap B$

Traducción : $x \in \bigcap\{A, B\} \Leftrightarrow x \in A \cap B$

$x \in \bigcap\{A, B\} \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$ 4.1(i)

$\Leftrightarrow x \in A \cap B$ 1.11(i)

Demostración (ii): : **ELD**

Demostrar $\bigcup\{A, B\} = A \cup B$

Traducción : $x \in \bigcup\{A, B\} \Leftrightarrow x \in A \cup B$

$x \in \bigcup\{A, B\} \Leftrightarrow x \in X \quad para\ a\lg ún\ X \in \{A, B\}$ 4.1(ii)

$\Leftrightarrow x \in X \quad para\ \ X = A \vee X = B$

$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

$\Leftrightarrow x \in A \cup B$ 1.11(ii)

Si tenemos una familia $(A_i)_{i\in I}$ adoptaremos las siguientes convenciones de notación (en las cuales $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$).

$$\bigcap\mathcal{A} = \bigcap\{A_i\}_{i\in I} = \bigcap\{A_i / i \in I\} = \bigcap A = \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_i A_i$$

$$\bigcup\mathcal{A} = \bigcup\{A_i\}_{i\in I} = \bigcup\{A_i / i \in I\} = \bigcup A = \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_i A_i$$

De estas notaciones, las dos últimas serán las que más usaremos.
Para ciertos conjuntos de índices, existen otras notaciones especiales.

Para I = $\{1, 2, . . . , n\}$, se escribe también $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \, . \, . \cap A_n$

y $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \, . \, . \cup A_n$

Para I = **N**, se escribe también $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ . \ . \ .$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i =$ $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ . \ . \ .$

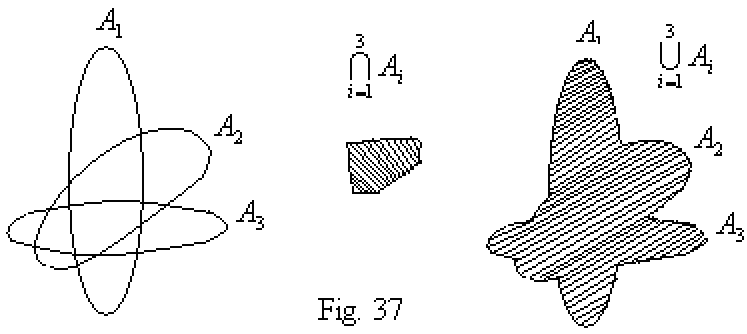


Fig. 37

Ahora comenzaremos a generalizar teoremas sobre intersecciones y uniones del capítulo I.

Una propiedad básica de la intersección (respectivamente unión) de una familia es que está contenida en (resp. contiene a) cada elemento de la familia. No solamente esto es cierto (4.3(i)) sino que son propiedades que caracterizan a la intersección (resp. unión) en el sentido de que el máximo (resp. mínimo) conjunto que está contenido (resp. contiene a) en cada elemento de la familia es la intersección (resp. unión) de la familia. (4.3(iv)) (resp. (4.3(v)).

4.3 Proposición : Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia

(i) $(\forall j \in I)(\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i)$

(ii) $\forall i \in I(B \subseteq A_i) \Rightarrow B \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$

(iii) $\forall i \in I(A_i \subseteq B) \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B.$

(iv) $\forall i \in I(X \subseteq A_i) \wedge (\forall i \in I(B \subseteq A_i) \Rightarrow B \subseteq X) \Rightarrow X = \bigcap_{i\in I} A_i$

(v) $\forall i \in I(A_i \subseteq X) \wedge (\forall i \in I(A_i \subseteq B) \Rightarrow X \subseteq B) \Rightarrow X = \bigcup_{i\in I} A_i$

Demostración : (i)

ELD

Demostrar $(\forall j \in I)(\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i)$

O sea $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_j \wedge A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i, \ \forall j \in I$

ELD

Demostrar $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_j, \forall j \in I$

Traducción : $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Rightarrow x \in A_j$

(1)	$x \in \bigcap_{i\in I} A_i$	P
(2)	$x \in A_i \ \forall i \in I$	I 1,4.1(i)
(3)	$x \in A_j$	S 2
(4)	$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Rightarrow x \in A_j$	CP 1,3
(5)	$\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_j$	traducción 4

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2)(3) Si para cada $i \in I, x \in A_i$ **.(3)(4)(5)** En particular $x \in A_j$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Si para cada $\in i \in I, x \in A_i$. En particular $x \in A_j$.

ELD

Demostrar $A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i, \forall j \in I$

Traducción : $x \in A_j \Rightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i$

(1)	$x \in A_j \ \ \forall j \in I$	P
(2)	$x \in A_i \ \ p.a.i \in I$	1
(3)	$x \in \bigcup_{i\in I} A_i$	I 2,4.1(ii)
(4)	$x \in A_j \ \Rightarrow \ x \in \bigcup_{i\in I} A_i$	CP 1,3
(5)	$A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$	traducción 4

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1) Si para cada j$\in$I $x \in A_j$, **(2)(3)(4)(5)** $x \in A_i$ para algún i, luego $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Si para cada j$\in$I $x \in A_j$, $x \in A_i$ para algún i, luego $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$

Demostración (ii) : **ELD**

Demostrar $B \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$

Traducción : $x \in B \Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I} A_i$

(1)	$\forall i \in I (B \subseteq A_i)$	P
(2)	$x \in B$	P
(3)	$x \in A_i \ \forall i \in I$	1,2
(4)	$x \in \bigcap_{i \in I} A_i$	I 3,4.1(i)
(5)	$x \in B \Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I} A_i$	CP 2,4
(6)	$B \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$	traducción 5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2)(3) Si $x \in B,$ entonces $x \in A_i$ para cada i (por hipótesis $\forall i \in I (B \subseteq A_i)$) **(4)(5)(6)** y por lo tanto $x \in \bigcap_i A_i$

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Si $x \in B,$ entonces $x \in A_i$ para cada i (por hipótesis $\forall i \in I (B \subseteq A_i)$) y por lo tanto $x \in \bigcap_i A_i$

(iii) : **ELD**

Demostrar $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$

Traducción : $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow x \in B$

(1)	$\forall i \in I \, (A_i \subseteq B)$	P
(2)	$x \in \bigcup_{i \in I} A_i$	P
(3)	$x \in A_i \ \ p.a. i \in I$	I 2,4.1(ii)
(4)	$x \in B$	3,1
(5)	$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow x \in B$	CP 2,4
(6)	$\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$	traducción 5

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(2)(3) Si $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, $x \in A_i$ para algún $i \in I$. **(4)(5)(6)**Como $A_i \subseteq B$ para todo $i \in I$, $x \in B$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Si $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, $x \in A_i$ para algún $i \in I$. Como $A_i \subseteq B$ para todo $i \in I$, $x \in B$.

(iv) **ELD**

Demostrar

$$\forall i \in I(X \subseteq A_i) \wedge (\forall i \in I(B \subseteq A_i) \Rightarrow B \subseteq X) \Rightarrow X = \bigcap_{i\in I} A_i$$

(1)	$\forall i \in I(X \subseteq A_i) \wedge (\forall i \in I(B \subseteq A_i) \Rightarrow B \subseteq X)$	P
(2)	$\forall i \in I(X \subseteq A_i)$	S1
(3)	$X \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$	I. 2,4.3(ii)
(4)	$\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_i \ \forall i \in I$	4.3(i)
(5)	$\forall i \in I(B \subseteq A_i) \Rightarrow B \subseteq X)$	S1
(6)	$\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_i \Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i \subseteq X$	$\bigcap_{i\in I} A_i / B$ 5
(7)	$\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq X$	PP 4,6
(8)	$X \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i \wedge \bigcap_{i\in I} A_i \subseteq X$	A 3,7
(9)	$X = \bigcap_{i\in I} A_i$	I 8,1.4(ii)
□(10)	$\forall i \in I(X \subseteq A_i) \wedge (\forall i \in I(B \subseteq A_i) \Rightarrow B \subseteq X) \Rightarrow X = \bigcap_{i\in I} A_i$	CP 1,9

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

(1)(2)(3) Si $X \subseteq A_i$ para cada i, $X \subseteq \bigcap A_i$ (por (ii)). **(4)(5)(6)** Como $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_i$ para cada *i*, **(7)** $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq X$ (por la segunda hipótesis).

(8)(9)(10) Por lo tanto $X = \bigcap_{i\in I} A_i$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Si $X \subseteq A_i$ para cada i, $X \subseteq \bigcap A_i$ (por (ii)). Como $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_i$ para cada *i*, $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq X$ (por la segunda hipótesis). Por lo tanto $X = \bigcap_{i\in I} A_i$.

(v) **ELD**

Demostrar

$$\forall i \in I(A_i \subseteq X) \wedge (\forall i \in I(A_i \subseteq B) \Rightarrow X \subseteq B) \Rightarrow X = \bigcup_{i\in I} A_i$$

(1)	$\forall i \in I(A_i \subseteq X) \wedge (\forall i \in I(A_i \subseteq B) \Rightarrow X \subseteq B)$	P
(2)	$\forall i \in I(A_i \subseteq X)$	S 1
(3)	$\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq X$	2
(4)	$A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$	4.3(i)
(5)	$\forall i \in I(A_i \subseteq B) \Rightarrow X \subseteq B$	S 1
(6)	$A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$	$\bigcup_{i\in I} A_i / B$ 5
(7)	$X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$	PP 4,6
(8)	$\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq X \wedge X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$	A 3,7
(9)	$X = \bigcup_{i\in I} A_i$	I 8,1.4(ii)
□(10)	$\forall i \in I(A_i \subseteq X) \wedge (\forall i \in I(A_i \subseteq B) \Rightarrow X \subseteq B) \Rightarrow X = \bigcup_{i\in I} A_i$	CP 1,9

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar $\forall i \in I(A_i \subseteq X) \wedge (\forall i \in I(A_i \subseteq B) \Rightarrow X \subseteq B) \Rightarrow X = \bigcup_{i\in I} A_i$ **(1)(2)(3)**Si $A_i \subseteq X$ para cada i, $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq X$ (por (iii)). **(4)(5)(6)(7)** Como $A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ para cada *i*, $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ (por la segunda hipótesis). **(8)(9)(10)**Por lo tanto $X = \bigcup_{i\in I} A_i$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Sea

$A_i \subseteq X$ para cada i,

entonces

$\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq X$ (por (iii)). (I)

Como

$A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ para cada *i*,

entonces

$X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ (por la segunda hipótesis). (II)

De (I) y (II) se obtiene

$$X = \bigcup_{i\in I} A_i \,.\square$$

4.4 Proposición : (LAS PROPIEDADES DE DEMORGAN)

(i) $(\bigcap_{i\in I} A_i)' = \bigcup_{i\in I} A_i'$ (ii) $(\bigcup_{i\in I} A_i)' = \bigcap_{i\in I} A_i'$

Demostración (i) : $x \in (\bigcap_{i\in I} A_i)' \Leftrightarrow x \notin (\bigcap_{i\in I} A_i)$

$$\Leftrightarrow \neg(x \in \bigcap_{i\in I} A_i)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall i \in I(x \in A_i)) \qquad 4.1(i)$$

$$\Leftrightarrow \exists i \in I(x \notin A_i)$$

$$\Leftrightarrow \exists i \in I(x \in A_i')$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i' \qquad 4.1(ii)$$

Demostración (ii) : $x \in (\bigcup_{i\in I} A_i)' \Leftrightarrow x \notin (\bigcup_{i\in I} A_i)$

$$\Leftrightarrow \neg(x \in \bigcup_{i\in I} A_i)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\exists i \in I(x \in A_i)) \qquad 4.1(ii)$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in I(x \notin A_i)$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in I(x \in A_i')$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i' \qquad 4.1(i)$$

4.5 Proposición (Propiedades distributivas)

(i) $(\bigcup_{i\in I} A_i)\bigcap(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \bigcap B_j)$

(ii) $(\bigcap_{i\in I} A_i)\bigcup(\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \bigcup B_j)$

Demostración :

(i) $x \in (\bigcup_{i\in I} A_i)\bigcap(\bigcup_{j\in J} B_j) \Leftrightarrow \exists i \in I(x \in A_i) \wedge \exists j \in J(x \in B_j)$

$$\Leftrightarrow \exists i \in I \ \exists j \in J \ (x \in A_i \cap B_j)$$

$$\Leftrightarrow \exists (i, j) \in I \times J \ \ (x \in A_i \cap B_j)$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j)$$

(ii) $x \in (\bigcap_{i\in I} A_i) \cup (\bigcap_{j\in J} B_j) \Leftrightarrow \forall i \in I(x \in A_i) \vee \forall j \in J(x \in B_j)$

$$\Leftrightarrow \forall i \in I\ \ \forall j \in J\ (x \in A_i \cup B_j)$$
$$\Leftrightarrow \forall (i, j) \in I \times J\ \ (x \in A_i \cup B_j)$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{(i,j)\in I\times J} A_i \cup B_j)$$

4.6 Proposición : (i) $(\bigcap_{i\in I} A_i) \times (\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)$

(ii) $(\bigcup_{i\in I} A_i) \times (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)$

Demostración :

(i) $(x, y) \in (\bigcap_{i\in I} A_i) \times (\bigcap_{j\in J} B_j) \Leftrightarrow x \in (\bigcap_{i\in I} A_i) \wedge y \in (\bigcap_{j\in J} B_j)$

$$\Leftrightarrow \forall i \in I(x \in A_i) \wedge \forall j \in J(y \in B_j)$$
$$\Leftrightarrow \forall i \in I \forall j \in J(x \in A_i \wedge y \in B_j)$$
$$\Leftrightarrow \forall (i, j) \in I \times J(x \in A_i \times B_j)$$
$$\Leftrightarrow (x, y) \in \bigcap_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j$$

(ii) $(x, y) \in (\bigcup_{i\in I} A_i) \times (\bigcup_{j\in J} B_j) \Leftrightarrow x \in (\bigcup_{i\in I} A_i) \wedge y \in (\bigcup_{j\in J} B_j)$

$$\Leftrightarrow \exists i \in I(x \in A_i) \wedge \exists j(y \in B_j)$$
$$\Leftrightarrow \exists i \in I \exists j \in J(x \in A_i \wedge y \in B_j)$$
$$\Leftrightarrow \exists (i, j) \in I \times J((x, y) \in A_i \times B_j)$$
$$\Leftrightarrow (x, y) \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j$$

Hay muchos teoremas sobre intersecciones y uniones. Algunos se incluirán en los siguientes ejercicios.

EJERCICIOS 4.1

1. (i) Si definimos (x, y) = {{{1},{1, x}},{{2},{2, y}}}, demuestre

$$(x, y) = (z, w) \Leftrightarrow x = z \wedge y = w$$

y por lo tanto toda función de {1, 2} en {x, y} se puede considerar como pareja.

(ii) Recíprocamente toda pareja (x, y) se puede considerar como una función de {1, 2} en {x, y}, simplemente definimos

$$(x, y)\ 1 = x\ , \quad (x, y)\ 2 = y\ .$$

2. Encontrar $\cap\mathcal{A}$ y $\cup\mathcal{A}$ siendo $\mathcal{A}$ el conjunto

i) $\{[x, x]/ \text{ x} \in \text{R}\}$

ii) $\{]-x, x[/ \text{ x} \in \text{R} - \{0\}\}$

iii) $\{[x, x+1]/ \text{ x} \in Z\}$

iv) $\{]x, x+1[/ \text{ x} \in Z\}$

v) $\left\{\left[\frac{1}{n}, 2\right]/ \text{ n} \in N\right\}$

3. Sea $A_k = \{(x, y) \in R^2 / y = ksenx\}$

a) $\bigcap_{k\in R} A_k =$

b) $\bigcup_{k\in R} A_k =$

c) Dibuje las gráficas cartesianas de sus respuestas para a) y b).

4. $\bigcap\{A\} = \bigcup\{A\} = A$

5. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \cap\mathcal{B} \subseteq \cap\mathcal{A} \wedge \cup\mathcal{A} \subseteq \cup\mathcal{B}$

6. (i) $A \cap (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J}(A \cap B_j)$ (iii) $A \cap (\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{j\in J}(A \cap B_j)$

(ii) $A \cup (\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{j\in J}(A \cup B_j)$ (iv) $A \cup (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J}(A \cup B_j)$

Por la conmutatividad de $\cap$ y de $\cup$, hay otras proposiciones similares a las cuatro anteriores. Así a (i) le corresponde : $(\bigcup_{i\in I} A_i) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$.
Similar observación para los otros ejercicios sobre familias.

7. (i) $\bigcap_i (B - A_i) = B - \bigcup_i A_i$ (iii) $\bigcap_i (A_i - B) = (\bigcap_i A_i) - B$

(ii) $\bigcup_i (B - A_i) = B - \bigcap_i A_i$ (iv) $\bigcup_{i\in I} (A_i - B) = (\bigcup_{i\in I} A_i) - B$

8. (i) $A\times(\bigcap_{j\in J} B_j)=\bigcap_{j\in J}(A\times B_j)$ (ii) $(\bigcap_{i\in I} A_i)\times B=\bigcap_{i\in I}(A_i\times B)$

(iii) $A\times(\bigcup_{j\in J} B_j)=\bigcup_{j\in J}(A\times B_j)$ (iv) $(\bigcup_{i\in I} A_i)\times B=\bigcup_{i\in I}(A_i\times B)$

No siempre visualizaremos a los productos cartesianos como rectángulos. A veces resulta útil verlos en 3 dimensiones (Véase Ejercicio 2.2(20). Imaginemos al conjunto A como una figura plana colocada perpendicularmente al plano de esta hoja.

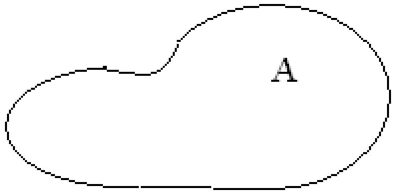


Fig. 38

Imaginemos al conjunto B como un segmento de recta que descansa perpendicularmente a A (Fig. 39).

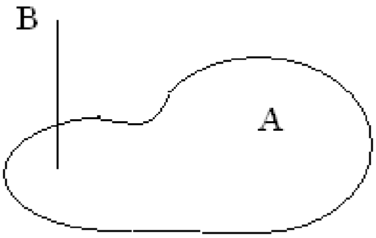


Fig. 39

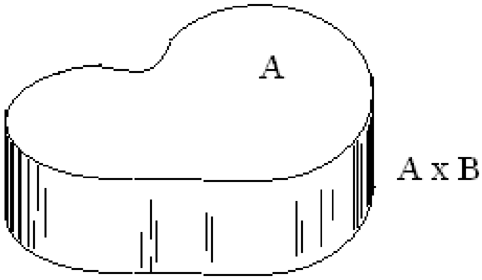


Fig. 40

$A\times B$ lo podemos ver como el sólido que tiene a A como base y de altura a B (Fig. 40).

Visualicemos por ejemplo al ejercicio 12 (ii) (Fig. 41)

9. (Propiedades Asociativas)

(i) $\bigcap_{i\in\bigcup_{k\in K} I_k} A_i = \bigcap_{k\in K}\bigcap_{i\in I_k} A_i$

(ii) $\bigcup_{i\in\bigcup_{k\in K} I_k} A_i = \bigcup_{k\in K}\bigcup_{i\in I_k} A_i$

(iii) $\bigcap_{i\in I\cup J} A_i = (\bigcap_{i\in I} A_i)\cup(\bigcap_{j\in J} A_j)$

(iv) $\bigcup_{i\in I\cup J} A_i = (\bigcup_{i\in I} A_i)\cup(\bigcup_{j\in J} A_j)$

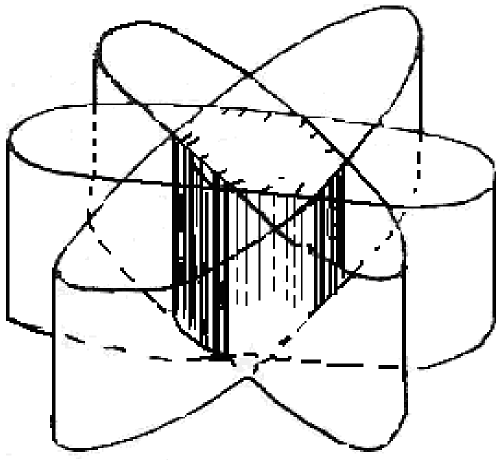


Fig. 41

10. (i) $\bigcup_{i\in I} A_i - \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(A_i - B_j) = \bigcap_{j\in J}\bigcup_{i\in I}(A_i - B_j)$

(ii) $\bigcap_{i\in I} A_i - \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}(A_i - B_j) = \bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in I}(A_i - B_j)$

(iii) $\bigcup_{i\in I} A_i - \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i - B_j)$

(iv) $\bigcap_{i\in I} A_i - \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i - B_j)$

11. (i) $\mathcal{P}\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}\mathcal{P}A_i$

(ii) $\mathcal{P}\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}\mathcal{P}A_i$

12. (i) $(\bigcap_{i\in I} A_i)\times(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A_i \times B_i)$

(ii) $(\bigcup_{i\in I} A_i)\times(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A_i \times B_i)$

13. Sea $(A_n)_{n\in N^+}$ una familia, $S_0 = \phi$, $S_k = \bigcup_{n=1}^{K} A_n$

(1) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - S_{n-1})$

(2) Los $A_n - S_{n-1}$ son mutuamente disjuntos

SUGERENCIA :

a) i) Considere A_1, A_2, A_3, A_4 y represéntelos en un diagrama.

ii) Exhiba S_1, S_2, S_3, S_4

iii) Haga un diagrama para cada uno de los conjuntos

$$A_1 - S_0, A_2 - S_1, A_3 - S_2, A_4 - S_3$$

iv) Considere el diagrama de

(a) $\bigcup_{n=1}^{4} A_n$

(b) $\bigcup_{n=1}^{4} (A_n - S_{n-1})$

v) Compare los resultados obtenidos en (iv) y saque una conclusión.

vi) Con base en los diagramas de (iii), qué puede decir de las siguientes intersecciones:

$$A_1 - S_0 \cap A_2 - S_1 = ?$$
$$A_2 - S_1 \cap A_3 - S_2, = ?$$
$$A_3 - S_2 \cap A_4 - S_3 = ?$$
$$\vdots$$
$$A_1 - S_0 \cap A_4 - S_3 = ?$$

(b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - S_{n-1})$

i) Escriba en lenguaje lógico y de la teoría de conjuntos el significado de esta proposición.
ii) Pase al ELD cada una de las implicaciones involucradas en lo escrito en (i).
iii) Desarrolle cada ELD.

(c) Los $A_n - S_{n-1}$ son mutuamente disjuntos.

i) Escriba esta afirmación en lenguaje estrictamente de la teoría de conjuntos.
ii) Pase lo escrito en (i) al lenguaje lógico.
iii) Demuestre por contradicción (RAA) lo planteado por (ii)

14. (i) $\bigcup (x, y) = ?$ (ii) $\bigcap (x, y) = ?$
(iii) $\bigcap\bigcap (x, y) = ?$ (iv) $\bigcup\bigcap (x, y) = ?$
(v) $\bigcap\bigcup (x, y) = ?$

15. Sea $\mathcal{F}$ una colección de funciones (relaciones funcionales).

i) $\bigcap \mathcal{F}\Phi$ es una función

ii) $\bigcup \mathcal{F}$ no es necesariamente una función (véase 6.21(i)).

ACTIVIDAD PRACTICA – PROCESO IMITATIVO

1. **ELD**

Demostrar $(x, y) = (z, w) \Leftrightarrow x = z \wedge y = w$

(1)	$\mathbf{(x, y) = \{\{\{1\},\{1, x\}\},\{\{2\},\{2, y\}\}\}}$	**P**
$\Rightarrow$ (2)	$(x, y) = (z, w)$	P
(3)	$(z, w) = \{\{\{1\},\{1, z\}\},\{\{2\},\{2, w\}\}\}$	z/x,w/y 1
(4)	$\{\{\{1\},\{1,x\}\},\{\{2\},\{2,y\}\}\}=\{\{\{1\},\{1,z\}\},\{\{2\},\{2, w\}\}\}$	I 1,2,3
(5)	$\{\{1\},\{1, x\}\}=\{\{1\},\{1, z\}\}\wedge\{\{2\},\{2, y\}\}=\{\{2\},\{2, w\}\}$ $\vee$ $\{\{1\},\{1,x\}\}=\{\{2\},\{2,w\}\}\wedge\{\{2\},\{2,y\}\}=\{\{1\},\{1,z\}\}$	4
(6)	$\{\{1\},\{1, x\}\}= \{\{2\},\{2, w\}\}\wedge\{\{2\},\{2, y\}\}=\{\{1\},\{1, z\}\}$	P
(7)	$1 = 2$	6
(8)	$\neg(\{\{1\},\{1,x\}\}=\{\{2\},\{2,w\}\}\wedge\{\{2\},\{2,y\}\}=\{\{1\},\{1,z\}\})$	RAA 6, 7
(9)	$\{\{1\},\{1,x\}\}=\{\{1\},\{1,z\}\}\wedge\{\{2\},\{2,y\}\}=\{\{2\},\{2,w\}\}$	TP 5,8
(10)	$x = z \wedge y = w$	9
$\square_1$(11)	$(x, y) = (z, w) \Rightarrow x = z \wedge y = w$	CP 2,10
$\Leftarrow$)(12)	$x = z \wedge y = w$	P
(13)	$(x, y) = (z, w)$	12
$\square_2$ (14)	$x = z \wedge y = w \Rightarrow (x, y) = (z, w)$	12,13
$\square$ (15)	$(x, y) = (z, w) \Leftrightarrow x = z \wedge y = w$	LB 11,1

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $(x, y) = (z, w) \Leftrightarrow x = z \wedge y = w$

$\Rightarrow$) **(2)**Sea $(x, y) = (z, w)$. **(3)(4)**Según la definición de par ordenado que se da en la hipótesis, se tiene que

$$\{\{\{1\},\{1, x\}\},\{\{2\},\{2, y\}\}\}=\{\{\{1\},\{1, z\}\},\{\{2\},\{2, w\}\}\}.$$

(5) De donde se deriva la siguiente disjunción :

$$\{\{1\},\{1, x\}\}=\{\{1\},\{1, z\}\}\wedge\{\{2\},\{2, y\}\}=\{\{2\},\{2, w\}\} \quad (1)$$
ó
$$\{\{1\},\{1, x\}\}= \{\{2\},\{2, w\}\}\wedge\{\{2\},\{2, y\}\}=\{\{1\},\{1, z\}\}. \quad (2)$$

(6)(7) Si tomamos la alternativa (2), se tendría que 1 = 2; **(8)(9)**lo que evidentemente es una contradicción; **(10)(11)**teniéndose en consecuencia la alternativa (1), es decir, x = z y y = w .

$\Leftarrow$) **(12)**Supongamos ahora que $x = z \wedge y = w$.
(13) (14) Es evidente que (x, y) = (z, w).**(15)**Por lo tanto hemos demostrado que (x, y) = (z, w) $\Leftrightarrow$ $x = z \wedge y = w$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que (x, y) = (z, w) $\Leftrightarrow$ $x = z \wedge y = w$

$\Rightarrow$) Sea (x, y) = (z, w). Según la definición de par ordenado que se da en la hipótesis, $\{\{\{1\},\{1, x\}\},\{\{2\},\{2, y\}\}\}=\{\{\{1\},\{1, z\}\},\{\{2\},\{2, w\}\}\}$. De donde se deriva la siguiente disjunción :

$$\{\{1\},\{1, x\}\}=\{\{1\},\{1, z\}\}\wedge\{\{2\},\{2, y\}\}=\{\{2\},\{2, w\}\} \quad (1)$$
ó
$$\{\{1\},\{1, x\}\}= \{\{2\},\{2, w\}\}\wedge\{\{2\},\{2, y\}\}=\{\{1\},\{1, z\}\}. \quad (2)$$

Si tomamos la alternativa (2), se tendría que 1 = 2; lo que evidentemente es una contradicción; teniéndose en consecuencia la alternativa (1), es decir,
x = z y y = w .

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $x = z \wedge y = w$. Es evidente que (x, y) = (z, w).
Por lo tanto hemos demostrado que (x, y) = (z, w) $\Leftrightarrow$ $x = z \wedge y = w$.

2. Encontrar $\bigcap\mathcal{A}$ y $\bigcup\mathcal{A}$ siendo $\mathcal{A}$ el conjunto

(*a*) $\mathcal{A} = \{[x,-x]/\ x \in \mathrm{R}\}$. $\bigcap\boldsymbol{\mathcal{A}}=\bigcap_{x\in R}[-x,x]=\{0\}$.

Si existiera otro t_0 tal que $t_0 \in \bigcap_{x\in R}[-x,x]$, entonces $t_0 \in [-x,x]$ para todo $x \in R$. O sea $-x \leq t_0 \leq x \ \ \forall x \in R$;lo que implica que $t_0 = 0$.

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{x\in R}[-x,x] = \mathrm{R}$$

$$\begin{aligned} t \in \bigcup \mathcal{A} &\Leftrightarrow \exists x \in R : t \in [-x,x] \quad (4.1(ii)) \\ &\Leftrightarrow \exists x : x \geq t \\ &\Leftrightarrow t \in R \end{aligned}$$

(b) $\mathcal{A} = \{\,]-x,x[\,/\ \mathrm{x} \in \mathrm{R} - \{0\}\}$. $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{x\in R}]-x,x[= \{0\}$,

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{x\in R}]-x,x[= \mathrm{R}$$

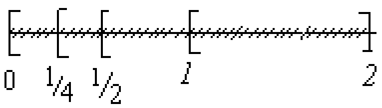
(c) $\mathcal{A} = \{[x,x+1]/\ \mathrm{x} \in Z\}$. $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{x\in Z}[x,x+1] = \phi$,

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{x\in Z}[x,x+1] = R$$

(d) $\mathcal{A} = \{]x,x+1[\,/\ \mathrm{x} \in Z\}$ $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{x\in Z}]x,x+1[= \phi$

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{x\in Z}]x,x+1[= R$$

iii) $\left\{\left[\frac{1}{n}, 2\right] / \mathrm{n} \in N\right\}$



$$\bigcap \mathcal{A} = [1,\ 2]$$

$$\left[\frac{1}{1}, 2\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 2\right] \cup \cdots \cup \left[\frac{1}{n}, 2\right] =]0,\ 2]$$

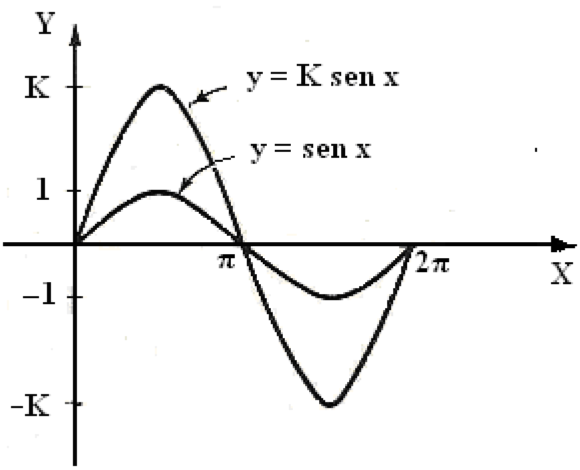
$$\bigcup \mathcal{A} =]0,\ 2]$$

3. Sea $A_k = \{(x,y) \in R^2 / y = ksenx\}$

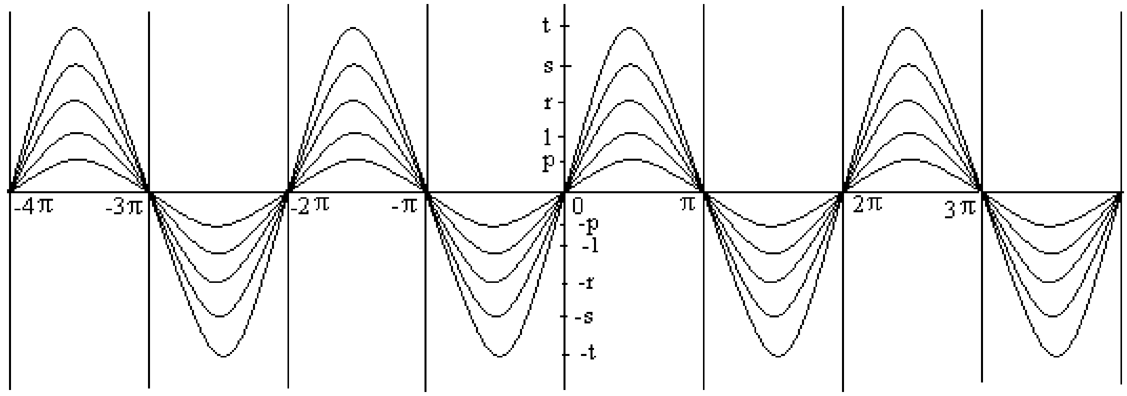
d) $\displaystyle\bigcap_{k\in R} A_k = \bigcap_{k\in R}\{(n\pi,0)/n \in Z^-\} \cup \{(0,n\pi)/n \in Z^+\}$

e) $$\bigcup_{k\in R} A_k = \bigcup \left[(2n-1)\pi,\ 2n\pi\right]\times R^- \cup \left[2n\pi,\ (2n+1)\pi\right]\times R^+$$

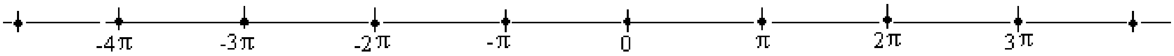
f) Dibuje las gráficas cartesianas de sus respuestas para a) y b).



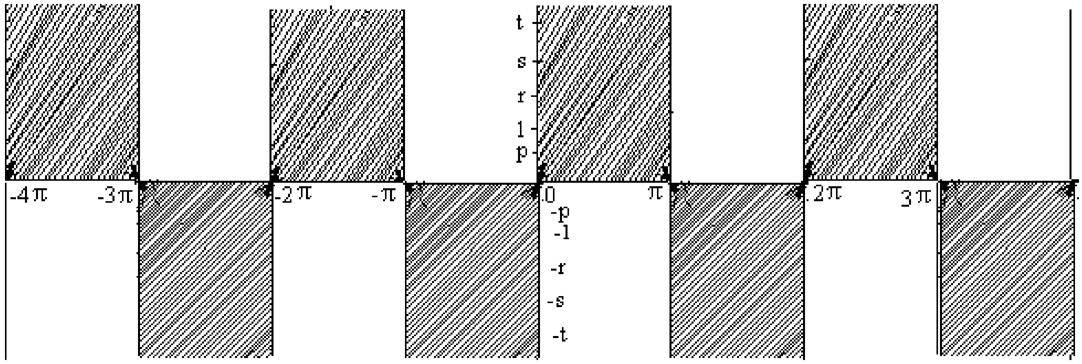
$A_p \cup A_1 \cup A_r \cup A_s \cup A_t$



INTERSECCION $\bigcap_{k\in R} A_k = \{(n\pi,0)/n \in Z^-\} \cup \{(0,n\pi)/n\in Z^+\}$



UNION $\bigcup_{k\in R} A_k$



$$\bigcup_{k\in R} A_k = \bigcup [(2n-1)\pi,\ 2n\pi] \times R^- \cup [2n\pi,\ (2n+1)\pi] \times R^+$$

4. $\bigcap\{A\} = \bigcup\{A\} = A$

ELD

Demostrar $\bigcap\{A\} = A$ (1) $\quad x \in \bigcap\{A\} \Leftrightarrow x \in A \quad \forall A \in \{A\}$ 4.1

Traducción $x \in \bigcap\{A\} \Leftrightarrow x \in A$ $\quad \Leftrightarrow x \in A$

ELD

Demostrar $\bigcup\{A\} = A$ (2) $\quad x \in \bigcup\{A\} \Leftrightarrow x \in A \ \ p.a. A \in \{A\}$ 4.1

Traducción $x \in \bigcup\{A\} \Leftrightarrow x \in A$ $\quad \Leftrightarrow x \in A$

De (1) y (2) $\bigcap\{A\} = \bigcup\{A\} = A$.

5. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \cap\mathcal{B} \subseteq \cap\mathcal{A} \wedge \cup\mathcal{A} \subseteq \cup\mathcal{B}$

(1) **ELD**

Demostrar $\bigcap \mathcal{B} \subseteq \bigcap \mathcal{A}$

Traducción $x \in \bigcap \mathcal{B} \Rightarrow x \in \bigcap \mathcal{A}$

(1)	$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$	**P**
(2)	$x \in \bigcap \mathcal{B}$	P
(3)	$x \in B, \forall B \in \mathcal{B}$	I trad.2,4.1
(4)	$x \in A, \forall A \in \mathcal{A}$	1, *A*/*B* 3
(5)	$x \in \bigcap \mathcal{A}$	I 4,4.1
(6)	$x \in \bigcap \mathcal{B} \Rightarrow x \in \bigcap \mathcal{A}$	CP 2,5
□ (7)	$\bigcap \mathcal{B} \subseteq \bigcap \mathcal{A}$	I trad.6,1.3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\bigcap \mathcal{B} \subseteq \bigcap \mathcal{A}$ si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.
(2) Sea $x \in \bigcap \mathcal{B}$. **(3)** Entonces $x \in B, \forall B \in \mathcal{B}$ (4.1). **(4)**Como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, especificando A para B se cumple que $x \in A, \forall A \in \mathcal{A}$. **(5)**Es decir $x \in \bigcap \mathcal{A}$ (4.1) **(6)(7)** y por lo tanto $\bigcap \mathcal{B} \subseteq \bigcap \mathcal{A}$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\bigcap \mathcal{B} \subseteq \bigcap \mathcal{A}$ si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.
Sea $x \in \bigcap \mathcal{B}$. Entonces $x \in B, \forall B \in \mathcal{B}$ (4.1).Como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, especificando A para B se cumple que $x \in A, \forall A \in \mathcal{A}$. Es decir $x \in \bigcap \mathcal{A}$ (4.1) y por lo tanto $\bigcap \mathcal{B} \subseteq \bigcap \mathcal{A}$.

(2) **ELD**

Demostrar $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$

Traducción $x \in \bigcup \mathcal{A} \Rightarrow x \in \bigcup \mathcal{B}$

(1)	$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$	**P**
(2)	$x \in \bigcup \mathcal{A}$	P
(3)	$x \in A$ p.a. $A \in \mathcal{A}$	I trad.2,4.1(ii)
(4)	$x \in A$ p.a. $A \in \mathcal{B}$	1, 3

(5) $x \in B$ p.a. $B \in \mathcal{B}$ B/A 4

(6) $x \in \bigcup \mathcal{B}$ I 5,4.1(ii)

(7) $x \in \bigcup \mathcal{A} \Rightarrow x \in \bigcup \mathcal{B}$ CP 2,6

□ (8) $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ I trad.7,1.3

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.
(2) Sea $x \in \bigcup \mathcal{A}$. **(3)** Entonces $x \in A$ para algún $A \in \mathcal{A}$ (4.1(ii)).
(4) Como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $x \in A$ para algún $A \in \mathcal{B}$. **(5)**Especificando B para A , entonces tenemos que $x \in B$ para algún $B \in \mathcal{B}$; **(6)(7)(8)**es decir $x \in \bigcup \mathcal{B}$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.
Sea $x \in \bigcup \mathcal{A}$. Entonces $x \in A$ para algún $A \in \mathcal{A}$ (4.1(ii)).
Como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, entonces $x \in A$ para algún $A \in \mathcal{B}$. Especificando B para A , entonces tenemos que $x \in B$ para algún $B \in \mathcal{B}$; es decir $x \in \bigcup \mathcal{B}$.

6. (i) $A \cap (\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{j \in J} (A \cap B_j)$

$$\begin{aligned} x \in A \cap (\bigcup_{j \in J} B_j) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (\bigcup_{j \in J} B_j) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B_j \text{ p.a. } j \in J \\ &\Leftrightarrow \exists j \in J (x \in A \cap B_j) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{j \in J} (A \cap B_j) \end{aligned}$$

(ii) $A \cup (\bigcap_{j \in J} B_j) = \bigcap_{j \in J} (A \cup B_j)$

$$\begin{aligned} x \in A \cup (\bigcap_{j \in J} B_j) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in \bigcap_{j \in J} B_j \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B_j, \forall j \in J \\ &\Leftrightarrow \forall j \in J (x \in A \vee x \in B_j) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \forall j \in J(x \in A \cup B_j)$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{j\in J}(A \cup B_j)$$

(iii) $A \cap (\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{j\in J}(A \cap B_j)$

$$x \in A \cap (\bigcap_{j\in J} B_j) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (\bigcap_{j\in J} B_j)$$
$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B_j \forall j \in J$$
$$\Leftrightarrow \forall j \in J(x \in A \wedge x \in B_j)$$
$$\Leftrightarrow \forall j \in J(x \in A \cap B_j)$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{j\in J}(A \cap B_j)$$

(iv) $A \cup (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J}(A \cup B_j)$

$$x \in A \cup (\bigcup_{j\in J} B_j) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (\bigcup_{j\in J} B_j)$$
$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B_j \; p.a.j$$
$$\Leftrightarrow \exists j \in J(x \in A \vee x \in B_j)$$
$$\Leftrightarrow \exists j \in J(x \in A \cup B_j)$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{j\in J}(A \cup B_j)$$

7. (i) $\bigcap_i (B - A_i) = B - \bigcup_i A_i$

$$x \in \bigcap_i (B - A_i) \Leftrightarrow x \in B - A_i \forall i$$
$$\Leftrightarrow \forall i(x \in B \wedge x \notin A_i)$$
$$\Leftrightarrow \forall i(x \in B \wedge x \in A_i')$$
$$\Leftrightarrow x \in B \wedge x \in \bigcap_i A_i'$$
$$\Leftrightarrow x \in B \wedge x \in (\bigcup_i A_i)' \qquad 4.4 \text{ (ii)}$$
$$\Leftrightarrow x \in B \wedge x \notin (\bigcup_i A_i)$$
$$\Leftrightarrow x \in B - \bigcup_i A_i$$

(ii) $\bigcup_i (B - A_i) = B - \bigcap_i A_i$

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_i (B - A_i) &\Leftrightarrow x \in B - A_i \; p.a.i \\ &\Leftrightarrow x \in B \wedge \neg(x \in A_i \; p.a.i) \\ &\Leftrightarrow x \in B \wedge \forall i (x \notin A_i) \\ &\Leftrightarrow x \in B \wedge x \notin \bigcap_i A_i \\ &\Leftrightarrow x \in B - \bigcap_i A_i \end{aligned}$$

(iii) $\bigcap_i (A_i - B) = (\bigcap_i A_i) - B$

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_i (A_i - B) &\Leftrightarrow \forall i (x \in A_i - B) \\ &\Leftrightarrow \forall i (x \in A_i \wedge x \notin B) \\ &\Leftrightarrow \forall i (x \in A_i) \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_i A_i \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in (\bigcap_i A_i) - B \end{aligned}$$

(iv) $\bigcup_{i \in I} (A_i - B) = (\bigcup_{i \in I} A_i) - B$

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i \in I} (A_i - B) &\Leftrightarrow \exists i \in I (x \in A_i - B) \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I (x \in A_i) \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_i A_i \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_i A_i - B \end{aligned}$$

8. (i) $A \times (\bigcap_{j \in J} B_j) = \bigcap_{j \in J} (A \times B_j)$

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (\bigcap_{j \in J} B_j) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in \bigcap_{j \in J} B_j \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge \forall j \in J (y \in B_j) \\ &\Leftrightarrow \forall j \in J (x \in A \wedge y \in B_j) \\ &\Leftrightarrow \forall j \in J ((x, y) \in A \times B_j) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \bigcap_{j \in J} (A \times B_j) \end{aligned}$$

(ii) $(\bigcap_{i\in I} A_i)\times B = \bigcap_{i\in I}(A_i \times B)$

$$\begin{aligned}(x,y)\in(\bigcap_{i\in I} A_i)\times B &\Leftrightarrow x\in\bigcap_{i\in I} A_i \wedge y\in B\\ &\Leftrightarrow x\in A_i \forall i\in I \wedge y\in B\\ &\Leftrightarrow \forall i\in I(x\in A_i \wedge y\in B)\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in\bigcap_{i\in I}(A_i\times B)\end{aligned}$$

(iii) $A\times(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J}(A\times B_j)$

$$\begin{aligned}(x,y)\in A\times(\bigcup_{j\in J} B_j) &\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in(\bigcup_{j\in J} B_j)\\ &\Leftrightarrow x\in A\wedge \exists j\in J(y\in B_j)\\ &\Leftrightarrow \exists j\in J(x\in A\wedge y\in B_j)\\ &\Leftrightarrow \exists j\in J((x,y)\in A\times B_j)\\ &\Leftrightarrow \exists j\in J((x,y)\in A\times B_j)\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in\bigcup_{j\in J} A\times B_j)\end{aligned}$$

(iv) $(\bigcup_{i\in I} A_i)\times B = \bigcup_{i\in I}(A_i\times B)$

$$\begin{aligned}(x,y)\in(\bigcup_{i\in I} A_i)\times B &\Leftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I} A_i \wedge y\in B\\ &\Leftrightarrow (\exists i\in I : x\in A_i)\wedge y\in B\\ &\Leftrightarrow \exists i\in I(x\in A_i \wedge y\in B)\\ &\Leftrightarrow \exists i\in I((x,y)\in A_i\times B)\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in\bigcup_{i\in I}(A_i\times B)\end{aligned}$$

9. (Propiedades Asociativas)

(iii) $\bigcap_{i\in I\cup J} A_i = (\bigcap_{i\in I} A_i)\cup(\bigcap_{j\in J} A_j)$

$$\begin{aligned}x\in\bigcap_{i\in I\cup J} A_i &\Leftrightarrow x\in A_i\ \forall i\in I\cup J\\ &\Leftrightarrow x\in A_i\ \forall i(i\in I\vee i\in J)\\ &\Leftrightarrow x\in A_i\ \forall i\in I\vee x\in A_i\forall i\in J\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i \vee x \in \bigcap_{j\in J} A_j$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i \cup \bigcap_{j\in J} A_j$$

(iv) $\bigcup_{i\in I\cup J} A_i = (\bigcup_{i\in I} A_i) \cup (\bigcup_{j\in J} A_j)$

$$x \in \bigcup_{i\in I\cup J} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I \cup J : x \in A_i$$
$$\Leftrightarrow (\exists i \in I \vee \exists i \in J)(x \in A_i)$$
$$\Leftrightarrow \exists i \in I(x \in A_i) \vee \exists j \in J(x \in A_j)$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i \vee x \in \bigcup_{j\in J} A_j$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{j\in J} A_j$$

10. (i) $\bigcup_{i\in I} A_i - \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J} (A_i - B_j) = \bigcap_{j\in J} \bigcup_{i\in I} (A_i - B_j)$

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i - \bigcup_{j\in J} B_j \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i \wedge x \notin \bigcup_{j\in J} B_j$$
$$\Leftrightarrow \exists i \in I(x \in A_i) \wedge x \in (\bigcup_{j\in J} B_j)'$$
$$\Leftrightarrow \exists i \in I(x \in A_i) \wedge x \in \bigcap_{j\in J} B_j' \qquad 4.4(ii)$$
$$\Leftrightarrow \exists i \in I(x \in A_i) \wedge x \in B_j' \forall j \in J$$
$$\Leftrightarrow \exists i \in I\, \forall j \in J(x \in A_i - B_j)$$
$$\Leftrightarrow \exists i \in I : x \in \bigcap_{j\in J} (A_i - B_j)$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J} (A_i - B_j)$$

$$x \in \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J} (A_i - B_j) \Leftrightarrow \exists i \in I : x \in \bigcap_{j\in J} (A_i - B_j)$$
$$\Leftrightarrow \exists i \in I\, \forall j \in J(x \in A_i - B_j)$$
$$\Leftrightarrow \forall j \in J\, \exists i \in I\, (x \in A_i - B_j)$$
$$\Leftrightarrow \forall j \in J\, (x \in \bigcup_{i\in I} (A_i - B_j))$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{j\in J} \bigcup_{i\in I} (A_i - B_j)$$

(ii) $\bigcap_{i\in I} A_i - \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J} (A_i - B_j) = \bigcup_{j\in J} \bigcap_{i\in I} (A_i - B_j)$

$$
\begin{aligned}
x \in \bigcap_{i\in I} A_i - \bigcap_{j\in J} B_j &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i \wedge x \notin \bigcap_{j\in J} B_j \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I\ x \in A_i \wedge x \in (\bigcap_{j\in J} B_j)' \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I\ x \in A_i \wedge x \in \bigcup_{j\in J} B_j' \qquad \text{4.4 (i)} \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I\, (x \in A_i) \wedge \exists j \in J\, (x \in B_j') \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I\ \exists j \in J\ (x \in A_i \wedge x \notin B_j) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I\ \exists j \in J\ (x \in A_i - B_j) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I\ (x \in \bigcup_{j\in J} A_i - B_j) \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J} (A_i - B_j)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x \in \bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J} (A_i - B_j) &\Leftrightarrow \forall i \in I\, (x \in \bigcup_{j\in J} (A_i - B_j)) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I\ \exists j \in J\, (x \in A_i - B_j) \\
&\Leftrightarrow \exists j \in J\ \forall i \in I\, (x \in A_i - B_j) \\
&\Leftrightarrow \exists j \in J\ (x \in \bigcap_{i\in I} (A_i - B_j)) \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{j\in J} \bigcap_{i\in I} (A_i - B_j))
\end{aligned}
$$

(iii) $\bigcup_{i\in I} A_i - \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i - B_j)$

$$
\begin{aligned}
x \in \bigcup_{i\in I} A_i - \bigcap_{j\in J} B_j &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i \wedge x \notin \bigcap_{j\in J} B_j \\
&\Leftrightarrow \exists i \in I (x \in A_i) \wedge x \in (\bigcap_{j\in J} B_j)' \\
&\Leftrightarrow \exists i \in I (x \in A_i \wedge x \in \bigcup_{j\in J} B_j') \qquad \text{4.4(i)} \\
&\Leftrightarrow \exists i \in I : x \in A_i \wedge \exists j \in J : x \in B_j' \\
&\Leftrightarrow \exists i \in I\ \exists j \in J (x \in A_i \wedge x \notin B_j) \\
&\Leftrightarrow \exists i \in I\ \exists j \in J (x \in A_i - B_j) \\
&\Leftrightarrow \exists (i, j) \in I \times J (x \in A_i - B_j) \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i - B_j)
\end{aligned}
$$

(iv) $\bigcap_{i\in I} A_i - \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i - B_j)$

$$
\begin{aligned}
x \in \bigcap_{i\in I} A_i - \bigcup_{j\in J} B_j &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i \wedge x \notin \bigcup_{j\in J} B_j \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i \wedge x \in (\bigcup_{j\in J} B_j)' \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i \wedge x \in \bigcap_{j\in J} B_j' \qquad \text{4.4 (ii)} \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I (x \in A_i) \wedge \forall j \in J (x \in B_j') \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I \forall j \in J (x \in A_i \wedge x \in B_j') \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I \forall j \in J (x \in A_i \wedge x \notin B_j) \\
&\Leftrightarrow \forall (i,j) \in I \times J (x \in A_i - B_j) \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i - B_j)
\end{aligned}
$$

11. (i) $\mathcal{P}\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} \mathcal{P}A_i$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X} \in \mathcal{P}\bigcap_{i\in I} A_i &\Leftrightarrow \mathcal{X} \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i \\
&\Leftrightarrow \mathcal{X} \subseteq A_i \ \forall i \\
&\Leftrightarrow \mathcal{X} \in \mathcal{P}(A_i) \forall i \\
&\Leftrightarrow \mathcal{X} \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{P}(A_i)
\end{aligned}
$$

(ii) $\mathcal{P}\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} \mathcal{P}A_i$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X} \in \mathcal{P}\bigcup_{i\in I} A_i &\Leftrightarrow \mathcal{X} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \\
&\Leftrightarrow \exists i \in I \ (\mathcal{X} \subseteq A_i) \\
&\Leftrightarrow \exists i \in I \ (\mathcal{X} \in \mathcal{P}(A_i)) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{X} \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{P}(A_i)
\end{aligned}
$$

12. (i) $(\bigcap_{i\in I} A_i) \times (\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} (A_i \times B_i)$

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in (\bigcap_{i\in I} A_i) \times (\bigcap_{i\in I} B_i) &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i \wedge y \in \bigcap_{i\in I} B_i \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I : x \in A_i \wedge \forall i \in I : y \in B_i \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I (x \in A_i \wedge y \in B_i) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I ((x,y) \in A_i \times B_i) \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_i)
\end{aligned}
$$

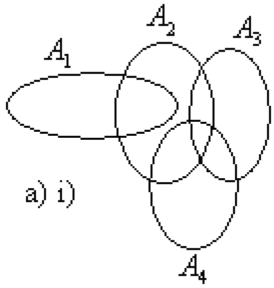
(ii) $(\bigcup_{i\in I} A_i)\times(\bigcup_{i\in I} B_i)=\bigcup_{i\in I}(A_i\times B_i)$

$$\begin{aligned}(x,y)\in(\bigcup_{i\in I} A_i)\times(\bigcup_{i\in I} B_i) &\Leftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I} A_i \wedge y\in\bigcup_{i\in I} B_i\\ &\Leftrightarrow \exists i\in I: x\in A_i \wedge \exists i\in I: y\in B_i\\ &\Leftrightarrow \exists i\in I(x\in A_i \wedge y\in B_i)\\ &\Leftrightarrow \exists i\in I((x,y)\in A_i\times B_i)\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i\times B_i)\end{aligned}$$

13. Sea $(A_n)_{n\in N^+}$ una familia, $S_0=\phi$, $S_k=\bigcup_{n=1}^{K} A_n$

(1) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n-S_{n-1})$

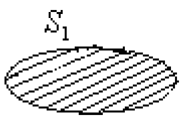
(2) Los A_n-S_{n-1} son mutuamente disjuntos



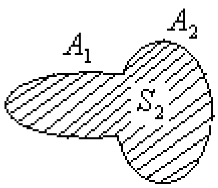
a) i)

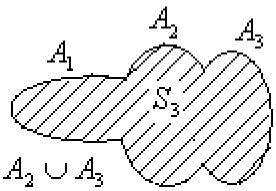
ii)

$S_1=A_1$

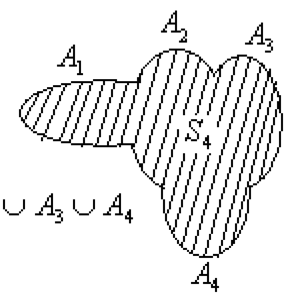


$S_2=A_1\cup A_2$



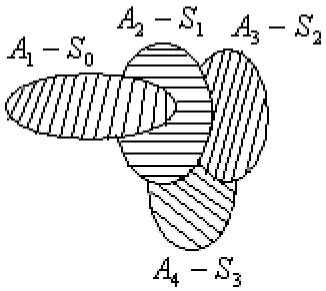


$S_3=A_1\cup A_2\cup A_3$

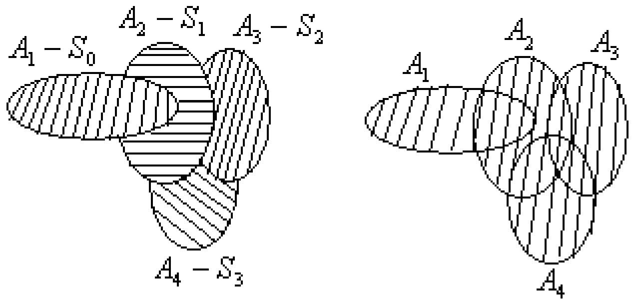


$S_4=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$

(iii)



(iv) $\bigcup_{n=1}^{4}(A_n - S_{n-1})$ $\bigcup_{n=1}^{4} A_n$



Se observa que $\bigcup_{n=1}^{4}(A_n - S_{n-1}) = \bigcup_{n=1}^{4} A_n$

(v)

$$A_1 - S_0 \cap A_2 - S_1 = \phi$$
$$A_2 - S_1 \cap A_3 - S_2 = \phi$$
$$A_3 - S_2 \cap A_4 - S_3 = \phi$$

(d) **ELD**

Demostrar $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - S_{n-1})$

Traducción $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - S_{n-1})$

$\Leftarrow$)(1)	$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - S_{n-1})$	P
(2)	$\exists n \in Z^+ : x \in A_n - S_{n-1}$	trad.1, 4.1(ii)
(3)	$\exists n \in Z^+ : x \in A_n \wedge x \notin S_{n-1}$	2
(4)	$\exists n \in Z^+ : x \in A_n$	S 3
(5)	$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$	trad.4,4.1(ii)
$\square_1$ (6)	$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - S_{n-1}) \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$	CP 1,5

(7)	$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$	P
(8)	$\exists n \in Z^+ : x \in A_n$	trad.7, 4.1(ii)
(9)	$x \notin S_{n-1} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}$	P
(10)	$\exists n \in Z^+ : x \in A_n \wedge x \notin S_{n-1}$	A 8,9
(11)	$\exists n \in Z^+ \ (x \in A_n - S_{n-1})$	traducción 10
(12)	$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - S_{n-1})$	trad.11, 4.1(ii)
□$_2$ (13)	$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - S_{n-1})$	CP 7,12
(14)	$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - S_{n-1})$	LB 6,13
□ (15)	$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - S_{n-1})$	traducción 14

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - S_{n-1})$.

(1) Sea $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - S_{n-1})$.

(2) Entonces $x \in A_n - S_{n-1}$ para algún $n \in Z^+$ (4.1(ii)). **(3)**De donde $x \in A_n$ y $x \notin S_{n-1}$. **(4)**En particular $x \in A_n$ para algún $n \in Z^+$. **(5)** **(6)**Luego $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y se tiene la implicación

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - S_{n-1}) \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad (*)$$

(7) Sea ahora $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. **(8)**Entonces existe un $n \in Z^+ : x \in A_n$ (4.1(ii)). **(9)**Por construcción de S_k es claro que $x \notin S_{n-1} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}$ **(10)** y $x \in A_n \wedge x \notin S_{n-1}$ para algún $n \in Z^+$. **(11)**De donde $x \in A_n - S_{n-1}$ para algún $n \in Z^+$ **(12)**es decir $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - S_{n-1})$ (4.1(ii)). **(13)**Por lo tanto

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - S_{n-1}) \qquad (**)$$

(14) De (*) y (**) se tiene la equivalencia $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - S_{n-1})$ **(15)**o sea $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - S_{n-1})$, que era lo que queríamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - S_{n-1})$.

Sea $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - S_{n-1})$. Entonces $x \in A_n - S_{n-1}$ para algún $n \in Z^+$(4.1(ii)). De donde $x \in A_n$ y $x \notin S_{n-1}$. En particular $x \in A_n$ para algún $n \in Z^+$.
Luego $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y se tiene la implicación

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - S_{n-1}) \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad (*)$$

Sea ahora $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces existe un $n \in Z^+ : x \in A_n$ (4.1(ii)). Por construcción de S_k es claro que $x \notin S_{n-1} = A_1 \cup A_2 \cup . . . \cup A_{n-1}$ y $x \in A_n \wedge x \notin S_{n-1}$ para algún $n \in Z^+$. De donde $x \in A_n - S_{n-1}$ para algún $n \in Z^+$ es decir $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - S_{n-1})$ (4.1(ii)). Por lo tanto

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - S_{n-1}) \qquad (**)$$

De (*) y (**) se tiene la equivalencia $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - S_{n-1})$ o sea $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - S_{n-1})$, que era lo que queríamos demostrar.

Los $A_n - S_{n-1}$ son mutuamente disjuntos.

c) $(A_n - S_{n-1}) \cap (A_{n-1} - S_{n-2}) = \phi$

ELD

Demostrar $(A_n - S_{n-1}) \cap (A_{n-1} - S_{n-2}) = \phi$

Por RAA

(1)	$(A_n - S_{n-1}) \cap (A_{n-1} - S_{n-2}) \neq \phi$	P
(2)	$\exists x \in (A_n - S_{n-1}) \cap (A_{n-1} - S_{n-2})$	I 1,1.6(ii)
(3)	$x \in (A_n \cap S'_{n-1}) \cap (A_{n-1} \cap S'_{n-2})$	2
(4)	$x \in A_n \cap A_{n-1} \cap S'_{n-1} \cap S'_{n-2}$	3
(5)	$x \in A_n \cap A_{n-1} \cap (S_{n-1} \cup S_{n-2})'$	4, 4.4(ii)
(6)	$S_{n-1} \cup S_{n-2} = S_{n-1}$	P
(7)	$x \in A_n \cap A_{n-1} \cap (S_{n-1})'$	I 5,6
(8)	$x \in A_n \cap A_{n-1} \wedge x \notin S_{n-1}$	7
(9)	$S_{n-1} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}$	P
(10)	$x \in A_n \cap A_{n-1} \wedge x \notin (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1})$	I 8,9
(11)	$x \in A_n \wedge x \in A_{n-1} \wedge x \notin A_1 \wedge x \notin A_2 \wedge \ldots \wedge x \notin A_{n-1}$	10,4.4(ii)
(12)	$x \in A_{n-1} \wedge x \notin A_{n-1}$	S 11
(13)	$(A_n - S_{n-1}) \cap (A_{n-1} - S_{n-2}) = \phi$	RAA 1,12
□ (14)	Los $A_n - S_{n-1}$ son mutuamente disjuntos	traducción 13

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que Los $A_n - S_{n-1}$ son mutuamente disjuntos, es decir que $(A_n - S_{n-1}) \cap (A_{n-1} - S_{n-2}) = \phi$.

(1) Supongamos lo contrario, esto es, $(A_n - S_{n-1}) \cap (A_{n-1} - S_{n-2}) \neq \phi$. **(2)**Esto implica que existe x tal que $x \in (A_n - S_{n-1}) \cap (A_{n-1} - S_{n-2})$ **(3)**y $x \in (A_n \cap S'_{n-1}) \cap (A_{n-1} \cap S'_{n-2})$ **(4)**o sea $x \in A_n \cap A_{n-1} \cap S'_{n-1} \cap S'_{n-2}$. **(5)**Como $(S_{n-1} \cup S_{n-2})' = S'_{n-1} \cap S'_{n-2}$, entonces $x \in A_n \cap A_{n-1} \cap (S_{n-1} \cup S_{n-2})'$.

(6) Como $S_{n-1} \cup S_{n-2} = S_{n-1}$, entonces **(7)** $x \in A_n \cap A_{n-1} \cap (S_{n-1})'$ **(8)** o sea $x \in A_n \cap A_{n-1} \wedge x \notin S_{n-1}$.

(9) Por construcción de S_k ,tenemos $S_{n-1} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}$. **(10)** Luego $x \in A_n \cap A_{n-1} \wedge x \notin (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1})$,

(11) es decir $x \in A_n \wedge x \in A_{n-1} \wedge x \notin A_1 \wedge x \notin A_2 \wedge \ldots \wedge x \notin A_{n-1}$; **(12)** de donde $x \in A_{n-1} \wedge x \notin A_{n-1}$ que es un absurdo, **(13)** luego $(A_n - S_{n-1}) \cap (A_{n-1} - S_{n-2}) = \phi$, **(14)** demostrándose que los $A_n - S_{n-1}$ son mutuamente disjuntos .

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que los $A_n - S_{n-1}$ son mutuamente disjuntos es decir que $(A_n - S_{n-1}) \cap (A_{n-1} - S_{n-2}) = \phi$.

Supongamos lo contrario:

$$(A_n - S_{n-1}) \cap (A_{n-1} - S_{n-2}) \neq \phi .$$

Entonces existe x tal que

$$x \in (A_n - S_{n-1}) \cap (A_{n-1} - S_{n-2}) \qquad (1.6i);$$

o sea

$$x \in (A_n \cap S'_{n-1}) \cap (A_{n-1} \cap S'_{n-2})$$

o también

$$x \in A_n \cap A_{n-1} \cap S'_{n-1} \cap S'_{n-2} .$$

Como

$$(S_{n-1} \cup S_{n-2})' = S'_{n-1} \cap S'_{n-2} ,$$

entonces

$$x \in A_n \cap A_{n-1} \cap (S_{n-1} \cup S_{n-2})' .$$

Como

$$S_{n-1} \cup S_{n-2} = S_{n-1} ,$$

entonces

$$x \in A_n \cap A_{n-1} \cap (S_{n-1})'$$

o sea

$$x \in A_n \cap A_{n-1} \wedge x \notin S_{n-1} .$$

Por construcción de S_k ,

$$S_{n-1} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} .$$

Luego

$$x \in A_n \cap A_{n-1} \wedge x \notin (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) .$$

Es decir

$$x \in A_n \wedge x \in A_{n-1} \wedge x \notin A_1 \wedge x \notin A_2 \wedge \ldots \wedge x \notin A_{n-1} ;$$

de donde

$$x \in A_{n-1} \wedge x \notin A_{n-1} \text{, que es un absurdo;}$$

luego

$$(A_n - S_{n-1}) \cap (A_{n-1} - S_{n-2}) = \phi ,$$

demostrándose que los $A_n - S_{n-1}$ son mutuamente disjuntos .

14. (i) $\bigcup(x,y) = ?$

$$\bigcup(x,y) = \bigcup\{\{\{1\},\{1,x\}\},\{\{2\},\{2,y\}\}\}$$
$$= \{\{1\},\{1,x\}\} \bigcup \{\{2\},\{2,y\}\}$$
$$= \{\{1\},\{2\},\{1,x\},\{2,y\}\}$$

(ii) $\bigcap(x,y) = ?$ $\quad \bigcap(x,y) = \bigcap\{\{\{1\},\{1,x\}\},\{\{2\},\{2,y\}\}\}$

$$= \{\{1\},\{1,x\}\} \bigcap \{\{2\},\{2,y\}\}$$
$$= \phi$$

(iii) $\bigcap\bigcap(x,y) = ?$

$$\bigcap\bigcap(x,y) = \bigcap\phi = \phi$$

(iv) $\bigcup\bigcap(x,y) = ?$

$$\bigcup\bigcap(x,y) = \bigcup\phi = \phi$$

(v) $\bigcap\bigcup(x,y) = ?$

$$\bigcap\bigcup(x,y) = \bigcap\{\{1\},\{2\},\{1,x\},\{2,y\}\}$$
$$= \{1\} \cap \{2\} \cap \{1,x\} \cap \{2,y\} = \phi$$

2. IMÁGENES Y FAMILIAS

La proposición 3.19 tiene una importante generalización :

4.7 Proposición : Sea f una función :

(i) $\overrightarrow{f} \bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{i\in I} \overrightarrow{f} A_i$ $\qquad$ (ii) $\overrightarrow{f} \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} \overrightarrow{f} A_i$

(iii) $\overleftarrow{f} \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} \overleftarrow{f} A_i$ $\qquad$ (iv) $\overleftarrow{f} \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} \overleftarrow{f} A_i$

Demostración :

(i) $y \in \overrightarrow{f} \bigcap_{i\in I} A_i \Rightarrow y = f(x)$ *para algún* $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$

$$\Rightarrow y = f(x) \ \ para\ alg\acute{u}n\ x\ tal\ que\ x \in A_i \ \ para\ todo\ A_i$$

$$\Rightarrow y \in \vec{f}\ A_i \ \ para\ todo\ A_i$$

$$\Rightarrow y \in \bigcap_{i\in I} \vec{f}\ A_i .$$

(ii) $y \in \vec{f} \bigcup_{i\in I} A_i \quad \Leftrightarrow \exists x \in \bigcup_{i\in I} A_i : y = f(x)$ 3.15

$$\Leftrightarrow x \in A_i \ p.a.i \in I : y = f(x)$$

$$\Leftrightarrow y \in \vec{f}\ A_i \ p.a.i \in I$$

$$\Leftrightarrow y \in \bigcup_{i\in I} \vec{f}\ A_i$$

(iii) $x \in \overset{\leftarrow}{f} \bigcap_{i\in I} A_i \quad \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in I} A_i$ 3.15

$$\Leftrightarrow f(x) \in A_i \ \ \forall i \in I$$

$$\Leftrightarrow x \in \overset{\leftarrow}{f}\ A_i \ \ \forall i \in I$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} \overset{\leftarrow}{f}\ A_i$$

(iv) $x \in \overset{\leftarrow}{f} \bigcup_{i\in I} A_i \quad \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in I} A_i$ 3.15

$$\Leftrightarrow f(x) \in A_i \ p.a.i \in I$$

$$\Leftrightarrow x \in \overset{\leftarrow}{f}\ A_i \ p.a.i \in I$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} \overset{\leftarrow}{f}\ A_i$$

Como se ve, la función $\overset{\leftarrow}{f}$ se comporta mejor que $\vec{f}$. Esto tiene repercusiones importantes en el estudio de las funciones continuas.

EJERCICIO 4.2

1. De un ejemplo para f y para $\{A_i\}_{i\in I}$ de tal manera que $\vec{f} \bigcap_{i\in I} A_i \neq \bigcap_{i\in I} \vec{f}\ A_i$.

   $f = \{(1, a), (4, e), (2, c), (3, d), (5, d), (6, c), (7, d)\}$

$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ $\qquad\qquad$ $\vec{f}\ A_1 = \{a, c, d, e\}$

$A_2 = \{2, 3, 5, 6\}$ $\qquad \vec{f}\, A_2 = \{c, d\}$

$A_3 = \{3, 6, 7\}$ $\qquad \vec{f}\, A_3 = \{c, d\}$

$\bigcap_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{3\}$ $\qquad \vec{f}\, A_1 \cap \vec{f}\, A_2 \cap \vec{f}\, A_3 = \{c, d\}$

$\vec{f} \bigcap_{i=1}^{3} A_i = \vec{f}\{3\} = \{d\}$ $\qquad \bigcap_{i=1}^{3} \vec{f}\, A_i = \{c, d\}$ $\qquad \vec{f} \bigcap_{i=1}^{3} A_i \neq \bigcap_{i=1}^{3} \vec{f}\, A_i$

3. PRODUCTO GENERALIZADO

Hemos definido $A_1 \times A_2$. Pudiéramos definir fácilmente también $A_1 \times A_2 \times A_3$ que sería el conjunto de todas las triplas (véase 3.1) (x_1, x_2, x_3) tales que $x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2,\ x_3 \in A_3$. Podemos continuar así definiendo $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$, . . . etc. En un siguiente paso definiríamos $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n \times \ldots$. que sería el conjunto de todas las sucesiones infinitas $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ tales que $x_n \in A_n$ para cada *n*. Obsérvese que en este último paso se cambió la naturaleza de los elementos que forman los productos. De parejas, triplas, . . . , n-plas, . . . se pasó a sucesiones que son un cierto tipo de funciones (Véase Ejemplo 2 al principio de este capítulo). Esta última idea, la de que los elementos de un producto sean unas ciertas funciones, la usaremos para generalizar el concepto de producto.

4.8 Definición : Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia.

$$\underset{i \in I}{X} A_i = \left\{ f \,/\, f : I \mapsto \bigcup_{i \in I} A_i \wedge \forall i \in I (fi \in A_i) \right\}$$

. $\underset{i \in I}{X} A_i$ se llama el **producto** de los conjuntos A $_i$. (Otra notación para $\underset{i \in I}{X} A_i$ es $\coprod_{i \in I} A_i$)

Caracterización de los elementos del producto generalizado:

$$f \in \underset{i \in I}{X} A_i \Leftrightarrow f : I \mapsto \bigcup_{i \in I} A_i \wedge \forall i \in I\, (fi \in A_i)$$

Es importante tener en cuenta que los elementos del producto generalizado son funciones.

Ejemplo : Sea $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{c, d\}$.

$$A_1 \times A_2 = \{(a , c), (a , d), (b , c), (b , d) \}$$

$$\begin{array}{lcl} f_1 : \{1,2\} & \longrightarrow & \{a,b,c,d\} \\ 1 & \longrightarrow & a \\ 2 & \longrightarrow & c \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} f_2 : \{1,2\} & \longrightarrow & \{a,b,c,d\} \\ 1 & \longrightarrow & a \\ 2 & \longrightarrow & d \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} f_3 : \{1,2\} & \longrightarrow & \{a,b,c,d\} \\ 1 & \longrightarrow & b \\ 2 & \longrightarrow & c \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} f_4 : \{1,2\} & \longrightarrow & \{a,b,c,d\} \\ 1 & \longrightarrow & b \\ 2 & \longrightarrow & d \end{array}$$

Entonces $\underset{i\in I}{X} A_i = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Podemos construir la siguiente biyección entre $\underset{i\in I}{X} A_i$ y $A_1 \times A_2$:

$$\begin{array}{ccc} \underset{i\in I}{X} A_i & \longrightarrow & A_1 \times A_2 \\ f_1 & \longrightarrow & (a,c) \\ f_2 & \longrightarrow & (a,d) \\ f_3 & \longrightarrow & (b,c) \\ f_4 & \longrightarrow & (b,d) \end{array}$$

Entonces se entenderá fácilmente que $\underset{i\notin\{1,2\}}{X} \{A_i\}$ es el conjunto de las cuatro funciones :

i	fi
1	a
2	c

i	fi
1	a
2	d

i	fi
1	b
2	c

i	fi
1	b
2	d

Conjunto que es diferente de $A_1 \times A_2$ pero con el cual se puede identificar (Ejercicio 4.3 (1)).

En general, veamos que el conjunto $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ se puede identificar con el conjunto $\underset{i\in I}{X} A_i$:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) / a_i \in A_i \; i = 1,2,\dots,n\}$$

Cada n-étupla se puede ver como una función:

$$
\begin{aligned}
(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \quad f : I &\longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \\
1 &\longrightarrow a_1 \in A_1 \\
2 &\longrightarrow a_2 \in A_2 \\
\cdot \quad & \qquad \cdot \\
\cdot \quad & \qquad \cdot \\
\cdot \quad & \qquad \cdot \\
n &\longrightarrow a_n \in A_n
\end{aligned}
$$

Así que el conjunto $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ se puede indentificar con el conjunto

$$\underset{i\in I}{X} A_i = \left\{ f \,/\, f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} A_i \wedge \forall i \in I (fi \in A_i) \right\}.$$

Cuando I = {1, 2, . . . , n }, se acostumbra a escribir también $\overset{n}{\underset{i=1}{X}} A_i$ en lugar de $\underset{i\in I}{X} A_i$ o si se quiere $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$. Cuando I = **N**, se acostumbra a escribir también $\overset{\infty}{\underset{i=1}{X}} A_i$ en lugar de $\underset{i\in N}{X} A_i$.

Muy frecuentemente se tiene que todos los A_i son iguales, A_i = A para todo i y entonces escribimos A^I en lugar de $\overset{n}{\underset{i=1}{X}} A_i$; como en A^2, siendo 2 = {0,1}, $A_0 = A_1 = A$. O más general :

4.9 Definición : $B^A = \{ f \,/\, f : A \mapsto B \}$

4.10 Proposición : Existe una biyección entre $\mathcal{P}$A y 2^A.

Demostración : Antes de la demostración es útil que el lector vea el ejercicio 4.3 (6). Sea *a :* $\mathcal{P}$A $\mapsto$ 2^A tal que *a : B* $\mapsto$ f_B para cada B$\subseteq$A y siendo f_B la función característica de B en A (Véase 3.8) $f_B \in 2^A$ por 3.9.

(i) *a* es inyectiva : Si $B_1 \neq B_2$, existe $x \in B_1, x \notin B_2$ (o al contrario).

$f_{B_1} x = 1$ pero $f_{B_2} x = 0$ o sea que $f_{B_1} \neq f_{B_2}$ y $a\,B_1 \neq a\,B_2$.

(iii) a es sobreyectiva : si $f\in 2^A$, sea $B_f = \{ x / x \in A \wedge fx = 1 \}$ o sea $\overleftarrow{f} 1$.

Entonces $f = f_{B_f} = aB_f$.

En lugar de usar la letra *f* para denotar a los elementos de un producto $\underset{i=1}{\overset{n}{X}} A_i$ es más frecuente usar una letra como a o más bien $(a_i)_{i\in I}$ de acuerdo con la notación introducida en este capítulo.

4.11 Definición : Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia, para cada k∈I la **k-ésima proyección** de $\underset{i\in I}{X} A_i$ es la función

$$p_k : \underset{i\in I}{X} A_i \mapsto A_k \text{ tal que } p_k\ (a_i)_{i\in I} = a_k$$

(Véase 2.12 y 3.18).

4.12 Proyección : Sea p_k la k-ésima proyección de $\underset{i\in I}{X} A_i$ y $(B_i)_{i\in I}$ una familia tal que para cada $i \in I$, $B_i \subseteq A_i$, entonces

$$\underset{i\in I}{X} A_i = \bigcap_{k\in I} \overleftarrow{p_k}\ B_k\ .$$

Demostración : Ejercicio.

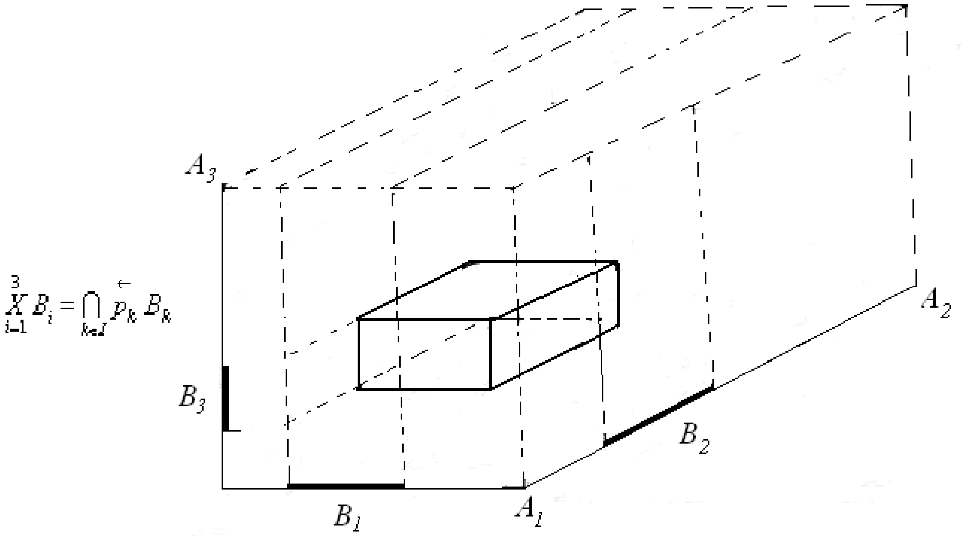


Fig. 42

EJERCICIO 4.3

1. Encuentre una biyección entre $\prod_{i=1}^{2} A_i$ y $A_1 x A_2$ (con la definición 2.6).
2. $B^{\phi} = ?$ $\phi^{A} = ?$

3. $B^A = \phi \Rightarrow B = \phi \vee A \neq \phi$

4. Si A tiene m elementos y B tiene n elementos (m y n naturales) ¿Cuantos elementos
tiene B ^{A} ?

5. $B_1 \subset B_2 \Rightarrow B_1^A \subseteq B_2^A$

6. Siendo A={a, b, c} encuentre Π𝒫(A) y 2^A .

7. Siendo cada $A_i \subseteq B$, $\underset{i\in I}{X} A_i \subseteq B^I$

8. $\forall i \in I \ (A_i \subseteq B_i) \Rightarrow \underset{i\in I}{X} A_i \subseteq \underset{i\in I}{X} B_i$

9. 4,12

10 $\underset{i\in I}{X} A_i \neq \phi \Rightarrow \vec{p}_k \underset{i\in I}{X} = A_k$

11. Para cada $A \subseteq \underset{i\in I}{X} A_i$, $A \subseteq \underset{i\in I}{X} \vec{p}_i A$
(Todo sólido se puede meter ajustadamente en una caja rectangular)

12. $\underset{i\in I}{X} A_i \cap \underset{i\in I}{X} B_i = \underset{i\in I}{X}(A_i \cap B_i)$

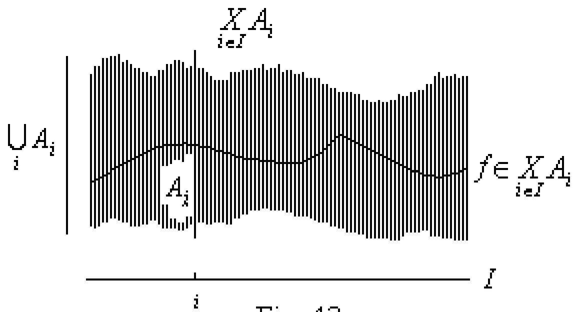


Fig. 43

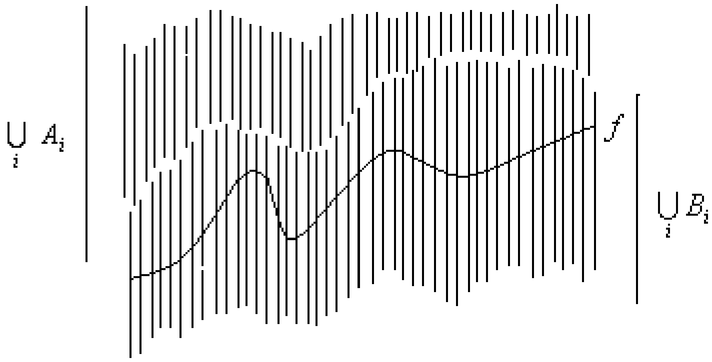


Fig. 44

$f \in \underset{i \in I}{X} A_i$, $f \in \underset{i \in I}{X} B_i$, $f \in \underset{i \in I}{X} (A_i \cap B_i)$

El conjunto $A_1 \times A_2$ lo hemos venido visualizando como un rectángulo, $A_1 \times A_2 \times A_3$ lo podemos visualizar como un paralelepípedo. El modo como definimos producto en este capítulo sugiere otra manera de visualizar el concepto. Pensemos en el conjunto I de índices como un segmento de recta, el cual lo colocamos horizontalmente. Sobre cada $i \in I$ colocamos verticalmente el correspondiente A_i, el cual también lo visualizamos como un segmento de recta. Nos resulta una colección de segmentos verticales contiguos que nos representa a $\underset{i \in I}{X} A_i$ y encerrados dentro del rectángulo $I \times \bigcup_{i \in I} A_i$ (Fig. 43). Más precisamente cada $f \in \underset{i \in I}{X} A_i$ lo podemos ver como una curva que sobre cada i corta a A_i.

Visualicemos el ejercicio 12 (Fig. 44).

Un f que esté tanto en $\underset{i}{X} A_i$ como en $\underset{i}{X} B_i$ corta a cada $A_i \cap B_i$.

13. (i) $\underset{i \in I}{X} A_i \cap \underset{j \in J}{X} B_j = \underset{(i,j) \in I xJ}{X} (A_i \cap B_j)$

(ii) $\underset{i \in I}{X} A_i \cup \underset{j \in J}{X} B_j = \underset{(i,j) \in I xJ}{X} (A_i \cup B_j)$

14. (i) $(B_1 \cap B_2)^A = B_1^A \cap B_2^A$

(ii) $B_1^A \cup B_2^A \subseteq (B_1 \cup B_2)^A$

(iii) $(B_1 - B_2)^A \subseteq B_1^A - B_2^A$

15. Encuentre una biyección $A^{B\cup C}$ y $A^B \times A^C$ sabiendo que $B \cap C = \phi$.

16 $A^B = B^A \Rightarrow A = B$

17. Quisieramos demostrar que si cada $A_i \neq \varnothing$, toda k-ésima proyección $p_k : \underset{i\in I}{X} A_i \mapsto A_k$ es tal que $\vec{p}_k \overset{n}{\underset{i=1}{X}} A_i = A_k$. Esto en realidad requiere el axioma de elección.

ACTIVIDAD PRÁCTICA –PROCESO IMITATIVO

2. $B^{\phi} = ?$ $\phi^A = ?$

$B^A = \{ f \,/\, f : A \mapsto B \}$

$B^{\phi} = \{ f \,/\, f : \phi \mapsto B \} = \{\phi\}$

$\phi^A = \{ f \,/\, f : A \mapsto \phi \} = \{\phi\}$

3. $B^A = \phi \Rightarrow B = \phi \vee A \neq \phi$

ELD

Demostrar $B = \phi \vee A \neq \phi$

Por RAA

(1)	$B^A = \phi$	**P**
(2)	$\rceil(B = \phi \vee A \neq \phi)$	P
(3)	$B \neq \phi \wedge A = \phi$	DL 2
(4)	$A = \phi$	S 3
(5)	$B^{\phi} = \{\phi\}$	Ejercicio 4.3 (2)
(6)	$B^A = \{\phi\}$	I 4, 5
(7)	$B^A \neq \phi$	6
(8)	$B^A = \phi \wedge B^A \neq \phi$	A 1,7
(9)	$B = \phi \vee A \neq \phi$	RAA 2,8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $B = \phi \vee A \neq \phi$, teniendo como hipótesis $B^A = \phi$ **.** **(2)**Supongamos lo contrario, es decir $B \neq \phi$ *y* $A = \phi$. **(3)**En particular $A = \phi$. **(4)**De esto se desprende que $B^A = \{\phi\}$ (Ejercicio 4.3(2)). **(5)** **(6)** Es decir que $B^A \neq \phi$**.** **(7)** **(8)**Pero esto contradice la hipótesis de que $B^A = \phi$. **(9)**Por lo tanto, $B = \phi \vee A \neq \phi$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $B = \phi \vee A \neq \phi$, teniendo como hipótesis $B^A = \phi$. Supongamos lo contrario, es decir $B \neq \phi$ y $A = \phi$. En particular $A = \phi$. De esto se desprende que $B^A = \{\phi\}$ (Ejercicio 4.3(2)). Es decir que $B^A \neq \phi$. Pero esto contradice la hipótesis de que $B^A = \phi$.
Por lo tanto, $B = \phi \vee A \neq \phi$.

5. $B_1 \subset B_2 \Rightarrow B_1^A \subseteq B_2^A$

ELD

Demostrar $B_1^A \subseteq B_2^A$

Traducción : $f \in B_1^A \Rightarrow f \in B_2^A$

(1)	$B_1 \subset B_2$	**P**
(2)	$f \in B_1^A$	P
(3)	$f : A \mapsto B_1$	I 2, 4.9
(4)	$f : A \mapsto B_2$	1,2
(5)	$f \in B_2^A$	I 4,4.9
(6)	$f \in B_1^A \Rightarrow f \in B_2^A$	CP2,5
(7)	$B_1^A \subseteq B_2^A$	traducción 6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

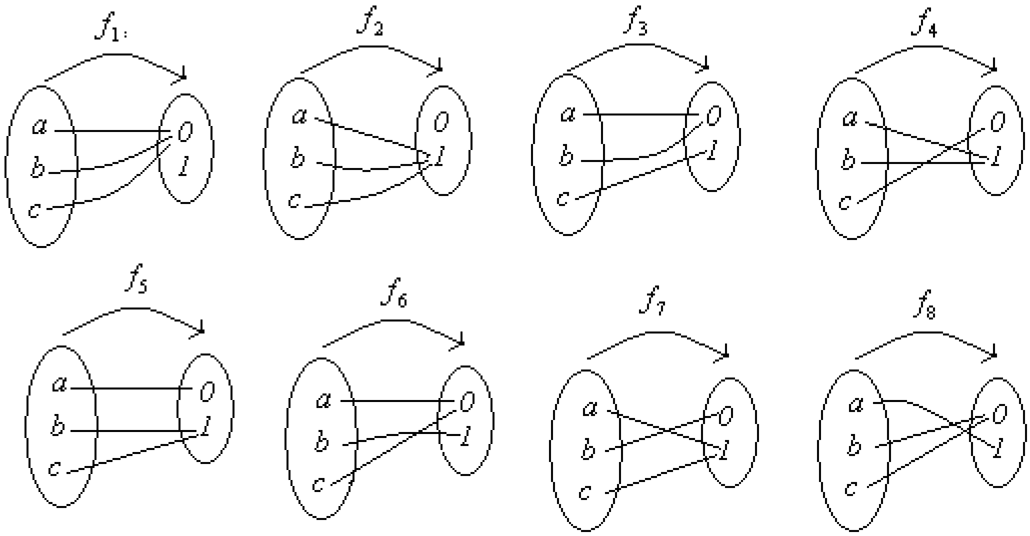
Vamos a demostrar que $B_1^A \subseteq B_2^A$.
(2) Sea $f \in B_1^A$. **(3)** Entonces $f : A \mapsto B_1$ (4.9). **(4)**Debido a que $B_1 \subset B_2$ (por hipótesis), $f : A \mapsto B_2$. **(5)**Es decir $f \in B_2^A$.**(6)(7)**Así que $B_1^A \subseteq B_2^A$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $B_1^A \subseteq B_2^A$.
Sea $f \in B_1^A$. Entonces $f : A \mapsto B_1$ (4.9). Debido a que $B_1 \subset B_2$ (por hipótesis), $f : A \mapsto B_2$. Es decir $f \in B_2^A$ (4.9). Así que $B_1^A \subseteq B_2^A$.

5. Siendo $A = \{a, b, c\}$ encuentre $\mathcal{P}A$ y 2^A.
$\mathcal{P}A = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

$2^A = \{f \,/\, f : A \mapsto 2\} \quad f : \{a,b,c\} \longrightarrow \{0,1\}$



$2^A = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$

7. Siendo cada $A_i \subseteq B$, $\underset{i\in I}{X} A_i \subseteq B^I$

ELD

Demostrar $\underset{i\in I}{X} A_i \subseteq B^I$

Traducción : $f \in \underset{i\in I}{X} A_i \Rightarrow f \in B^I$

(1)	$A_i \subseteq B$	**P**
(2)	$f \in \underset{i\in I}{X} A_i$	P
(3)	$f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} A_i \wedge \forall i \in I\,(fi \in A_i)$	I 2, 4.9
(4)	$f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} B \wedge \forall i \in I\,(fi \in B)$	1, 3
(5)	$\bigcup_{i\in I} B = B$	P
(6)	$f : I \mapsto B$	I 4,5
(7)	$f \in B^I$	I 6,4.9
(8)	$f \in \underset{i\in I}{X} A_i \Rightarrow f \in B^I$	CP 2,7
□ (9)	$\underset{i\in I}{X} A_i \subseteq B^I$	Traducción 8

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\underset{i\in I}{X} A_i \subseteq B^I$ **.**

(2) Sea $f \in \underset{i\in I}{X} A_i$ **.(3)**Entonces $f: I \mapsto \bigcup_{i\in I} A_i$ con $fi \in A_i\ \forall i \in I$ **(4)** Debido a que $A_i \subseteq B$ por hipótesis, $f: I \mapsto \bigcup_{i\in I} B, \forall i \in I\ (fi \in B)$. **(5)(6)(7)**Como $\bigcup_{i\in I} B = B$ entonces $f: I \mapsto B$ o sea $f \in B^I$. **(8)(9)**Luego $\underset{i\in I}{X} A_i \subseteq B^I$ **.**

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\underset{i\in I}{X} A_i \subseteq B^I$ **.**

Sea $f \in \underset{i\in I}{X} A_i$

Entonces $f: I \mapsto \bigcup_{i\in I} A_i$ con $fi \in A_i\ \forall i \in I$ (4.9)

Ya que $A_i \subseteq B$ (hipótesis),

entonces $f: I \mapsto \bigcup_{i\in I} B, \forall i \in I\ (fi \in B)$

Como $\bigcup_{i\in I} B = B$,

.

entonces $f: I \mapsto B$ o sea $f \in B^I$

.

Por lo tanto $\underset{i\in I}{X} A_i \subseteq B^I$

.

8. $\forall i \in I\ (A_i \subseteq B_i) \Rightarrow \underset{i\in I}{X} A_i \subseteq \underset{i\in I}{X} B_i$

ELD

Demostrar $\underset{i\in I}{X} A_i \subseteq \underset{i\in I}{X} B_i$

Traducción : $f \in \underset{i\in I}{X} A_i \Rightarrow f \in \underset{i\in I}{X} B_i$

(1)	$\forall i \in I\ (A_i \subseteq B_i)$	**P**
(2)	$f \in \underset{i\in I}{X} A_i$	P
(3)	$f: I \mapsto \bigcup_{i\in I} A_i \wedge \forall i \in I\ (fi \in A_i)$	I 2, 4.9
(4)	$f: I \mapsto \bigcup_{i\in I} B_i \wedge \forall i \in I\ (fi \in B_i)$	1, 3

(5)	$f \in \underset{i\in I}{X} B_i$	P
(6)	$f \in \underset{i\in I}{X} A_i \Rightarrow f \in \underset{i\in I}{X} B_i$	CP 2,5
□(7)	$\underset{i\in I}{X} A_i \subseteq \underset{i\in I}{X} B_i$	traducción 6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Demostremos que $\underset{i\in I}{X} A_i \subseteq \underset{i\in I}{X} B_i$, teniendo como hipótesis $A_i \subseteq B_i \ \forall i \in I$ **.**
(2) Sea $f \in \underset{i\in I}{X} A_i$.**(3)**Entonces $f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} A_i$ *con* $fi \in A_i \ \forall i \in I$ (4.8).
(4) Como $A_i \subseteq B_i \ \forall i \in I$ (hipótesis),entonces $f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} B_i$ *con* $fi \in B_i \ \forall i \in I$.
(5) Es decir $f \in \underset{i\in I}{X} B_i$. **(6)(7)**Luego $\underset{i\in I}{X} A_i \subseteq \underset{i\in I}{X} B_i$ **.**

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\underset{i\in I}{X} A_i \subseteq \underset{i\in I}{X} B_i$ **.**
Sea $f \in \underset{i\in I}{X} A_i$ .Entonces $f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} A_i$ *con* $fi \in A_i \ \forall i \in I$ (4.8).
Como $A_i \subseteq B_i \ \forall i \in I$, entonces $f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} B_i$ *con* $fi \in B_i \ \forall i \in I$. Es decir $f \in \underset{i\in I}{X} B_i$. Luego $\underset{i\in I}{X} A_i \subseteq \underset{i\in I}{X} B_i$ **.**

10 . $\underset{i\in I}{X} A_i \neq \phi \Rightarrow \vec{p}_k \underset{i\in I}{X} = A_k$.

ELD

Demostrar $\vec{p}_k \underset{i\in I}{X} = A_k$

Traducción : $p_k(a_i)_{i\in I} \in \vec{p}_k(\underset{i\in I}{X} A_i) \Leftrightarrow p_k(a_i)_{i\in I} \in A_k$

(1)	$\underset{i\in I}{X} A_i \neq \phi$	**P**
(2)	$\exists (a_i)_{i\in I} \in \underset{i\in I}{X} A_i$	1, 1.6(ii)
$\Rightarrow$ (3)	$p_k(a_i)_{i\in I} \in \vec{p}_k(\underset{i\in I}{X} A_i)$	P , 2
(4)	$p_k(a_i)_{i\in I} = a_k \in A_k$	I 3, 4.11
$□_1$(5)	$p_k(a_i)_{i\in I} \in \vec{p}_k(\underset{i\in I}{X} A_i) \Rightarrow p_k(a_i)_{i\in I} \in A_k$	CP 3,4

$\Leftarrow$ (6)		$p_k(a_i)_{i\in I} \in A_k$	P
(7)		$p_k(a_i)_{i\in I} = a_k \in \vec{p}_k(\underset{i\in I}{X} A_i)$	I6, 4.11
$\square_2$ (8)		$p_k(a_i)_{i\in I} \in A_k \Rightarrow p_k(a_i)_{i\in I} \in \vec{p}_k(\underset{i\in I}{X} A_i)$	CP 6,7
(9)		$p_k(a_i)_{i\in I} \in \vec{p}_k(\underset{i\in I}{X} A_i) \Leftrightarrow p_k(a_i)_{i\in I} \in A_k$	LB 5,8
$\square$ (10)		$\vec{p}_k \underset{i\in I}{X} = A_k$	traducción 9

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{p}_k \underset{i\in I}{X} = A_k$.

(1)(2) Como $\underset{i\in I}{X} A_i \neq \phi$ existe $(a_i)_{i\in I} \in \underset{i\in I}{X} A_i$. **(3)** Sea $p_k(a_i)_{i\in I} \in \vec{p}_k(\underset{i\in I}{X} A_i)$.

(4) Entonces $p_k(a_i)_{i\in I} = a_k \in A_k$ (4.11); **(5)**por lo tanto se cumple la implicación

$$p_k(a_i)_{i\in I} \in \vec{p}_k(\underset{i\in I}{X} A_i) \Rightarrow p_k(a_i)_{i\in I} \in A_k \qquad (\text{ I }).$$

(6) Sea ahora $p_k(a_i)_{i\in I} \in A_k$. **(7)** Entonces $p_k(a_i)_{i\in I} = a_k \in \vec{p}_k(\underset{i\in I}{X} A_i)$ (4.11), **(8)**cumpliéndose la implicación

$$p_k(a_i)_{i\in I} \in A_k \Rightarrow p_k(a_i)_{i\in I} \in \vec{p}_k(\underset{i\in I}{X} A_i) \qquad (\text{ II }).$$

(9) De (I) y (II) se tiene la equivalencia

$$p_k(a_i)_{i\in I} \in \vec{p}_k(\underset{i\in I}{X} A_i) \Leftrightarrow p_k(a_i)_{i\in I} \in A_k .$$

(10) De donde resulta que $\vec{p}_k \underset{i\in I}{X} = A_k$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\vec{p}_k \underset{i\in I}{X} = A_k$.

Como $\underset{i\in I}{X} A_i \neq \phi$ existe $(a_i)_{i\in I} \in \underset{i\in I}{X} A_i$. Sea $p_k(a_i)_{i\in I} \in \vec{p}_k(\underset{i\in I}{X} A_i)$.

Entonces $p_k(a_i)_{i\in I} = a_k \in A_k$ (4.11); por lo tanto se cumple la implicación

$$p_k(a_i)_{i\in I} \in \vec{p}_k(\underset{i\in I}{X} A_i) \Rightarrow p_k(a_i)_{i\in I} \in A_k \qquad (\text{ I }).$$

Sea ahora $p_k(a_i)_{i\in I} \in A_k$. Entonces $p_k(a_i)_{i\in I} = a_k \in \vec{p}_k(\underset{i\in I}{X} A_i)$ (4.11), cumpliéndose la implicación

$$p_k(a_i)_{i\in I} \in A_k \;\Rightarrow\; p_k(a_i)_{i\in I} \in \vec{p}_k(\underset{i\in I}{X} A_i) \qquad (\text{ II }) .$$

De (I) y (II) se tiene la equivalencia

$$p_k(a_i)_{i\in I} \in \vec{p}_k(\underset{i\in I}{X} A_i) \Leftrightarrow p_k(a_i)_{i\in I} \in A_k .$$

De donde resulta que $\vec{p}_k \underset{i\in I}{X} = A_k$.

11. Para cada $A \subseteq \underset{i\in I}{X} A_i$, $A \subseteq \underset{i\in I}{X} \vec{p}_i A$

ELD

Demostrar $A \subseteq \underset{i\in I}{X} \vec{p}_i A$

Traducción : $f \in A \Rightarrow f \in \underset{i\in I}{X} \vec{p}_i A$

(1)	$A \subseteq \underset{i\in I}{X} A_i$	**P**
(2)	$f \in A$	P
(3)	$f \in \underset{i\in I}{X} A_i$	1, 2
(4)	$\vec{p}_i A = A_i$	P
(5)	$f \in \underset{i\in I}{X} \vec{p}_i A$	I 3,4
(6)	$f \in A \Rightarrow f \in \underset{i\in I}{X} \vec{p}_i A$	CP 2,5
□(7)	$A \subseteq \underset{i\in I}{X} \vec{p}_i A$	traducción 6

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $A \subseteq \underset{i\in I}{X} \vec{p}_i A$.

(2) Sea $f \in A$. **(3)**Como $A \subseteq \underset{i\in I}{X} A_i$ entonces $f \in \underset{i\in I}{X} A_i$. **(4)(5)**Como $\vec{p}_i A = A_i$, $f \in \underset{i\in I}{X} \vec{p}_i A$. **(6)(7)**De donde $A \subseteq \underset{i\in I}{X} \vec{p}_i A$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $A \subseteq \underset{i\in I}{X} \overrightarrow{p_i}\, A$. Sea $f \in A$. Como $A \subseteq \underset{i\in I}{X} A_i$, entonces $f \in \underset{i\in I}{X} A_i$. Como $\overrightarrow{p_i}\, A = A_i$, entonces $f \in \underset{i\in I}{X} \overrightarrow{p_i}\, A$.

De donde $A \subseteq \underset{i\in I}{X} \overrightarrow{p_i}\, A$.

12. $\underset{i\in I}{X} A_i \cap \underset{i\in I}{X} B_i = \underset{i\in I}{X}(A_i \cap B_i)$

ELD

Demostrar $\underset{i\in I}{X} A_i \cap \underset{i\in I}{X} B_i = \underset{i\in I}{X}(A_i \cap B_i)$

Traducción : $f \in \underset{i\in I}{X} A_i \cap \underset{i\in I}{X} B_i \Leftrightarrow f \in \underset{i\in I}{X}(A_i \cap B_i)$

(1) $I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap I \times (\bigcup_{i\in I} B_i) = I \times ((\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{i\in I} B_i))$ $\quad \bigcup_{i\in I} A_i / A, \ \bigcup_{i\in I} B_i / B,$ **2.8(i)**

$$
\begin{aligned}
f \in \underset{i\in I}{X} A_i \cap \underset{i\in I}{X} B_i &\Leftrightarrow f \in \underset{i\in I}{X} A_i \wedge f \in \underset{i\in I}{X} B_i && 1.11(\mathrm{i})\\
&\Leftrightarrow f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} A_i \wedge \forall i(fi \in A_i) \wedge f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} B_i \wedge \forall i(f_i \in B_i) && 4.8\\
&\Leftrightarrow f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} A_i \wedge f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} B_i \wedge \forall i(f_i \in A_i) \wedge \forall i(f_i \in B_i)\\
&\Leftrightarrow f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} A_i \wedge f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} B_i \wedge \forall i(f_i \in A_i \cap B_i)\\
&\Leftrightarrow f \subseteq I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \wedge f \subseteq I \times (\bigcup_{i\in I} B_i) \wedge \forall i(f_i \in A_i \cap B_i) && 3.3(\mathrm{i})\\
&\Leftrightarrow f \subseteq I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap I \times (\bigcup_{i\in I} B_i) \wedge \forall i(f_i \in A_i \cap B_i)\\
&\Leftrightarrow f \subseteq I \times ((\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{i\in I} B_i)) \wedge \forall i(f_i \in A_i \cap B_i) && (1)\\
&\Leftrightarrow f \subseteq I \times (\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i)) \wedge \forall i(f_i \in A_i \cap B_i) && 4.5\ (\mathrm{i})\\
&\Leftrightarrow f : I \mapsto \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i) \wedge \forall i(f_i \in A_i \cap B_i) && 2.10\\
&\Leftrightarrow f \in \underset{i\in I}{X}(A_i \cap B_i) && 4.8
\end{aligned}
$$

13. (i) $\underset{i\in I}{X} A_i \cap \underset{j\in J}{X} B_j = \underset{(i,j)\in I\,xJ}{X}(A_i \cap B_j)$

ELD

Demostrar $\underset{i\in I}{X} A_i \cap \underset{j\in J}{X} B_j = \underset{(i,j)\in I\,xJ}{X}(A_i \cap B_j)$

Traducción : $f \in \underset{i\in I}{X} A_i \cap \underset{j\in J}{X} B_j \Leftrightarrow f \in \underset{(i,j)\in I\times J}{X}(A_i \cap B_j)$

$\Rightarrow$(1)	$f \in \underset{i\in I}{X} A_i \cap \underset{j\in J}{X} B_j$	P
(2)	$f \in \underset{i\in I}{X} A_i \wedge f \in \underset{j\in J}{X} B_j$	1
(3)	$f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} A_i \wedge \forall i(fi \in A_i) \wedge f : J \mapsto \bigcup_{j\in J} B_j \wedge \forall j(fj \in B_j)$	I. 2,4.8
(4)	$f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} A_i \wedge f : I \mapsto \bigcup_{j\in J} B_j \wedge \forall i(fi \in A_i) \wedge \forall j(fj \in B_j)$	3
(5)	$f \subseteq I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \wedge f \subseteq J \times (\bigcup_{j\in J} B_j) \wedge \forall i(fi \in A_i) \wedge \forall j(fj \in B_j)$	I. 4,2.10
(6)	$f \subseteq I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap J \times (\bigcup_{j\in J} B_j) \wedge \forall i(fi \in A_i) \wedge \forall j(fj \in B_j)$	5
(7)	$(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$	2.9
(8)	$I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap J \times (\bigcup_{j\in J} B_j) = (I \cap J)\times((\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{i\in I} B_i))$	$I/A, \cup A_i$ /B, $J/C, \cup B_j$ /D 7
(9)	$f \subseteq (I \cap J)\times((\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j))$	I 6,8
(10)	$(\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j)) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$	4.5(i)
(11)	$f \subseteq (I \cap J)\times(\bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j))$	I 9,10
(12)	$f : (I \cap J) \mapsto \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$	I 11,2.10
(13)	$f \in \underset{(i,j)\in I\times J}{X}(A_i \cap B_j)$	I 12,4.8
□$_1$(14)	$f \in \underset{i\in I}{X} A_i \cap \underset{j\in J}{X} B_j \Rightarrow f \in \underset{(i,j)\in I\times J}{X}(A_i \cap B_j)$	CP 1,13
$\Leftarrow$(15)	$f \in \underset{(i,j)\in I\times J}{X}(A_i \cap B_j)$	P
(16)	$f : I \times J \mapsto \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j) \wedge \forall (i,j) \in I\times J(fi\in A_i \wedge fj \in B_j)$	I 15,4.8
(17)	$f : I \cap J \mapsto \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j) \wedge \forall i \in I(fi\in A_i) \wedge \forall j \in J(fj \in B_j)$	16
(18)	$f \subseteq (I \cap J)\times(\bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j))$	I 17, 3.3(i)
(19)	$(\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j)) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$	4.5 (i)
(20)	$f \subseteq (I \cap J)\times((\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j))$	I 18,19
(21)	$(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$	2.9
(22)	$I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap J \times (\bigcup_{j\in J} B_j) = (I \cap J)\times((\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{i\in I} B_i))$	$I/A, \cup A_i$ /B,$J/C, \cup B_j$ /D 21
(23)	$f \subseteq I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap J \times (\bigcup_{j\in J} B_j)$	I 21,22

(24) $f \subseteq I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \wedge f \subseteq J \times (\bigcup_{j\in J} B_j)$ 23

(25) $f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} A_i \wedge \forall i(fi \in A_i) \wedge f : J \mapsto \bigcup_{j\in J} B_j \wedge \forall j(fj \in B_j)$ 15,24

(26) $f \in \mathop{X}_{i\in I} A_i \wedge f \in \mathop{X}_{j\in J} B_j$ I 25,4.8

(27) $f \in \mathop{X}_{i\in I} A_i \cap \mathop{X}_{j\in J} B_j$ 26

□$_2$ (28) $f \in \mathop{X}_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j) \Rightarrow f \in \mathop{X}_{i\in I} A_i \cap \mathop{X}_{j\in J} B_j$ CP 15,27

(29) $f \in \mathop{X}_{i\in I} A_i \cap \mathop{X}_{j\in J} B_j \Leftrightarrow f \in \mathop{X}_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$ LB 14,28

□(30) $\mathop{X}_{i\in I} A_i \cap \mathop{X}_{j\in J} B_j = \mathop{X}_{(i,j)\in I\, xJ} (A_i \cap B_j)$ traducción 29

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\mathop{X}_{i\in I} A_i \cap \mathop{X}_{j\in J} B_j = \mathop{X}_{(i,j)\in I\, xJ} (A_i \cap B_j)$

(1) Sea $f \in \mathop{X}_{i\in I} A_i \cap \mathop{X}_{j\in J} B_j$.**(2)**Entonces $f \in \mathop{X}_{i\in I} A_i \wedge f \in \mathop{X}_{j\in J} B_j$ **(3)(4)** o sea que $f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} A_i \wedge \forall i(fi \in A_i) \wedge f : J \mapsto \bigcup_{j\in J} B_j \wedge \forall j(fj \in B_j)$ (4.8); **(5)**de donde

$$f \subseteq I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \wedge f \subseteq J \times (\bigcup_{j\in J} B_j) \wedge \forall i(fi \in A_i) \wedge \forall j(fj \in B_j)$$ **(6)** y por lo tanto

$$f \subseteq I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap J \times (\bigcup_{j\in J} B_j) \wedge \forall i(fi \in A_i) \wedge \forall j(fj \in B_j). \qquad (*)$$

(7) Como $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ (2.9), **(8)**especificando *I*/*A*, $\cup A_i$ /B, *J*/*C*, $\cup B_j$ /*D* se obtiene

$$I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap J \times (\bigcup_{j\in J} B_j) = (I \cap J) \times ((\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{i\in I} B_i)). \qquad (**)$$

(9) De (*) y (**) se tiene $f \subseteq (I \cap J) \times ((\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j))$.

(10) Como

$$(\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j)) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j) \,(4.5(\text{i})),$$

entonces

$$\textbf{(11)}\ f \subseteq (I \cap J) \times (\bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j))$$

(12)y por lo tanto

$$f : (I \cap J) \mapsto \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)\,(2.10);$$

(13)es decir

$$f \in \underset{(i,j)\in I\times J}{X} (A_i \cap B_j)\,(4.8).$$

(14) Luego

$$f \in \underset{i\in I}{X} A_i \ \cap \underset{j\in J}{X} B_j \Rightarrow f \in \underset{(i,j)\in I\times J}{X} (A_i \cap B_j). \qquad (\text{ I })$$

(15) Sea ahora $f \in \underset{(i,j)\in I\times J}{X} (A_i \cap B_j)$.

(16) Entonces $f : I \times J \mapsto \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j) \wedge \forall (i,j) \in I \times J (\, fi \in A_i \wedge fj \in B_j\,)\,(4.8)$.

(17) De onde $f : I \cap J \mapsto \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j) \wedge \forall i \in I(\, fi \in A_i\,) \wedge \forall j \in J(\, fj \in B_j\,)$.

(18) Es decir $f \subseteq (I \cap J) \times (\bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)\ )\,(3.3(i))$.

(19) Como $(\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j)) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$,

entonces **(20)** $f \subseteq (I \cap J) \times ((\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j))$.

(21) Puesto que $(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$ (2.9), **(22)**especificando *I/A*, $\cup A_i$ /B, *J/C*, $\cup B_j / D$, se tiene $I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap J \times (\bigcup_{j\in J} B_j) = (I \cap J) \times ((\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{i\in I} B_i))$

(23) y por lo tanto $f \subseteq I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap J \times (\bigcup_{j\in J} B_j)$ **(24)**o sea $f \subseteq I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \wedge f \subseteq J \times (\bigcup_{j\in J} B_j)$

(25) de donde $f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} A_i \wedge \forall i(\, fi \in A_i\,) \wedge f : J \mapsto \bigcup_{j\in J} B_j \wedge \forall j(\, fj \in B_j\,)$

(26) lo que significa que $f \in \underset{i\in I}{X} A_i \wedge f \in \underset{j\in J}{X} B_j$ **(27)**o sea $f \in \underset{i\in I}{X} A_i \ \cap \underset{j\in J}{X} B_j$.

(28) Por lo tanto

$$f \in \underset{(i,j)\in I\times J}{X} (A_i \cap B_j) \Rightarrow f \in \underset{i\in I}{X} A_i \ \cap \underset{j\in J}{X} B_j. \qquad (\text{ II })$$

(29) De (I) y (II) se tiene la equivalencia $f \in \underset{i\in I}{X} A_i \ \cap \underset{j\in J}{X} B_j \Leftrightarrow f \in \underset{(i,j)\in I\times J}{X} (A_i \cap B_j)$

(30) es decir $\underset{i\in I}{X} A_i \ \cap \underset{j\in J}{X} B_j = \underset{(i,j)\in I\, xJ}{X} (A_i \cap B_j)$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $\underset{i\in I}{X} A_i \cap \underset{j\in J}{X} B_j = \underset{(i,j)\in I\, xJ}{X} (A_i \cap B_j)$.

Sea

$$f \in \underset{i\in I}{X} A_i \cap \underset{j\in J}{X} B_j \,.$$

Entonces

$$f \in \underset{i\in I}{X} A_i \wedge f \in \underset{j\in J}{X} B_j$$

Es decir

$$f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} A_i \wedge \forall i(fi \in A_i) \wedge f : J \mapsto \bigcup_{j\in J} B_j \wedge \forall j(fj \in B_j) \text{ (4.8);}$$

de donde

$$f \subseteq I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \wedge f \subseteq J \times (\bigcup_{j\in J} B_j) \wedge \forall i(fi \in A_i) \wedge \forall j(fj \in B_j)$$

y por lo tanto

$$f \subseteq I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap J \times (\bigcup_{j\in J} B_j) \wedge \forall i(fi \in A_i) \wedge \forall j(fj \in B_j) . \quad (*)$$

Como

$$(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D) \text{ (2.9),}$$

especificando I/A, $\cup A_i / B$, J/C, $\cup B_j /D$ se obtiene

$$I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap J \times (\bigcup_{j\in J} B_j) = (I \cap J) \times ((\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{i\in I} B_i)) . \quad (**)$$

De (*) y (**) se tiene $f \subseteq (I \cap J) \times ((\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j))$.

Como

$$(\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j)) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j) \text{ (4.5(i)),}$$

entonces

$$f \subseteq (I \cap J) \times (\bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j))$$

y por lo tanto

$$f : (I \cap J) \mapsto \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j) \text{ (2.10)}$$

es decir

$$f \in \underset{(i,j)\in I\times J}{X} (A_i \cap B_j) \text{ (4.8).}$$

Luego

$$f \in \underset{i\in I}{X} A_i \ \cap \underset{j\in J}{X} \ B_j \Rightarrow f \in \underset{(i,j)\in I\times J}{X} (A_i \cap B_j)\,. \qquad (\text{ I })$$

Sea ahora $$f \in \underset{(i,j)\in I\times J}{X} (A_i \cap B_j)\,.$$

Entonces

$$f : I \times J \mapsto \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j) \wedge \forall (i, j) \in I \times J (fi \in A_i \wedge fj \in B_j)\,(4.8).$$

De donde

$$f : I \cap J \mapsto \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j) \wedge \forall i \in I (fi \in A_i) \wedge \forall j \in J (fj \in B_j)\,,$$

es decir,

$$f \subseteq (I \cap J) \times (\bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j) \ ) \qquad (3.3(\text{i})).$$

Como

$$(\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j)) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j) \qquad (4.5\text{i}),$$

entonces

$$f \subseteq (I \cap J) \times ((\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j))\,.$$

Puesto que

$$(A\times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \qquad (2.9),$$

especificando I/A, $\cup A_i$ /B, J/C, $\cup B_j / D$,

$$I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap J \times (\bigcup_{j\in J} B_j) = (I \cap J) \times ((\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{i\in I} B_i))$$

y por lo tanto $$f \subseteq I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap J \times (\bigcup_{j\in J} B_j)$$

o sea

$$f \subseteq I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \wedge f \subseteq J \times (\bigcup_{j\in J} B_j)$$

de donde

$$f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} A_i \wedge \forall i (fi \in A_i) \wedge f : J \mapsto \bigcup_{j\in J} B_j \wedge \forall j (fj \in B_j)\,,$$

es decir

$$f \in \underset{i\in I}{X} A_i \wedge f \in \underset{j\in J}{X} B_j \ \text{ sea } \ f \in \underset{i\in I}{X} A_i \ \cap \underset{j\in J}{X} \ B_j\,.$$

Por lo tanto

$$f \in \underset{(i,j)\in I\times J}{X} (A_i \cap B_j) \Rightarrow f \in \underset{i\in I}{X} A_i \ \cap \underset{j\in J}{X} \ B_j\,. \qquad (\text{ II })$$

De (I) y (II) se tiene la equivalencia $f \in \underset{i\in I}{X} A_i \ \cap \underset{j\in J}{X} \ B_j \Leftrightarrow f \in \underset{(i,j)\in I\times J}{X} (A_i \cap B_j)$

o sea $\underset{i\in I}{X} A_i \cap \underset{j\in J}{X} B_j = \underset{(i,j)\in I\,xJ}{X}(A_i \cap B_j)$.

13.(ii) $\underset{i\in I}{X} A_i \cup \underset{j\in J}{X} B_j = \underset{(i,j)\in I\,xJ}{X}(A_i \cup B_j)$

ELD

Demostrar $\underset{i\in I}{X} A_i \cup \underset{j\in J}{X} B_j = \underset{(i,j)\in I\,xJ}{X}(A_i \cup B_j)$

Traducción : $f \in \underset{i\in I}{X} A_i \cup \underset{j\in J}{X} B_j \Leftrightarrow f \in \underset{(i,j)\in I\times J}{X}(A_i \cup B_j)$

$\Rightarrow$(1)	$f \in \underset{i\in I}{X} A_i \cup \underset{j\in J}{X} B_j$	P
(2)	$f \in \underset{i\in I}{X} A_i \vee f \in \underset{j\in J}{X} B_j$	1
(3)	$f : I \mapsto \bigcup_{i\in I} A_i \wedge \forall i(fi \in A_i) \vee f : J \mapsto \bigcup_{j\in J} B_j \wedge \forall j(fj \in B_j)$	I 2,4.8
(4)	$f \subseteq I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \vee f \subseteq J \times (\bigcup_{j\in J} B_j)$	3
(5)	$f \subseteq (I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \cup J \times (\bigcup_{j\in J} B_j))$	4
(6)	$(A\times B)\cup(C\times D)\subseteq(A\cup C)\times(B\cup D)$	Ejercico 2.2 (7(ii))
(7)	$I \times (\bigcup_{i\in I} A_i) \cup J \times (\bigcup_{j\in J} B_j) \subseteq (I\cup J)\times((\bigcup_{i\in I} A_i)\cup(\bigcup_{i\in I} B_i))$	I/A , $\cup A_i$ /B, J/C, $\cup B_j$ /D 6
(8)	$f \subseteq (I\cup J)\times((\bigcup_{i\in I} A_i)\cup(\bigcup_{j\in J} B_j))$	5,7
(9)	$(\bigcup_{i\in I} A_i)\cup(\bigcup_{j\in J} B_j)) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)$	P
(10)	$f \subseteq (I\cap J)\times(\bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)\ )$	I 8,9
(11)	$f : (I\cap J) \mapsto \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)$	10
(12)	$f \in \underset{(i,j)\in I\times J}{X}(A_i \cup B_j)$	I 12,4.8
□$_1$(13)	$f \in \underset{i\in I}{X} A_i \cap \underset{j\in J}{X} B_j \Rightarrow f \in \underset{(i,j)\in I\times J}{X}(A_i \cup B_j)$	CP 1,12
$\Leftarrow$(14)	$f \in \underset{(i,j)\in I\times J}{X}(A_i \cup B_j)$	P
(15)	no se pudo ….	

14. (i) $(B_1 \cap B_2)^A = B_1^A \cap B_2^A$

ELD

Demostrar $(B_1 \cap B_2)^A = B_1^A \cap B_2^A$

Traducción : $f \in (B_1 \cap B_2)^A \Leftrightarrow f \in B_1^A \cap B_2^A$

(1)	$f \in (B_1 \cap B_2)^A$	P
(2)	$f : A \mapsto B_1 \cap B_2$	I 1,4.9
(3)	$B_1 \cap B_2 \subseteq B_1$	P
(4)	$f : A \mapsto B_1$	2,3
(5)	$B_1 \cap B_2 \subseteq B_2$	P
(6)	$f : A \mapsto B_2$	2,5
(7)	$f \in B_1{}^A$	I 4,4.9
(8)	$f \in B_2{}^A$	I 6,4.9
(9)	$f \in B_1{}^A \wedge f \in B_2{}^A$	A 7,8
(10)	$f \in B_1{}^A \cap B_2{}^A$	traducción 9
□$_1$(11)	$f \in (B_1 \cap B_2)^A \Rightarrow f \in B_1^A \cap B_2^A$	CP 1,10
$\Leftarrow$ (12)	$f \in B_1{}^A \cap B_2{}^A$	P
(13)	$f \in B_1{}^A \wedge f \in B_2{}^A$	12
(14)	$f : A \mapsto B_1 \wedge f : A \mapsto B_2$	I 13,4.9
(15)	$f \subseteq A \times B_1 \wedge f \subseteq A \times B_2$	I 14,3.3(i)
(16)	$f \subseteq A \times B_1 \cap A \times B_2$	15
(17)	$A \times B_1 \cap A \times B_2 = A \times (B_1 \cap B_2)$	2.8(i)
(18)	$f \subseteq A \times (B_1 \cap B_2)$	I 16,17
(19)	$f : A \mapsto B_1 \cap B_2$	I 18,3.3(i)
(20)	$f \in (B_1 \cap B_2)^A$	I 19,4.9
□$_2$ (21)	$f \in B_1{}^A \cap B_2{}^A \Rightarrow f \in (B_1 \cap B_2)^A$	CP 12,20
(22)	$f \in (B_1 \cap B_2)^A \Leftrightarrow f \in B_1^A \cap B_2^A$	LB 11,21
□(23)	$(B_1 \cap B_2)^A = B_1^A \cap B_2^A$	traducción 22

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $(B_1 \cap B_2)^A = B_1^A \cap B_2^A$.

(1) Sea $f \in (B_1 \cap B_2)^A$.**(2)** Entonces $f : A \mapsto B_1 \cap B_2$ (4.9). **(3)**Debido a que $B_1 \cap B_2 \subseteq B_1$, **(4)** $f : A \mapsto B_1$. **(5)(6)** Como también $B_1 \cap B_2 \subseteq B_2$, $f : A \mapsto B_2$. **(7)** **(8)(9)**Por lo tanto tenemos que $f \in B_1^A$ y $f \in B_2^A$, **(10)**es decir, $f \in B_1^A \cap B_2^A$, **(11)**demostrándose la implicación

$$f \in (B_1 \cap B_2)^A \Rightarrow f \in B_1^A \cap B_2^A . \quad (*)$$

(12) Sea ahora $f \in B_1^A \cap B_2^A$.**(13)**Entonces $f \in B_1^A \wedge f \in B_2^A$,
(14) $f : A \mapsto B_1 \wedge f : A \mapsto B_2$, **(15)** $f \subseteq A \times B_1 \wedge f \subseteq A \times B_2$ **(16)**y $f \subseteq A \times B_1 \cap A \times B_2$.**(17)(18)**Como $A \times B_1 \cap A \times B_2 = A \times (B_1 \cap B_2)$ (2.8(i)), entonces $f \subseteq A \times (B_1 \cap B_2)$ **(19)**o sea $f : A \mapsto B_1 \cap B_2$ **(20)**y por lo tanto $f \in (B_1 \cap B_2)^A$, **(21)**demostrándose la implicación

$$f \in B_1^A \cap B_2^A \Rightarrow f \in (B_1 \cap B_2)^A . \quad (**)$$

(22) De (*) y (**) se tiene la equivalencia $f \in (B_1 \cap B_2)^A \Leftrightarrow f \in B_1^A \cap B_2^A$

(23)o sea $(B_1 \cap B_2)^A = B_1^A \cap B_2^A$, que era lo que querìamos demostrar.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $(B_1 \cap B_2)^A = B_1^A \cap B_2^A$.

Sea $f \in (B_1 \cap B_2)^A$.

Entonces $f : A \mapsto B_1 \cap B_2$ (4.9).

Debido a que $B_1 \cap B_2 \subseteq B_1$,
entonces $f : A \mapsto B_1$.

Como también $B_1 \cap B_2 \subseteq B_2$, entonces $f : A \mapsto B_2$.

Por lo tanto tenemos que $f \in B_1{}^A$ y $f \in B_2{}^A$ (4.9),

es decir, $f \in B_1{}^A \cap B_2{}^A$,

demostrándose la implicación

$$f \in (B_1 \cap B_2)^A \Rightarrow f \in B_1^A \cap B_2^A \ . \quad (*)$$

Sea ahora $f \in B_1{}^A \cap B_2{}^A$.

entonces $f \in B_1{}^A \wedge f \in B_2{}^A$.

Es decir $f : A \mapsto B_1 \wedge f : A \mapsto B_2$ (4.9);

de donde $f \subseteq A \times B_1 \wedge f \subseteq A \times B_2$ (3.3(i))

y $f \subseteq A \times B_1 \cap A \times B_2$.

Como $A \times B_1 \cap A \times B_2 = A \times (B_1 \cap B_2)$ (2.8(i)),

entonces $f \subseteq A \times (B_1 \cap B_2)$

o sea $f : A \mapsto B_1 \cap B_2$ (3.3(i))

y por lo tanto $f \in (B_1 \cap B_2)^A$ (4.9),

demostrándose la implicación

$$f \in B_1{}^A \cap B_2{}^A \Rightarrow f \in (B_1 \cap B_2)^A \ . \quad (**)$$

De (*) y (**) se tiene la equivalencia

$$f \in (B_1 \cap B_2)^A \Leftrightarrow f \in B_1^A \cap B_2^A$$

o sea $(B_1 \cap B_2)^A = B_1^A \cap B_2^A$, que era lo que queríamos demostrar.

14. (ii) $B_1^A \cup B_2^A \subseteq (B_1 \cup B_2)^A$

ELD

Demostrar $B_1^A \cup B_2^A \subseteq (B_1 \cup B_2)^A$

Traducción : $f \in B_1^A \cup B_2^A \Rightarrow f \in (B_1 \cup B_2)^A$

(1)	$f \in B_1^A \cup B_2^A$	P
(2)	$f \in B_1^A \vee f \in B_2^A$	1
(3)	$f \in B_1^A$	P
(4)	$f : A \mapsto B_1$	I 3,4.9
(5)	$B_1 \subseteq B_1 \cup B_2$	P
(6)	$f : A \mapsto B_1 \cup B_2$	4,5

(7)	$f \in (B_1 \cup B_2)^A$	I 5,4.9
(8)	$f \in {B_1}^A \mapsto f \in (B_1 \cup B_2)^A$	CP 3,6
(9)	$f \in {B_2}^A$	P
(10)	$f : A \mapsto B_2$	I 8,4.9
(11)	$f : A \mapsto B_1 \cup B_2$	9
(12)	$f \in (B_1 \cup B_2)^A$	I 10,4.9
(13)	$f \in {B_2}^A \Rightarrow f \in (B_1 \cup B_2)^A$	CP 8,10
(14)	$f \in (B_1 \cup B_2)^A \vee f \in (B_1 \cup B_2)^A$	DS 2,7,12
(15)	$f \in (B_1 \cup B_2)^A$	DP 13
(16)	$f \in B_1^A \cup B_2^A \Rightarrow f \in (B_1 \cup B_2)^A$	CP 1,14
□ (17)	$B_1^A \cup B_2^A \subseteq (B_1 \cup B_2)^A$	traducción 15

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $B_1^A \cup B_2^A \subseteq (B_1 \cup B_2)^A$.

(1) Sea $f \in B_1^A \cup B_2^A$. **(2)**Es decir $f \in B_1^A$ *o* $f \in B_2^A$. **(3) (4)**Si $f \in B_1^A$, entonces $f : A \mapsto B_1$**. (5)(6)** Como $B_1 \subseteq B_1 \cup B_2$, entonces $f : A \mapsto B_1 \cup B_2$ **(7)(8)** y esto quiere decir que $f \in (B_1 \cup B_2)^A$ (4.9). **(9)(10)**Si $f \in {B_2}^A$, $f : A \mapsto B_2$ y **(11)** $f : A \mapsto B_1 \cup B_2$ **(12) (13) (14)** o sea $f \in (B_1 \cup B_2)^A$. **(15)**Entonces cualquier alternativa que se tome ya sea $f \in B_1^A$ *o* $f \in B_2^A$ siempre se tendrá que $f \in (B_1 \cup B_2)^A$. **(16)(17)**Así que $B_1^A \cup B_2^A \subseteq (B_1 \cup B_2)^A$.

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $B_1^A \cup B_2^A \subseteq (B_1 \cup B_2)^A$.

Sea $\quad f \in B_1^A \cup B_2^A$

Es decir $\quad f \in B_1^A$ *o* $f \in B_2^A$.

Si $\quad f \in B_1^A$, entonces $f : A \mapsto B_1$. $\quad$ (4.9)

Como $\quad B_1 \subseteq B_1 \cup B_2$, entonces $f : A \mapsto B_1 \cup B_2$.

Esto quiere decir que $f \in (B_1 \cup B_2)^A$ (4.9).

Si $f \in B_2{}^A$,

Entonces $f : A \mapsto B_2$ y $f : A \mapsto B_1 \cup B_2$ (4.9)

o sea $f \in (B_1 \cup B_2)^A$. (4.9)

Entonces cualquier alternativa que se tome, ya sea $f \in B_1^A$ *o* $f \in B_2^A$, siempre se tendrá que $f \in (B_1 \cup B_2)^A$. Así que $B_1^A \cup B_2^A \subseteq (B_1 \cup B_2)^A$.

14.(iii) $(B_1 - B_2)^A \subseteq B_1^A - B_2^A$

ELD

Demostrar $(B_1 - B_2)^A \subseteq B_1^A - B_2^A$

Traducción : $f \in (B_1 - B_2)^A \Rightarrow f \in B_1^A - B_2^A$

(1)	$f \in (B_1 - B_2)^A$	P
(2)	$f : A \mapsto B_1 - B_2$	I 1,4.9
(3)	$f \subseteq A \times (B_1 - B_2)$	I 2,3.3(i)
(4)	$A \times (B_1 - B_2) = (A \times B_1) - (A \times B_2)$	2.8(i)
(5)	$f \subseteq (A \times B_1) - (A \times B_2)$	I 3,4
(6)	$f \subseteq (A \times B_1) \cap (A \times B_2)'$	5
(7)	$f \subseteq (A \times B_1) \wedge f \subseteq (A \times B_2)'$	6
(8)	$f \subseteq (A \times B_1) \wedge f \not\subset (A \times B_2)$	7
(9)	$f : A \mapsto B_1 \wedge \neg\, (f : A \mapsto B_2)$	I 8,3.3(i)
(10)	$f \in B_1{}^A \wedge f \notin B_2{}^A$	I 9,4.9
(11)	$f \in B_1{}^A - B_2^A$	I 10,4.9
(12)	$f \in (B_1 - B_2)^A \Rightarrow f \in B_1^A - B_2^A$	CP 1,11
□(13)	$(B_1 - B_2)^A \subseteq B_1^A - B_2^A$	traducción 12

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $(B_1 - B_2)^A \subseteq B_1^A - B_2^A$.

(1) Sea $f \in (B_1 - B_2)^A$. **(2)** Esto significa que $f : A \mapsto B_1 - B_2$ (4.9); **(3)**o sea $f \subseteq A\times(B_1 - B_2)$ (3.3(i)). **(4)** Ahora $A\times(B_1 - B_2) = (A\times B_1) - (A\times B_2)$ (2.8i). Así que **(5)** $f \subseteq (A\times B_1) - (A\times B_2)$,**(6) (7)(8)**lo que implica que $f \subseteq (A\times B_1)$ y $f \not\subset (A\times B_2)$ **(9)** o sea que $f : A \mapsto B_1$ pero no que $f : A \mapsto B_2$**;** **(10)**es decir que $f \in B_1{}^A \wedge f \notin B_2{}^A$. **(11)**De donde $f \in B_1{}^A - B_2^A$. **(12)(13)** y por lo tanto $(B_1 - B_2)^A \subseteq B_1^A - B_2^A$

Demostración en lenguaje formal sin la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $(B_1 - B_2)^A \subseteq B_1^A - B_2^A$.

Sea $f \in (B_1 - B_2)^A$.

Entonces $f : A \mapsto B_1 - B_2$ (4.9);

o sea $f \subseteq A\times(B_1 - B_2)$ (3.3(i)).

Ahora $A\times(B_1 - B_2) = (A\times B_1) - (A\times B_2)$ (2.8i).

Así que $f \subseteq (A\times B_1) - (A\times B_2)$,

lo que implica que $f \subseteq (A\times B_1)$ y $f \not\subset (A\times B_2)$

o sea que $f : A \mapsto B_1$ pero no que $f : A \mapsto B_2$**;**

es decir que $f \in B_1{}^A \wedge f \notin B_2{}^A$.

De donde $f \in B_1{}^A - B_2^A$.

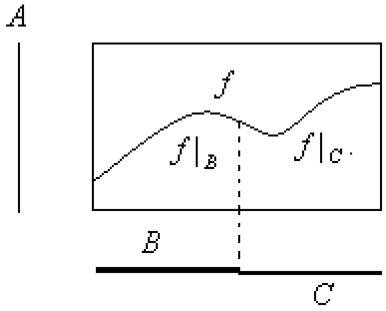
y por lo tanto $(B_1 - B_2)^A \subseteq B_1^A - B_2^A$

15. Encuentre una biyección $A^{B\cup C}$ y $A^B \times A^C$ sabiendo que $B \cap C = \phi$.

$$A^{B\cup C} = \{ f / f : B\cup C \mapsto A \}$$
$$A^B \times A^C = \{ g / g : B \mapsto A \} \times \{ h / h : C \mapsto A \}$$
$$= \{ (g,h) / g : B \mapsto A \wedge h : C \mapsto A \}$$

Definimos $g = f|_B$ y $h = f|_C$.

Entonces tenemos la biyección :



$$T : A^{B\cup C} \longrightarrow A^B \times A^C$$
$$f \longrightarrow (f|_B, f|_C)$$

El lector puede probar que esta función es una biyección.

16 $A^B = B^A \Rightarrow A = B$

ELD

Demostrar A = B

Por RAA

	(1)	$A^B = B^A$	**P**
	(2)	$A \neq B$	P
	(3)	$A^B \neq B^A$	2
	(4)	$A^B = B^A \wedge A^B \neq B^A$	A1,3
□	(5)	A = B	RAA 2,4

Demostración en lenguaje formal con la ayuda del ELD

Vamos a demostrar que $A = B$, si $A^B = B^A$.

(2) Supongamos lo contrario, o sea $A \neq B$. **(3)**Entonces $A^B \neq B^A$**;** **(4)**pero esto contradice la hipótesis de que $A^B = B^A$. **(5)**Luego $A = B$.